


BIBLIOTECA VITT. EMANUELE
32
1 E
18

LEZIONI

DI ARITMETICA, D' ALGEBRA E DI GEOMETRIA

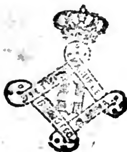
DI SEBASTIANO PURGOTTI

DI CAGLI

PROFESSORE DI MATEMATICA ELEMENTARE, E DI CHIMICA
NELL' UNIVERSITA' DI PERUGIA

TOMO I.

Aritmetica, e Algebra



PERUGIA 1835
TIP. BADUEL DA VINCENZIO BARTELLI
Con licenza de' Superiori

PROSPETTO RAGIONATO

Degli Elementi d' Aritmetica, e Algebra.

Nei corsi anche i più moderni di Matematica elementare o veggiamo risguardata l' Aritmetica come tutta dipendente, e perciò non disgiunta dall' Algebra, o questa troviam preceduta da un ben lungo trattato di quella. Difetto di metodo a noi sembra ravvisare negli uni per l' assoluta esclusiva, e negli altri pella troppa estensione accordata alla parte numerica.

Domina nei primi la falsa massima, che l' Aritmetica sia una derivazione dell' Algebra, e si tiene nella esposizione delle prime nozioni del calcolo un' ordine inverso a quello, con cui le ha naturalmente sviluppate il bisogno a discapito della *chiarezza*: ne' secondi vengono replicate molte dimostrazioni a danno della *brevità*.

Gli Autori, che fanno derivare l' Aritmetica dall' Algebra adducono a sostegno di loro opinione il vero principio, che l' *Algebra è il punto di veduta generale delle Matematiche*, traendone la falsa conseguenza, che un' Algebrista sia *un Calcolatore per qualunque ipotesi di numerazione*, e quindi *Aritmetico senza i principj dell' Aritmetica volgare*, in vece di leggittimamente dedurre, che un' Algebrista è un Calcolatore che *indica* quali operazioni dee l' Aritmetico in varie circostanze eseguire a tenore delle regole, che gli vengon prescritte non già dall' Algebra, ma dal particolar sistema di numerazione, che ha egli addottato.

E' infatti ben facile a concepirsi, che da pure *indicazioni* d'operazioni, quali sono i calcoli algebrici, non si potranno giammai per veruno sforzo d' ingegno far derivare i processi delle prime operazioni numeriche, che son tutte appoggiate all' *Istituzione decadica*, particolar convenzione sulla disposizione delle cifre, che nulla ha di comune coll' Algebra. Che se è vero, che anche le suddette prime numeriche operazioni sono vincolate a qualche massima generale applicabile in qualsiasi ipotesi di numerazione a qualunque numero, e perciò sotto tale riguardo algebrica, come » *Il sottraendo più il residuo è uguale al minuendo* » *Il dividendo è il prodotto del divisore moltiplicato pel quoto, ec.* »; è altresì vero, che tale è la chiarezza, e la facilità con cui queste semplici verità si percepiscono, che vano sarebbe ricorrere per esse al linguaggio dell' Algebra.

Le operazioni dunque sui numeri interi non dipendono dal calcolo letterale, niun lume, o schiarimento vi traggono; è dunque inutile *il posporle* al medesimo. Ma di più è necessario *il premetterle* 1.° perchè l' Algebra le suppone note, e le pone in prattica nelle stesse prime sue operazioni per rapporto ai coefficienti, evidente prova del bisogno, che si ha di formar prima degli Aritmetici, che degli Algebristi, d' insegnar prima le operazioni sugli interi numerici, e poi sugli algebrici, e non viceversa, se non si vuole cader nella incongruenza di fare eseguire agli Allievi delle addizioni, moltiplicazioni, sottrazioni, e divisioni numeriche sui coefficienti, prima di averne esposte le regole: 2.° fa d' uopo premettere all' Algebra queste operazioni sui numeri, perchè valgono di per se alla soluzione di molti problemi i più comuni ad occorrere

negli usi della vita, cosicchè inventate per prime in forza del bisogno, proseguono ad essere utili in moltissimi casi senza il soccorso delle operazioni algebriche, mentre queste all' opposto riescono inutili affatto senza il sussidio delle numeriche, in forza sol delle quali si realizzano in numeri gli ultimi risultati de' problemi algebrici, che unicamente per questa applicazione han valore.

Gli Autori poi, che fanno precedere l' Algebra da un pingue trattato di numerica, illudere si lasciano dalla supposizione, che varie teorie sulla quantità, unicamente perchè applicate ai numeri senza far uso di segni algebrici, sien del dominio dell' Aritmetica. Ed anche questo è un' errore. Le teorie estensive a qualunque numero, sien pur date senza profittar del vantaggio, che si ritrae dal laconismo de' segni algebrici, algebrica avran sempre l' indole, e quindi fuor del lor nicchio saranno, se trattate separatamente dall' Algebra. L' Algebra non considerando nè quantitativo, nè specie abbraccia ogni maniera di grandezze, ed *indica* quali operazioni debbansi eseguire in tutti i casi particolari possibili compresi nella generalità delle sue speculazioni, sicchè può riguardarsi, come la *Logica*, o *Teorica della quantità*; mentre l' Aritmetica dirigendo le sue operazioni alla composizione, o decomposizione de' numeri a tenore delle indicazioni dell' Algebra, ne è la *parte prattica*. Da ciò deriva, che ogni proposizione sulla quantità, ha sempre il carattere dell' universalità, ed è di pertinenza dell' Algebra, finchè può esser espressa coi *segni lettere*. E poichè ne' calcoli allora solo siamo necessitati ad abbandonarle, e ricorrere ai numeri, quando giunti ai così detti ultimi risultati algebrici, passiamo ad applicarli ai casi particolari: dun-

que allora solo entriamo nel campo della numerica: ma in questo caso, per quanto complicate sieno le formole, che applichiamo ai casi pratici, pure altro non esigono mai fuori dell' addizione, sottrazione, moltiplicazione, e divisione degli interi: dunque sono queste sole le operazioni, che non possiamo a meno di eseguire che sui numeri: esse sole son dunque comprese nella pura aritmetica.

Dall' Aritmettica vanno dunque tolti tutti i trattati delle frazioni, potenze, radici, proporzioni, progressioni, come di non sua competenza, altro essi non essendo, che una mera applicazione delle regole algebriche ai casi particolari, che solo esiger possono qualche lieve avvertenza per riguardo alla decadica istituzione. Così si procurano due sommi vantaggi *brevità*, e *chiarezza*: *brevità*, perchè la teoria, che è precisamente la stessa tanto pelle quantita algebriche, che numeriche in vece di due volte, esposta viene una sola, e coi soccorsi dell' algebra, che col laconismo de' suoi letterali ragionamenti supplisce ai lunghi periodi, che sarebbero indispensabili in molti dettagli relativi alle frazioni, proporzioni, ec., se queste trattate fossero separatamente in aritmetica, come da molti si prattica: *chiarezza* derivante dal felice innesto della *dimostrazione algebrica all' osservazione aritmetica*, perchè questa fissa le idee col particolarizzare quelle più generali dell' algebra, e rende più facile allo spirito poco iniziato nel rigor delle matematiche l' apprendimento de' raziocinii algebrici più astratti, mentre la dimostrazione algebrica, che le è annessa lo convince, che la proprietà antecedentemente osservata nel caso particolare numerico si verifica in tutti i simili casi possibili, e

lo rende avvertito della sua superiorità sulle limitate forze dell' aritmetica osservazione.

Dal che facilmente rilevar potrà ognuno, che anche noi rispettiamo i diritti del calcolo letterale, che perciò ristringiamo in assai angusti confini il campo della pura aritmetica, ma non pretendiamo poi d' annullarla. Che anzi più ligii al vero, che all' esempio stimiamo non solo necessario anteporla all' algebra; ma di più utilissimo il premettere nello stesso corso di questa degli esempii numerici alle algebriche dimostrazioni. E a tal pensamento non ne induce già il credere, che dall' accumulamento de' casi particolari, certezza acquisti la teoria generale; poichè e chi non sa, che ciò solo verificasi nelle scienze sperimentali, in quelle proposizioni cioè, che Kant chiama empiriche, la cui universalità, come egli ben dice, *è un aumento spontaneo di prezzo da quello del più delle volte, a quanto vale per tutte*, in cui cioè non v' è certezza assoluta, ma sol d' induzione, come nella massima « *Tutti i corpi son gravi*; mentre all' opposto sta racchiusa nella dimostrazione algebrica la verità di quanti mai sono i suoi casi particolari? Se dunque alcuni di questi noi opiniamo, che debban precederla, ciò è in grazia solo della costante osservazione, che una verità anticipatamente osservata in concreto dispone lo spirito a più facilmente concepirla in astratto. Che di un dito sia maggiore la mano ella è verità, che un rozzo intelletto afferra appena l' ascolti: non così l' altra = *Totum plus parte* = sebben assioma.

Quindi è che se l' insegnamento degli elementi è diretto a dirozzare gl' ingegni, fa d' uopo in questi non supporre formato, come nella matematica superiore, ma formare per mezzo d' un graduato passaggio dal

concreto all' astratto occhio, e criterio algebrico negli Alunni. Che se sin dalle prime lezioni tu gli sospingi ad un tratto, e gli isoli nel vasto pelago non mai solcato delle astrazioni, se gli obblighi a calcolare sui *b*, *c*, *d*, ec., senza far prima conoscere l' origine, ed il bisogno di questi segni, e senza mai annetter loro nulla di particolare o concreto, da pochissimi, e freddamente tu vedrai in mezzo a molti coltivata la scienza; e la vedrai con disprezzo abbandonata da tutti gli altri, come un gergo inintelligibile, e vano.

Ne a giustificazione dei corsi, che prendon mossa dall' algebra valga il dir con taluni, che ciò si prattica appunto per procedere analiticamente dal semplice al composto. Sarebbe questo un gettar polve sugli occhi, ma però de' soli miopi all' eccesso: poichè anche il più gretto studente di logica sa distinguere le idee semplici per astrazione dalle altre, e ben conosce, che l'Analitico non muove certamente da quelle, che sono un parto elaborato della facoltà intellettiva, su cui con tanto maggior difficoltà la ragione istituisce rapporti, che sulle idee d' abitudine.

Coerenti perciò a queste massime noi diam principio da un breve trattato d' aritmetica, che solo comprende le nozioni preliminari, il sistema di numerazione parlata e scritta, le operazioni sui numeri interi, e quindi i loro criteri, o prove; parendoci queste sole le materie alla pura aritmetica appartenenti. E mostrando poi come il bisogno ha spinto gli uomini a fare da essa all' algebra passaggio, seguon di questa i prolegomeni, indi le 4 operazioni sulle quantità intere algebriche, poi la teoria delle frazioni sì algebriche, che numeriche, e per rapporto a queste, al trattato delle frazioni ordinarie tien dietro quello delle decimali, quindi

le operazioni sui numeri complessi, che derivano dalle prime, e una dettagliata esposizione del sistema metrico, che si appoggia alle seconde. Persuasi poi, che tanto più affetto si prende alle scienze, quanto più presto se ne gustano i vantaggi, abbiamo tosto fatto passaggio alla teoria delle equazioni di 1.° grado ad una, e più incognite accompagnata dalla soluzione de' problemi rispettivi, onde interrompere così l'aridità delle regole che stancano, colla amenità delle loro applicazioni. Il trattato delle potenze, e de' radicali è poi immediatamente seguito dalla risoluzione generale delle equazioni di 2.° grado, e analoghi quesiti; e danno termine al corso le teorie delle proporzioni, e progressioni coi Problemi, che ne dipendono, tra i quali le regole del tre semplici, e composte, dirette, e inverse, di falsa posizione, di società, di cambio, d' interesse, di sconto.

In questo corso gli *Studenti* troveranno al fine degli articoli i più interessanti un succinto quadro, o epilogo delle materie trattate, onde ne resti sommamente agevolata la ritentiva: ed i *Maestri*, cui piacesse farne uso per testo delle loro lezioni, se non troveranno da spaziare moltissimo nel campo della teoria, perchè non si sono trascurati que' sviluppi interessanti, che il più delle volte l' allievo perde, quando sono affidati alla sola voce dell' istruttore, avranno ben molto a poter diffondersi nelle applicazioni, avendo e per questo riflesso, e per l' esercizio de' giovani risparmiate le soluzioni di molti quesiti, di cui abbiam solo tracciato enunciazione, e risultato. E nella scelta de' problemi, di cui larga suppellettile si è somministrata, si è anto in mira, che essi al doppio scopo corrispondessero e di servir di applicazione alle regole, e di offerirci ad un tempo notizie per loro medesime interessanti e il com-

mercio, e l' agrimensura, e la fisica cc. Non si è espressa verità, che non siasi auto cura di dimostrarla; nè giammai l'ambizione di dare dimostrazioni peregrine ci ha fatto abbandonare le più dirette, facili, e brevi, che già si conoscono. Nuovo talvolta sarà al più l'aspetto, sotto cui verranno presentate, avendo posto ogni studio per isciegliere quello, che ci è sembrato il più facile all' intelligenza de' giovani, a favorire la quale si è creduto bene di aggiungere in alcune circostanze de' sviluppi analitici diretti a far sentire la necessità delle verità astratte, che si vanno di grado in grado communicando, onde si veggano nascere quasi naturalmente dal bisogno medesimo, e quindi meglio si possa penetrare nella ragione de' metodi, e nello spirito della scienza, che non può gustarsi altrimenti. Siamo infatti convinti, che l' avversione, che da molti si concepisce allo studio delle Matematiche derivi dal troppo arido sistema di elementare insegnamento, e ben paghi saremmo, se le nostre dilucidazioni circa la parte ideologica della scienza, nella quale specialmente il nostro corso differirà dagli altri, corrispondessero almeno in parte al fine propostoci nella compilazione del medesimo, di renderc cioè più accessibile anche ai mediocri ingegni la scienza utilissima dell' evidenza, e dell' esattezza.



CAPO I.

Nozioni preliminari .

1. Quando ci facciamo a meditare e sui sensibili oggetti, che ne circondano, e sulle pure, e metafisiche nozioni di nostra mente, nelle tante, e si disparate lor proprietà, che al pensiero si offrono, forza, peso, distanze, superficie, volumi, moto, tempo, velocità, ec., troviamo una condizioue a tutte comune, la suscettibilità cioè di crescere, e diminuire. Or se tal condizione si astragga da tutti gli enti, reali, o mentali, che sieno; e se di questa isolata idea ci occupiamo, annettendovi il giudizio, che dessa compete a tutti gli esseri, e a tutte le loro modificazioni, noi ci formiamo così la generalissima nozione di *quantità*, per la quale intendesi *Tutto ciò che è suscettibile di aumento, e diminuzione*.

La quantità è dunque un elemento universalissimo che compete a tutte le cose, è la valutazione della loro esistenza, e null' altro, e perciò è la sola idea astratta, come ben si esprime Tracy, che non ha per proprio elemento, che se medesima; e questa nuda proprietà, che sembrerebbe sì sterile ne' suoi risultati, ha dato origine ad una scienza immensa ne' suoi sviluppamenti, la scienza di cui dobbiamo occuparci.

2. Un oggetto qualunque se per farsi eguale ad un altro ha d'uopo di notabile aumento dicesi *piccolo*: se ha d' uopo di notabile diminuzione, chiamasi *grande*. Piccolo, e grande sono dunque due idee, che non si hanno senza un confronto, cosicchè in natura non esiste nè grandezza nè piccolezza *assoluta*, ma sol *rela-*

tiva. Un mappamondo è assai grande riguardo ad un' atomo di polvere, che vi cada sopra: ma esso stesso diventa piccolissimo relativamente al volume del globo terracqueo, che rappresenta: e questo globo medesimo sì grande in confronto del suo rappresentante, è un' atomo anch' esso, se si riferisca alle dimensioni dello spazio.

3. Se le idee del grande, e del piccolo nascono da un confronto, e variano negli stessi oggetti col variar delle cose, a cui si paragonano, farà d' uopo, onde fissar queste idee, stabilire per ogni specie di oggetti un termine di confronto, una certa quantità fissa invariabile, cui riferire tutte le altre della specie stessa; e sebben può questa esser presa ad arbitrio, giova che sia un elemento de' più cogniti per abitudine (seppur forti motivi non ci inducano a stabilirne uno nuovo) onde più facilmente concepire il valore delle cose, che ad esso paragoniamo. *E questa quantità, che in ogni specie di grandezza si sceglie a tipo, o modello, onde osservar quante volte esattamente è contenuta in altre maggiori per valutarle, chiamasi unità di misura, di confronto*, o semplicemente *unità*. L' osservare quante volte una quantità è esattamente contenuta in un altra dicesi *misurare*; ed ecco perchè l' unità è stata anche chiamata *misura*. Ed è questa operazione sì essenziale per formarci una precisa nozione delle quantità, ossia per la loro valutazione, che l' idea delle quantità *valutate*, *determinate* in altro non consiste, che nel risultato di tale operazione, nel puro rapporto di contenenza, nel quante volte le date grandezze contengono l' unità.

4. Nell' applicazione delle misure alle quantità possono accadere diversi casi. Scelta p. e. la tesa per uni-

tà di misura lineare, vogliasi con essa misurare la lunghezza d' una tavola.

I.° Può darsi, che in essa la tesa sia contenuta due tre, quattro, ec. volte esattamente, in modo cioè, che nell' ultima applicazione l' estremità della misura, e della tavola combacino perfettamente. In tal caso la lunghezza della tavola, che in forza della misurazione si scuopre essere uguale all' unita ripetuta due, tre, ec. volte dicesi *numero intero*, e può riguardarsi sotto due aspetti, e come un' assieme di due, tre, molte unità, e come un sol tutto due, tre, molte volte esattamente maggiore, ossia duplo, triplo, multiplo dell' unità. *I numeri interi sono dunque complessi di unità, o multipli dell' unità*.

5. II.° Può accadere, che la tesa non già, ma solo una qualche sua parte sia contenuta esattamente nella tavola o perchè più piccola della misura, o perchè maggiore, ma tale che dopo averla contenuta più volte, p. e. due, ci offra un tal' *avanzo* di lunghezza minore della misura, su cui essa non può perciò una terza volta applicarsi. In ambedue queste circostanze la tesa unità stabilita non fa a proposito, perchè dee l' unità esser contenuta esattamente nella quantità; affinchè questa si possa dir misurata. Se all' uopo la tesa intera non serve, proviamo se si ottenga l' intento colla sua metà, o *mezzo*; e se troviamo che dopo esser contenuta una, o più volte nella tavola, vi rimane un' avanzo della mezza tesa minore, conchiudiamo, che nemmen essa può servir di misura: divideremo allora la tesa in tre parti eguali, e proveremo se una di queste parti tre volte più piccole della tesa, e che chiamasi *terzo* sia ripetuto esattamente nella tavola: e se ancor esso lascia un' avanzo, che è necessariamente mi-

nore di un terzo, noi passeremo a dividere la tesa in quattro, cinque ec. parti eguali, finchè uno di questi *quarti, o quinti*, o parti più piccole ancora, nelle quali l'unità primitiva è divisa sia nella lunghezza della tavola esattamente contenuta, e possa perciò riguardarsi, come una vera unità di misura. Supponiamo nel nostro caso, che sia il quarto di tesa la parte contenuta esattamente, e per es. tre volte se è più breve, nove volte, se la tavola è della tesa più lunga. Nell'uno e nell' altro caso la lunghezza della tavola è valutata egualmente, poichè si vede esser essa non più l' unità tesa, ma l' unità *quarto di tesa* ripetuta tre volte nel primo, e nove volte nel secondo. Or questa nuova *unità secondaria*, che è tante volte esattamente più piccola dell' unità principale, che è una *frazione* determinata di essa, dicesi perciò *unità frazionaria*, e quindi *numeri rotti o frazionarj le sue collezioni*. Così nel nostro caso il quarto di tesa con cui abbiam misurata la tavola è l' unità frazionaria: i tre quarti, o nove quarti, che ci esprimono la lunghezza della tavola misurata sono *numeri frazionarj*.

6. Dalle fatte osservazioni risulta dunque, che un *mezzo*, un *terzo*, un *quarto*, ec. sono tante diverse reali unità, come la principale, che chiamiamo *uno*; poichè sì questa, che quelle sono impiegate egualmente per misurare la quantità: la sola differenza, che passa fra l' unità espressa da *uno*, e l' unità espressa da *un mezzo*, *un terzo*, ec. è che la prima indica una quantità, che non dipende da verun' altra, mentre le altre unità hanno tutte una relazione colla principale, di cui esse non sono che una parte, o frazione determinata. Possiamo dunque distinguere le unità assolute dalle unità *secondarie*, *relative*, *frazionarie*, che so-

no un dato numero di volte esattamente più piccole dell' unità assoluta.

7. Così pure i numeri frazionarii, come gli interi non sono che *quantità misurate*. Sì gli uni che gli altri sono la ripetizione della rispettiva loro unità di misura, sono *pluralità, o multipli dell' unità*; e la lor differenza sta in ciò, che i primi sono multipli dell' unità *assoluta*, i secondi lo sono dell' unità *relativa*. Nei primi perciò non è a rimarcarsi, che un solo rapporto, il *quante volte* cioè l'unità è in essi contenuta: nei secondi oltre questo v' è a notarsi anche il rapporto dell' unità secondaria alla principale. Il *tre quarti* p. e. non solo ci mostra esser esso un complesso di tre unità; il che ci vien' anche indicato dall' intero *tre*; ma di più, che ciascuna delle unità in lui contenute è quattro volte più piccola dell' unità principale.

8. Mentre dunque il numero intero esprime l' immediato rapporto, che ha una quantità all' unità principale, il numero frazionario esprimendo il rapporto, che ha una quantità all' unità frazionaria, e al tempo stesso quello, che l' unità frazionaria ha colla principale, a questa viene mediatamente a riferirsi ancor esso; e quindi possiamo genericamente concludere, che *Numero, intero o rotto, che sia, è una quantità che ha un immediato, o mediato rapporto coll'unità di misura.*

9. L'idea dell' unità assoluta, e numeri interi sempre è possibile, perchè non ripugna immaginar multipli d' una quantità qualunque ella sia. Non così però dir possiamo dell' unità, e numeri frazionarii, che allora solo possono aver luogo, quando l' unità di misura sia realmente divisibile in parti, come lo è in quasi tutte le quantità, che sono il soggetto della matematica, cosicchè possan queste riguardarsi, come unità se-

condarie; ma sono impossibili allorquando per unità venga stabilita una cosa, in cui realmente nè si distinguano, nè esistano parti, una cosa, che sia semplice, che sia cioè l' unità presa nello stretto senso metafisico, giacchè son certamente assurde le frazioni di cose, che noi supponiamo di parti destituite.

10. III.° Finalmente nell' applicazione della tesa alla tavola può darsi che nè la tesa, nè alcuna sua più piccola parte vi sia esattamente contenuta; ed in tal caso, che non è dei comuni, ma che in seguito dimostreremo potersi dare, non può precisarsi per lo appunto il rapporto, che passa tra la lunghezza della tavola, e la tesa o qualche sua anche più menoma parte, non può cioè esprimersi in numeri nè interi, nè frazionarii il preciso valore della detta lunghezza, la quale per non esser misurabile nè colla tesa, nè con alcuna sua parte, dicesi colla *tesa incommensurabile*. Le quantità incommensurabili se non esattamente sono però approssimativamente esprimibili in numeri, perchè distinguendo in esse la parte misurata, e perciò espressa da un numero, dalla non misurabile, sta in nostro arbitrio di render questa coll' impicciolimento della misura sempre più piccola, ed evanescente, sicchè sia trascurabile in confronto dell' altra porzion numerata. Così se la tavola non è *esattamente* misurata nè dalla tesa, nè dal piede, che è il di lei sesto, nè dal pollice, che è il dodicesimo del piede, nè dalla linea, che è il dodicesimo del pollice, nè dal punto, che è il dodicesimo della linea, è però *approssimativamente* misurata da essi, e tanto più dal punto, che dalla linea, che dal pollice, ec., perchè l' avanzo non misurabile della tavola dee esser minore del punto quando è misurata da esso.

11. Tre casi possono dunque darsi nell' applicazione delle misure alle quantità. 1.° O la misura vi è contenuta esattamente, e ci offre le idee dell' *unità*, e dei *numeri interi*: 2.° O vi è contenuta esattamente non la misura, ma una determinata sua parte, e da qui hanno origine le *unità*, e i *numeri frazionarj*: 3.° o non v' è contenuta esattamente nè l' unità, nè alcuna sua parte: ed ecco le *quantità incommensurabili*.

12. Or dall' istante, in cui nelle diverse specie di quantità si è stabilita l' unità primitiva, e quindi i successivi suoi multipli, o numeri interi, e poscia le unità, e i numeri frazionarii, e i rispettivi loro nomi, con cui valutare, e indicare i differenti gradi di quantità, noi possiamo per mezzo di particolari operazioni comporre, e decomporre, aumentare cioè e diminuire i numeri, ossia *calcolare*, ed ottener *risultati*, poichè *calcolo è l' esecuzione di qualunque operazione, che modifichi la quantità*; e *risultato è tutto ciò che si ottiene al termine di un calcolo qualunque*, possiamo cioè con questi materiali costruire l' edificio dell' *Aritmetica*, il cui nome deriva dal greco *Aritmos* numero, della *scienza cioè, che insegna, e dimostra le regole, mediante le quali si compongono, e decompongono i numeri*.

13. In queste operazioni non solo occorrono numeri esprimenti gli oggetti, che nel calcolo sono presi di mira, ma anche numeri indicanti le modificazioni, che possano o debbano i primi subire, d' esser p. c. aggiunti, o tolti *una*, *due*, *dieci volte*. Quindi è che la principal distinzione non da altri marcata, e che ne sembra importantissima a farsi sui numeri è di quelli *indicanti gli oggetti*, e di quelli *indicanti le operazioni*.

14. I numeri *indicanti gli oggetti* si dicono *astratti*, quando l' oggetto, che la loro unità esprime non è determinato, come *cinque*. Si dicono *concreti*, quando determinato è l' oggetto espresso dalla loro unità, come cinque ore. I numeri concreti son poi *omogenei*, se le loro unità esprimono una stessa specie di oggetti, come *due* cavalli, *tre* cavalli: sono *eterogenei* se esprimono oggetti diversi, come due pollici, tre lire. Talvolta però queste diverse specie hanno tal relazione tra loro, che mostra esser le une parti dell' unità delle altre, come *minuti*, *ore*, *giorni*; ed allora i numeri eterogenei, che esprimono queste specie diverse sì ma tra lor dipendenti, chiamansi *complessi*, *o di diversa specie relativa*.

15. I numeri *indicanti operazioni*, come *tre volte*, *cinque volte*, ec. non ammettono il menomo cambiamento nella idea, che essi esprimono, o si tratti di casi concreti, o astratti, ec., perchè le operazioni da essi indicate sono sempre le stesse, qualunque sieno gli oggetti, cui si riferiscano i numeri, che deggiono subirla. Essi sono *essenzialmente non concreti*; e quasi che astratto fosse tutto ciò che non è concreto, sono dagli Aritmetici riguardati per astratti; impropriamente però, perchè astratto significa non cosa *opposta*, ma sol cosa *tolta* al concreto; e può perciò solo competere ai numeri indicanti gli oggetti, quando si separano dagli oggetti stessi, e non ai numeri, la cui unica proprietà è di esprimere non oggetti, ma operazioni eseguibili sulla lor quantità.

16. I risultati di tutti i calcoli, che far si possono sui numeri sono numeri anch' essi, che vanno a riferirsi tutti all' uno da cui emanano, e non consi-

stono, che nel rapporto, che hanno con questa unità, qualunque sia il suo valore. Non essendo perciò legati in conto alcuno alla natura di quest' unità, sono sempre veri egualmente, qualunque sia la specie delle cose, cui i numeri sono applicati. Che tre, e due faccian cinque è sempre vero, o si parli di libre, o di scudi, o di ore, ec. Nel calcolo perchè le speculazioni sien giuste non è dunque necessario il sapere di quali idee si tratti: anzi poichè giova nei nostri giudizii eliminare tutte le idee estranee, e isolar quelle, su cui denno istituirsi i rapporti, così non avendo la specie delle cose influenza alcuna sui risultati dei calcoli, che si fanno sul loro numero, gioverà disimbarazzarcene; e quindi astrarre la nozione *uno* dà qualsiasi ente, e riguardarla come una certa quantità di quantità qualunque; e conseguentemente allora tutti i numeri derivanti dalla ripetizione di quest' uno, che esprime l' unità astratta divengono astratti anch' essi.

17. Tutte le speculazioni, che allor si fanno su i numeri non hanno esistenza, che in nostra mente, son tutte astratte: si applicano però tosto al concreto, quando venga l' *uno* riferito ad una cosa speciale, che la circostanza ci offra; e dall' istante in cui vien determinato il valore dell' unità, vien precisato anche il valore di tutti i numeri, che da essa dipendono, e quindi de' risultati tutti del calcolo, che abbiamo in astrato ottenuto. L' unica condizione essenziale a costantemente verificarsi nelle applicazioni dell' astratto al concreto è, che i differenti gradi delle quantità particolari espresse dai differenti nomi de' numeri, risultino realmente dalla ripetizione proseguita della stessa costante quantità, che si è stabilita per unità, e di più per rapporto ai numeri frazionarii, che la loro unità sia esat-

tamente le tante volte più piccola dell' unità principale, cui è riferita, cioè due volte se un mezzo, tre volte se un terzo, ec.

Quindi è che quando si è chiamato *uno* un dato oggetto determinato, quest' *uno* non può esser più combinato, che con quantità ad esso egualissime. Così possiam ben dire: *uno scudo più uno scudo*, ma non già uno scudo più una lira *è uguale a due*; poichè nel 2.° caso non abbiamo nè due scudi, nè due lire; e ben dir si potrebbe, che uno scudo più una lira sono eguali a due monete; ma in tal caso l' unità non è più riferita nè a scudo, nè a lira, ma all' idea generale moneta; ed è su questa, che si fa il calcolo, e non sovra due monete di diversa specie. E' dunque indispensabile, che i numeri concreti siano il complesso di unità tutte eguali. Se queste fossero d' un intrinseco valore diverso, le loro combinazioni, e decomposizioni ci recherebbero a risultati, e deduzioni erronee da non poter costituire una scienza. Su questa condizione tutta riposa la Numerica non solo, ma tutta quanta è la scienza della quantità; ed una conseguenza interessante, che trarre possiamo da tale osservazione è, che le combinazioni costituenti il calcolo non sono applicabili a qualunque categorìa di esseri, e idee, ma a quelle di tal natura soltanto da permettere, che da esse si separi una quantità determinata, che serva di unità, a cui paragonar si possano o come suoi multipli, o come frazioni i gradi di aumento, o diminuzione, che nei dati oggetti hanno luogo. Or vi sono delle quantità, p. e. peso, estensione, in cui segregar possiamo una data porzione, onde considerarla come unità: ma ve ne sono delle altre, come le nostre sensazioni, affetti passioni, utilità, e danno delle azioni morali, ec., che

sebbene suscettibili d'aumento, e diminuzione, nol sono in modo, che idear si possa da esse staccata una quantità servibile per misura, e perciò esser non possono il soggetto della Matematica, la quale non è applicabile alle scienze tutte appunto, perchè non è la scienza della quantità in genere, ma solo della quantità misurabile.

EPILOGO

Quantita §. (1) - Grandezza, e piccolezza sono idee relative (2) Per ben valutarle fa d'uopo ricorrere alla misura (3), da cui hanno origine I. le unità assolute, e i numeri interi (4); II. le unità, e i numeri frazionarii, che sono assurdi nel caso dell'unità metafisica (5); III. le quantità incommensurabili (10) -- Calcolo, risultato, Aritmetica (12) - Numeri indicanti gli oggetti, e le operazioni (13) I primi sono astratti o concreti, e questi omogenei o o eterogenei (14); i secondi sono essenzialmente non con creti (15) -- Giova calcolare sui numeri astratti (16); ed affinchè i risultati possano applicarsi al concreto, è condizione essenziale, che gli oggetti sien misurabili, onde non a tutte le quantità, e scienze è applicabile il calcolo (17).



CAPO II.

Sistema di Numerazione.

18. La più naturale formazione dei numeri è quella, che nasce dalla ripetuta addizione dell'unità a se medesima; e perciò la serie de' numeri, che così successivamente si formano chiamasi *serie de' numeri naturali*. Questa non ha limite alcuno, non v'è cioè in lei una pluralità, che sia l'ultima tra le possibili, poichè per quanto grande essa sia, ci è sempre lecito

immaginarla seguita da quant' altre mai piaccia successive unità.

Or se dal bel principio ci facciamo a comporre questa serie; il suo primo termine è l' unità, che dicesi *uno*: aggiungendo a questa un' altra unità, risulta *uno più uno*, aggiungendovene un' altra ancora, si avrà *uno più uno, più uno*, ec. ma così proseguendo, e senza l' invenzione d' un nome per ciascuna delle successive collezioni di unità, che veniamo formando, ben presto ci si renderebbe impossibile il distinguerle, e paragonarle. Perciò per esprimere il numero nato dall' unione di *uno più uno* si è convenuto stabilire il nome *due*; il nome *tre* per esprimere *due più uno*, ec.; e l' unione di questi nomi costituisce la ***numerazione*** *parlata*.

19. Ma se nell' espressione de' numeri progressivi, onde togliere l' inconveniente della successiva ripetizione del solo nome *uno*, il che reca una confusione nelle idee ancora delle più semplici collezioni di unità, si sono inventati i *nomi* de' numeri; questo stesso rimedio diverrebbe fatale, se un nuovo nome affatto indipendente dagli altri assegnar si dovesse a ciascun termine successivo della serie indefinita de' numeri naturali, giacchè quand' anche limitar ci volessimo a que' soli, che negli usi prattici occorrono, tale è la moltitudine de' numeri, su cui conviene operare nelle circostanze ancor le più ovvie, che alla vista di tante denominazioni diverse sbigottirebbe il più intrepido calcolatore, ne memoria la più felice atta sarìa a ritenerle.

E' dunque impossibile esprimere tutti i numeri successivi, di cui l' uso occorra con nomi indipendenti gli uni dagli altri, e si rende perciò indispensabile *una convenzione di compenso, che fondata sovra semplici*,

e giusti principii ci ponga in grado di poter colla combinazione di pochissimi nomi esprimere qualsivoglia collezione di unità: e quest' artificio, qualunque egli sia, è ciò, che chiamasi *sistema di numerazione parlata.*

20. Per tale oggetto da tutte le nazioni antiche, e moderne si è fatto ricorso alle unità collettizie; ed ecco il preciso ragionato dettaglio della nomenclatura de' numeri ora presso quasi tutti i popoli in uso.

Dopo di aver espresso i numeri progressivi da uno al nove con i diversi nomi a tutti noti, si è stabilito di riguardare il numero seguente nove più uno, che si è chiamato *dieci*, non più come un complesso di dieci unità separate, ma come un sol tutto dieci volte maggiore, o *decuplo* dell' unità primitiva, come in somma un' unità di second' ordine detta *Decina*, che in se racchiude il valor collettivo di dieci unità del prim'ordine; e di queste decine, o unità di second' ordine se ne sono fissate nove, siccome tante sono le unità del primo; cioè una decina o *dieci*; due decine, o *venti*; tre decine, o *trenta*; ... nove decine, o *novanta* (a).

Con tal ripiego non fa più d' uopo d' una nuova parola per ciascun nuovo termine della serie de' numeri naturali, che vogliasi esprimere dopo le dieci unità, come si è pratticato sino a dieci.

Per esprimere infatti il numero seguente dieci più uno, senza inventar un nuovo nome dir possiamo *dieci uno*

(a) A rendere uniforme la nomenclatura delle decine, per analogia di desinenza converrebbe sostituire, come Condorcet propose alle voci *dieci*, e *venti* le altre *unanta*, *duanta*.

(undici) ; poi viene il dieci più due, che si nomina *diecidue* (dodici), poi il *diecitrè* (tredici) . . . . sino al *diecinove*. Aggiungendo ad esso un' altra unità, abbiamo dieci più dieci, ossia due decine, che si son chiamate *venti*; onde vedesi, che per passare da una decina all' altra noi esprimiamo nove successivi complessi di unità senza inventar nuovi nomi col solo ripetere dopo le decine ottenute i nomi delle nove unità, che debbono accumularsi per formar coll' aggiunta d' un' altra unità la nuova decina; e così coll' aggiunta de' soli nove nomi esprimenti una, due . . . nove decine contar possiamo sino a novantanove unità.

Giunti a tal numero, che esprime la collezione di nove decine, e nove unità, vediamo, che un' altra unità ci porta a dieci decine; ed in tal caso come dieci unità fanno un' unità di second' ordine detta decina, così pure si è stabilito, che dieci decine formino un' unità di terz' ordine detta centinajo, o *cento*; ed anche di queste unità di terz' ordine se ne fissano nove, che distingnonsi, senza inventarne de' nuovi, coi nomi delle unità semplici aggiunti a cento, dicendo *cento*, *duecento*, ... *novecento*; cosicchè l' introduzione di questa sola parola *cento* basta per poter proseguire la serie de' numeri naturali dal *novantanove* al *novecentonovantanove*; ed ecco nove cento termini espressi per mezzo dell' invenzione del solo nome *cento*.

Un' unità aggiunta al *novecento novantanove* ci porta a dieci centinaja, le quali denno anch' esse per analogìa formare un' unità di quart' ordine detta migliajo o *mille*; ed anche di queste se ne contano nove, cioè *mille*, *due mila* . . . . *nove mila*. Dieci di queste migliaja costituiscono un' altra unità di quint' ordine detta decina di migliaja, e le nove unità di questo quint'

ordine sono espresse da *diecimila*, *ventimila*, ec. Dieci decine di migliaja costituiscono l' unità di sest' ordine detta centinajo di migliajo, e le nove unità di questo sest' ordine si chiamano *cento mila*, *due cento mila* ec.; cosicchè l' introduzione della sola parola mille, o mila ci basta per poter proseguire la serie de' numeri naturali dal *novecento novanta nove* sino al *novecento novantanove mila novecento novanta nove*; ed ecco nove cento novanta nove mila numeri diversi espressi col sussidio della sola voce *mila*.

Dieci centinaja di migliaja fanno l' unità di settimo ordine detta *Milione*; e coll' aggiunta di questa sola parola noi proseguiamo ad innoltrarci tant' oltre nella serie de' numeri naturali, cioè tanti nuovi successivi termini esprimiamo, quante sono le unità contate sino al milione, e ripetute non già una volta, ma novecento novantanove mila novecento novanta nove volte, tanti essendo appunto i milioni, che possiamo ripetere, formata che abbiamo di questi una classe, in cui si distinguono altri sei ulteriori ordini di unità dello stesso nome di quelli, che addottati abbiamo per giungere al Milione, cioè unità, decine, centinaja, unità, decine centinaja di migliaja, colla sola differenza, che mentre questi altri sei ordini di unità si riferiscono alla classe de' Milioni, i primi sei ordini appartengono alla classe detta delle pure unità.

Proseguendo la stessa analogìa come dieci centinaja di migliaja d' unità assolute formano un Milione, dieci centinaja di migliaja di milioni, ossia un Milione di Milioni formano un' altra unità d' un grado superiore, che si è chiamata *Bilione*; ond' è che il Bilione risulta di tanti Milioni, quante son le unità, che il Mi-

siero per mezzo delle immaginate ripetizioni, da cui hanno origine le unità collettizie, passa a formarsi l'idea di numeri più forti. Perciò si procurò, che questi punti, o linee, idee sensibili, che sempre abbiamo presenti, quando ragionar vogliamo su i numeri astratti, e che riguardar possiamo come i segni naturali, ed inseparabili di essi, che per se nulla ci offrono di sensibile, potessero essere richiamate al pensiero più direttamente, e brevemente di quello, che non fa la parola scritta; e a tale oggetto da quasi tutte le, Nazioni si immaginarono de' simboli concisi detti cifre che si associarono immediatamente a queste idee de' numeri, e non ai diversi suoni componenti le parole, che gli esprimono, come sono le sillabe de' nomi scritti. Si pensò in somma di figurare una lingua detta dagli Ideologi *dipinta*, piuttosto che servirsi della scrittura vera per indicare i numeri in un modo più breve, e diretto degli stessi lor nomi; e così oltre questi, che sono i segni delle idee comuni a tutte le scienze, si arricchì l'Aritmetica d'un nuovo genere di caratteri i *segni cifre* tanto più utile de' *segni nomi*; mentre questi sono caratteri associati ai varii suoni articolati, che antecedentemente abbiamo annessi alle idee de' numeri, quelli sono caratteri associati non ai suoni de' nomi, ma direttamente alle idee stesse sensibili, su cui opera la mente, quando ragiona sopra numeri astratti.

22. Come però pella *nomenclatura* de' numeri fu d'uopo ricorrere ad un sistema, che l'invenzione limitasse de' nuovi nomi, e che fu detto di *numerazione parlata*; così per gli stessi motivi anche nella *scrittura* de' numeri fu d'uopo d'un' artificio per poter colla combinazione di poche cifre esprimere qualunque

collezione di unità; fu d' uopo cioè d' un *sistema di numerazione scritta*.

23. Se le antiche Nazioni rapporto al primo si trovarono d' accordo, non così rapporto al secondo. Fra i diversi sistemi di numerazione scritta, che furono in uso, quello de' Cinesi, e Indiani detto arabo, perchè dagli Arabi recato in Europa, allorchè si trasferirono nelle Spagne, è il più filosofico, ed utile. Esso non ha che sole dieci cifre, cioè

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, nove, zero. Le prime nove indicano l' unità, e i suoi successivi complessi sino al nove inclusivo, e diconsi *significative*. Insignificativa è l' ultima cifra *zero*, perchè nulla vale, se sola; ma unita ad altre serve, come vedremo a precisarne il valore.

Dalla forma originaria data dagli Indiani Orientali a queste cifre traggiam motivo di credere, che essi per rendere più intima, e permanente l' immediata associazione delle cifre alle idee de' numeri, ne ideassero felicemente la grafica costruzione in guisa, che ognuna risultasse dalla collezione di tante lineette, quante unità fossero nel numero rispettivamente rappresentato. Queste cifre eran dunque la pittura fedele delle idee, rappresentavano sensibilmente quell' unione di unità, che ora coll' aver presa una forma più elegante, e comoda a tracciarsi, ma non più rappresentativa, non isvegliano, che per convenzione.

24. Filosofica fu dunque la grafica organizzazione delle cifre; ma più ancor filosofica fu la semplice organizzazione del sistema per di cui mezzo col maneggio di dieci cifre soltanto esprimere si seppe qualunque numero, mettendo in esecuzione il felicissimo progetto

di applicare alle cifre stesse valori diversi in grazia della sola diversa posizione nello spazio delle une rispetto alle altre, e facendo dipendere la conoscenza di questi valori moltiplici da una semplicissima, ed unica convenzione fondamentale, *che una stessa cifra esprima delle unità collettizie di dieci in dieci volte più grandi, ossia esprima numeri decupli per ogni posto, che essa avanzi da destra a sinistra.*

25. Nella grafica costruzione delle cifre de' primi numeri anche i Romani ebbero in mira, che rappresentassero sensibilmente l' unione delle unità, di cui risultano i numeri per esse indicati; e gli Ebrei, e Greci, che si servirono delle lettere per cifre, trovarono anch' essi tra il segno, e l' idea, tra le *lettere cifre*, e i primi numeri da esse rappresentati un qualche vincolo d' associazione nel *posto*, che le lettere hanno ne' loro alfabeti, essendo facile il rammentare, che il tre venga espresso da quella lettera, che sta nel terzo posto, il cinque da quella, che sta nel quinto cc. Ma e Romani, e Greci, ed Ebrei non furono per nulla felici nella espressione delle unità collettizie, ad indicar le quali si servirono di altre lettere, che associazione alcuna aver non poteano coi numeri, ch' eran destinate a rappresentare, e nol furono per conseguenza nell' espressione de' numeri composti, pella quale si stabilirono delle regole, che resero complicate, e difficili le numeriche operazioni. Quindi i loro sistemi andarono in tal decadenza al propagarsi dell' Arabo, che questo preferibile agli altri tutti e pella pochezza delle sue cifre, e pella filosofica semplicità delle suè convenzioni, donde la facilità delle aritmetiche operazioni, è ora il sistema unico di tutti i popoli colti. Ed eccone l'esposizione.

26. Il maggior numero, che nella serie naturale giunger possiamo ad esprimere colle cifre arabe senza ricorrere a convenzioni è il nove. Il dieci è dunque il primo, che manchi d'un segno particolare, che il rappresenti. Siccome però esso è una nuova unità dieci volte maggiore di uno, potrà essere espressa dalla cifra 1, purchè si conosca, che abbia avanzato d'un posto verso sinistra, il che si ottiene col porre alla sua destra uno zero, scrivendo 10. Questo zero indica al tempo stesso e che mancano le unità di prim' ordine, le quali se vi fossero sarebbero nel suo posto, e che l'unità, che il precede è dieci volte maggiore di 1 in grazia della convenzione stabilita. I sussegnenti numeri sino a diecianove si esprimono col sostituire nel posto dello zero le cifre indicanti le successive unità radicali aggiunte al dieci, scrivendo 11, 12, 13,... 19.

27. Il numero seguente venti, ossia due decine indica due unità dieci volte maggiori delle due unità semplici espresse dal 2. Dunque il 2 in grazia della convenzione (24) può esprimerlo, purchè si avanzi di un posto a sinistra, il che ottiensi coll' aggiungergli uno zero a destra, scrivendo 20. E si rimarchi, che il 2 nel secondo posto a sinistra ha acquistato un valore decuplo di quello che avea, come la convenzione esige, che cioè 20 è un numero decuplo di 2; poichè se ciascuna delle due diecine formanti il venti contiene dieci volte la rispettiva delle due unità semplici, che compongono il 2, convien conchiudere, che tutto il venti contiene dieci volte il due, mentre non essendo il tutto se non che le parti riunite, convien del *tutto* asserire ciò, che di ciascuna sua parte si afferma.

Lo stesso ragionamento applicato alle successive decine ci mostra, che il trenta è espresso dal 3, il qua-

ranta dal 4 . . . . il novanta dal 9, purchè queste cifre, sieno scritte a sinistra delle unità radicali, e perciò questo secondo posto è detto *delle decine*, e con tal mezzo, cioè colla unione di due cifre noi giungiamo nella serie de' numeri naturali sino al 99.

28. Il seguente numero cento, unità collettizia di terz' ordine è decupla di 10: può dunque esser espressa dalla stessa cifra 1, che rappresenta il dieci, purchè dal secondo sia trasportata nel 3.° rango a sinistra, il che si ottiene coll' aggiunta di un' altro zero alla destra di 10, scrivendo 100; e con ragionamenti simili (27) veggiamo, che il duecento, il trecento . . . . il novecento sono espressi dal 2, 3 . . . . 9 collocati in questo terzo posto, che perciò dicesi *delle centinaja*.

Convien poi nella formazione de' 99 numeri successivi, che contansi fra centinajo, e centinajo sostituire le unità radicali, quando vi sono, allo zero, che è nel rango delle unità; e le decine, quando vi sono, allo zero, che è nel posto delle decine. Così cento nove si scrive 109. Trecento venti si scrive 320. Otto cento cinquanta sei, 856; e così colla union di 3 cifre giungiamo sino al 999.

29. E senza più oltre protrarre uno sviluppo, che progredisce colle medesime leggi enunciate, è chiaro che le cifre radicali esprimeranno le unità di migliaja nel 4.° posto a sinistra, le decine di migliaja nel 5.°, le centinaja di migliaja nel 6.°, le unità di milioni nel 7.°, ec. In tal guisa con un' andamento analogo alla numerazione parlata, ed in un modo regolare, e laconico si esprimono i numeri tutti possibili, verificandosi sempre, che il valore delle cifre componenti un numero qualunque diventa decuplo di posto in posto da destra a sinistra, e viceversa diviene dieci volte minore,

o *suddecuplo* di posto in posto, che retroceda da sinistra a destra.

30. Da questo principio base del sistema ne segue che non solo le unità del 2.° ordine sono decine del primo, ma le unità del 3.° ossia le centinaja sono decine del 2.°, ossia decine di decine; le unità del 4.°, o migliaja son decine del 3.°, ossia delle centinaja, ec., che in somma *le unità di qualunque posto equivalgono a* 10 *unità*, *ossia alle decine* del posto a destra e viceversa come p. e. 3 decine equivalgono a 30 unità, così 5 centinaja a 50 decine, 7 migliaja a 70 centinaja, ec.

31, Segue inoltre, che le unità di qualunque posto hanno un valore *dieci volte dieci*, ossia cento volte maggiore di quello, che avrebbero se fossero collocate di due posti più a destra; e cento volte più piccolo di quello che avrebbero, se fossero di due posti più a sinistra. Come p. e. 2 centinaja equivalgono a 200 unità, così 9 unità di migliaja a 900 decine, 4 decine di migliaja a 400 centinaja, ec.

32. Segue pure che le unità di qualunque posto hanno un valore *dieci volte cento*, ossia mille volte maggiore o minore di quello che avrebbero, se si trovassero di 3 posti innanzi, o indietro. Come p. e. 3 migliaja equivalgono a 3000 unità, così 6 decine di migliaja a 6000 decine, così un millione a 1000 migliaja, ec.

Così pure le unità di qualunque posto hanno un valore dieci mila, cento mila, ec. volte maggiore, o minore di quello, che avrebbero, se si trovassero di 4, o di 5, ec. posti innanzi, o indietro. Perciò un Milione p. e. equivale a 10 centinaja di migliaja, a 100 deci-

ne di migliaja, a mille unità di migliaja, a 10 mila centinaja, a 100 mila dec'ne.

33. Quindi ciascuna delle cifre componenti un numero, e perciò tutto il numero stesso acquista un valore 10, 100, 1000, ec. volte maggiore, se si fa retrocedere di 1, 2, 3, ec. posti coll' aggiunta di 1, 2, 3, ec zeri alla destra; ed acquista un valore 10, 100, 1000, ec volte più piccolo ognuna delle cifre, che rimangono, ed il numero da esse espresso, se alla lor destra si tolgano una, due, tre, ec. cifre.

34. Nell' esposto metodo di numerazione le cifre vanno osservate per rapporto e alla loro *figura*, e alla loro *collocazione*, d' onde nasce, che esse ci offrono due valori, l' *assoluto*, o radicale dipendente dalla lor figura medesima, e dall' esser prese isolate; ed il *relativo*, cioè quello che dipende dal posto, che esse occupano tra le altre, che costituiscono il numero. Così nel 222 p. e. abbiamo la stessa cifra 2 ripetuta 3 volte con 3 differenti valori, cioè di 2 unità semplici, di 2 decine, e di 2 centinaja.

35. Que' numeri, ad esprimere i quali serve il solo valore assoluto delle cifre, che son cioè espresse da una cifra sola, diconsi *semplici*. Quelli, per la cui espressione convien ricorrere al valore relativo delle cifre, quelli cioè, che sono indicati da più cifre si dicon *composti*.

Tutta la teoria del sistema di numerazione *parlata e scritta*, ha per iscopo la soluzione di questi due problemi.

I.

Tradurre in parole un numero dato in cifre; e all' opposto.

II.

Tradurre in cifre un numero dato in parole.

36. I.° Onde leggere una serie qualunque di cifre, basta enunciare i valori assegnati a ciascuna secondo il posto, che occupa. Tre sono le avvertenze utili ad ottenere l' intento.

1.° Dividere da destra andando a sinistra con virgole la data serie in tante classi di 6 cifre l' una, eccetto l' ultima, che può contenerne un numero qualunque minor di 6, e ciò ad oggetto di ben distinguere le cifre, che appartengono alla *prima classe* a destra detta delle *unità*, da quelle che formano la *seconda classe* detta de' *Milioni*, da quelle della *terza* detta de' *Bilioni*, ec.; e quindi a suddividere ciascuna classe per mezzo d' un punto in due membri ognun di 3 cifre, eccetto l'ultimo a sinistra, che può contenerne anche due, ed una sola, rammentando, che in ciascuna classe il primo membro a destra esprime unità, decine, e centinaja semplici, e il secondo unità decine, e centinaja di migliaja; e così a colpo d' occhio tutte e singole le cifre del dato numero trovansi riferite con distinzione e chiarezza ai rispettivi lor posti.

2.° Si leggono da sinistra andando a destra le cifre della più alta classe considerandola come se fosse unica, come se fosse la classe delle unità, e riserbando l'enunciazione del nome della classe al fine de' posti, che le appartengono.

3.° Si tacciono i nomi di tutti i posti, che sono occupati da zeri.

Se fosse a leggersi 5204329004503214; fatte le indicate divisioni, si avrà

5 .	2	0	4 ,	3	2	9 .	0	0	4 ,	5	0	3 .	2	1	4,
unità	centinaja	decine	unità	centinaja	decine	unità	centinaja	decine	unità	centinaja	decine	unità	centinaja	decine	unità
di migliaja	semplici			di migliaja			semplici			di migliaja			semplici		
Bilioni				Milioni						Unità					

e si dirà *cinque mila due cento quattro bilioni trecento ventinovemila quattro milioni cinque cento tre mila duecento quattordici*.

37. Sino alle centinaja di milioni le nomenclature di tutte le nazioni convengono; ma intorno ai nomi soltanto delle unità di ordini superiori i Francesi, Inglesi, e Spagnuoli differiscono dal nostro sistema, che è quello di tutta Italia, e del Nord. Per essi mille milioni costituiscono un bilione, mille bilioni un trilione, ec., perchè dividono i numeri solo in classi di 3 cifre l' una e chiaman la prima classe delle unità, la seconda delle migliaja, la terza de' milioni, la quarta de' bilioni, la quinta de' trilioni, ec., cosicchè secondo questo sistema il sopra indicato numero si leggerebbe 5 *Quadrilioni*, 204 *Trilioni*, 329 *Bilioni*, 4 *Milioni*; 503 *mila*, *duecento quattordici*.

38. II.° Onde scrivere in cifre un numero dato in parole, si cominci dal segnare la cifra appartenente al più alto ordine di unità, che vien per primo nominato; indi tenendo ben presente allo spirito la successione di tutti gli ordini posteriori da sinistra a destra ciascun di questi successivamente si cuopra con cifra analoga data dall' espressione del numero, o con uno zero, se del posto a cuoprirsi non sia fatta menzione, affinchè chi legge trovi ciascuna cifra significativa realmente in quell' ordine, che gli appartiene. Così p. e. nell' espressione *cinque cento mila, e venti sette*, le unità del più alto ordine sono le centinaja di migliaja. Si cuopra perciò un tal posto col 5, giacchè tante sono le centinaja di migliaja, che il nostro numero ci offre. Ma affinchè chi legge conosca, che questo 5 esprime le centinaja di migliaja, unità di sest' ordine, fa d'uopo, che vi sieno 5 cifre di seguito, che sien cioè coperti tutti i posti degli ordini successivi. Or quello, che immediatamente le segue è il rango delle decine di migliaja; e siccome nel dato numero non è nominato ne dieci mila, ne ventimila .... ne novanta mila, così è chiaro, che queste mancano; e perciò nel lor nicchio scrivasi zero. Seguono le unità di migliaja; ma poichè nè mille, nè due mila .... nè novemila si hanno nell' espressione del numero, un altro zero al loro posto. Succede a questo quello delle centinaja, e questo ancora cuopriremo collo zero, perchè nemmeno le centinaja son nominate: indi vengono le decine, e poi l' unità, e poichè nel numero dato abbiam ventisette, cioè due decine, e sette unità, così col 2, e col 7 occuperemo questi ultimi posti, ed avremo 500027.

39. Ecco compiuta l' esposizione del nostro sistema di numerazione; e poichè esso tutto consiste nel maneggio di *dieci* cifre, cui si accorda un valore *decuplo* per ogni posto, che avanzano da destra a sinistra, si è contraddistinto col nome di *Istituzione decimale o Decadica*: le unità collettizie espresse dall' 1 seguito da uno o più zeri, cioè 10, 100, 1000, ec. per essere collezioni di *dieci* unità dell' ordine inferiore prossimo, si chiamano numeri *decimali, o decadici*; e Numerica *decimale, o decadica* la scienza de' numeri, che a tal sistema si appoggia.

Se poi si chieda perchè presso tutte le Nazioni le unità collettizie si sien formate di 10 unità d' ordine inferiore, e non di 2, o di 6, o di 12, ec., donde avrebbe auto origine l' Aritmetica *Binaria* proposta da Leibnizio, o la *Senaria*, o la *Duodecimale* proposta dall' Olandese Stewin, ognun comprende, che il naturale prattico uso, che nel conteggiare si fa delle dieci dita delle mani debbe esserne stata la causa.

EPILOGO.

Per indicare i termini della serie naturale indefinita fa d' uopo inventare i *nomi* de' numeri (18), e limitarli per mezzo d' un sistema di numerazione parlata (19). Si è questo fondato sulle *unità collettizie* (20). — Si sono poi trovati utili i *segni cifre*, che differiscono dai *segni nomi* (21), ed esigono un sistema di numerazione scritta (22). -- L' Arabo riposa sulla convenzione, che ogni cifra acquisti un valore decuplo per ogni posto, che avanza da destra a sinistra (24): è il migliore di tutti (25). — Formazione de' numeri progressivi colle cifre arabe (26) -- Valore assoluto, e relativo delle cifre (34), e numeri semplici, e composti (35) -- Traduzione in *nomi* de' numeri dati in cifre (36), e traduzione in *cifre* de' numeri enunciati (38). Istituzione decadica, numeri decadici, Aritmetica decadica (39).

CAPO III.

Operazioni sui numeri interi.

40. I numeri altro non essendo che misurate quantità (7), non possono cambiamento subire, che o col crescere, o col diminuire. Due sole sorte d' operazioni posson dunque sopra di essi eseguirsi, o quelle che producono aumento, e sono l' *Addizione*, la *Moltiplicazione*, l' *Elevazione a potenza*; o quelle che all' opposto effettuano diminuzione, e sono la *Sottrazione*, la *Divisione*, e l' *Estrazione delle radici*.

ARTICOLO I.

Operazioni che aumentano i numeri.



Addizione.

41. In moltissime circostanze cade il bisogno di trovare quel numero, che vien formato dalla riunione di più altri. Se saper bramiamo quante lire p. e. occorrano per l' acquisto di 3 libri, il 1.° de' quali costa 5 lire, il 2.° 4, il 3.° 7, siamo nel caso di trovare un numero eguale all' assieme delle lire 3, 4, e 7. Or *quell' operazione, per la quale più numeri dati si riuniscono in un solo eguale all' assieme di essi, si chiama Addizione*. I numeri dati a sommarsi diconsi *Poste*. Il risultato dell' operazione, numero, che in se comprende tutte le poste, chiamasi *Somma*, o *Aggregato*.

Due casi si possono nell' Addizione distinguere 1.° quando le poste sono numeri semplici: 2.° quando sono composti.

42. I.° *Caso*. Finchè si tratta di piccoli numeri, le addizioni non possono eseguirsi, che colla successiva ripetizione dell' unità, nè v'è metodo più compendioso, che possa sostituirvisi. Per aggiungere al 5 il 4, e poi il 7 conviene, che nella serie de' numeri naturali passiamo a trovare quel termine, che sta 4 gradi al di sopra di 5; e al 5 aggiungendo 4 volte l' unità, veggiamo che l' aggregato di 5 più 4 è il 9. Proseguendo a contare coll' ajuto delle dita altre sette unità sopra il nove nella serie stessa, giungiamo al 16, che perciò corrisponde all' unione di 9 più sette, ossia di 5 più 4, più 7. L' abitudine però ci fa a poco a poco abbandonare il maneggio delle dita, e la monotona replicazione successiva dell' unità, imprimendoci in mente i risultati, che ottengonsi dalle addizioni dei diversi numeri semplici, e allora colla massima celerità si forman le somme dicendo 5 più 4 fanno 9: 9 più 7 fanno 16, ec. Così facendo però noi non usiamo di un metodo diverso, profittiamo soltanto de' risultati, che rammentiamo aver altra volta ottenuti col metodo stesso.

43. II.° *Caso*. Quando i numeri sono composti, il metodo da cui dispensar non ci possiamo nel caso de' numeri semplici, sarebbe assai lungo, ed incommodo. Se conoscer volessimo la somma impiegata nell' acquisto di due orioli, il 1.° del prezzo di Lire 46, il 2.° di 53, riescirebbe assai incommodo aggiungere successivamente l' unità 53 volte al 46, onde trovare il 99. Crescerebbe la noja per numeri più grandi; nè in tal caso è sperabile un conforto dalla memoria, che attesa

la moltiplicità immensa de' casi ritener non saprebbe i risultati di queste somme, come con ogni facilità gli ritiene ne' casi ben limitati delle addizioni de' numeri semplici.

Gli Aritmetici hanno perciò ideato un compenso in un particolare processo, che non è che un *compendio della formazione de' numeri pella successiva ripetizione dell' unità*, in cui appunto l' operazione dell' addizione consiste. Esso si aggira nel considerare i numeri come decomposti nè diversi loro ordini di unità, affine di unire insieme quelle dello stesso nome. Così volendo aggiungere le lire 53 alle 46, si riuniscono le 3 unità del 1.° colle 6 unità del 2.° numero', il che da 9 unità: poi le 5 decine del 1.° colle 4 del 2.°, ilche da 9 decine; e queste 9 decine, più 9 unità, ossia il 99 esprime la somma di tutte le rispettive parti, o unità de' numeri dati, e perciò la somma de' numeri stessi.

44. Se invece di due soli numeri, ne avessimo molti, e di molte cifre composti, serve all' uopo l' indicato compenso, ed ecco il processo, che dee seguirsi.

1.° *Si scrivano le poste le une sotto le altre in guisa che le unità dello stesso ordine si trovino in una stessa colonna verticale.*

2.° *Si tiri una linea sotto l' ultimo numero per separarlo dal risultato, e cominciando a destra si aggiungano insieme i numeri contenuti in ciascuna colonna. Se la prima non sorpassa il 9, tal quale si scrive sotto la colonna, su cui si è agito; e se contiene diecine, sotto la colonna si scrivono solo le unità, o lo zero, se queste mancano; e quante decine si hanno, e tante unità si ritengono per aggiungerle alle unità della colonna sinistra seguente, ove le*

unità sempre equivalgono alle decine del posto a destra (30); *e finalmente sotto l'ultima colonna si scrive tutta la somma, che le appartiene,*

Così il numero ottenuto sotto la linea esprime la somma di tutte le unità de' rispettivi ordini, che costituiscono i numeri dati, cioè la somma di tutte e singole le parti, che compongono i dati numeri, dunque la somma de' numeri stessi.

Applicazione dell' Addizione ai Problemi.

45. I diversi casi, che esigono l' addizione sono sì manifesti per se, e tanti in numero, che quanto inutile, altrettanto impossibile riescirebbe darne il dettaglio. Eccone due esempii.

46. *Quanti anni sono scorsi da Adamo a tutto l' anno* 1835?

Da Adamo al Diluvio si numerano anni.	1656
Dal Diluvio all'Era cristiana	2327
Dall' era cristiana a tutto il 1835	1835
Somma	5818

47. *Quanta è l' intera popolazione d' Italia.*

Il numero degli Abitanti de' diversi suoi stati è il seguente.

Regno Lombardo Veneto	Abit.	4065999
Stati Sardi	»	3814989
Ducato di Parma	»	383899
Ducato di Modena	»	374999
Ducato di Massa	»	19999
Ducato di Lucca	»	131889
Granducato di Toscana	»	1264998
Republica di S. Marino	»	6999
Stato Pontificio	»	2425899
Regno delle due Sicilie	»	6766998
Isola di Corsica	»	290989
Isola di Malta, Gozzo, e Comino	»	150999
Popolazione totale		19698656

Si noti in questo esempio, che la somma delle unità ottenute nella prima colonna è 106; e perchè il caso d'una somma di 3 cifre non sia ai principianti d'imbarazzo si rifletta, che 106 non è che 10 decine più 6 unità. Perciò scritto il solo 6 sotto la colonna delle unità, il numero 10 formato dalle residuali due cifre, siccome esprime appunto il numero delle unità decine, che si son formate nell' aggiungere insieme le unità della prima colonna, si ritiene per unirlo a tutte le altre decine, che formano la colonna seconda; su cui si passa ad agire, dicendo 10 *che si porta più* 9 (che è il primo numero della seconda colonna) *fanno* 19, *più* 8 *fan* 27, ec.; e si trova, che la somma di tutte le unità decine a questa seconda colonna appartenenti è 115. Or si avverta, che 115 decine è la stessa cosa, che 5 decine più 11 decine di decine; perciò scritto il solo 5 sotto la colonna delle decine, il numero 11 formato dalle residuali due cifre siccome esprime il numero delle decine di decine, che sono unità dell' ordine immediatamente a sinistra (30) che è delle centinaja, si ritiene per poi unirlo a tutte le altre unità centinaja, che formano la colonna terza ec.; ond'è che anche questo caso è compreso nella regola generale (44).

MOLTIPLICAZIONE

Origine, e indole della moltiplicazione.

48. Nei citati esempii le poste date ad unirsi eran diverse le une dalle altre. Ma se si chiedesse p. e. quanto costano 4 libre di zucchero a bajocchi 9 la libra, siamo obbligati a ripetere 4 volte il valore di una libra cioè i baj. 9, siamo obbligati a trovare un numero che

esprima la somma di 4 poste tutte eguali a 9. Si danno dunque de' casi ancora, in cui le poste a sommarsi son tutte eguali, in cui cioè trattasi di ripetere ossia di addizionare più volte a se stessa una medesima quantità. E in tali casi come il ripetere un numero 2, 3 volte, ec., dicesi *duplicare*, o *triplicare*, ec. così il ripeterlo molte volte dicesi *moltiplicare*; e l' addizione stessa della quantità ripetuta prende il nome di *Moltiplicazione*, che perciò può definirsi *quell' operazione per di cui mezzo si prende un numero quanto lo indica un altro*.

Il numero che si ripete chiamasi *Moltiplicando* l' altro, che indica quante volte va ripetuto, *Moltiplicatore*; e il risultato dell' operazione, *Prodotto*. Molplicando, e Moltiplicatore poi, perchè insieme concorrono a *fare* il prodotto, hanno il comun nome di *fattori*. Così nella ricerca del valore di libre 4 zuccaro a baj 9; valor che si ottien col ripetere 4 volte il 9, 9 è il moltiplicando, 4 è il moltiplicatore, e il 36, che risulta da questa ripetizione è il prodotto.

Principali proprietà del prodotto.

40. Risulta dalle acquistate notizie, che il prodotto si ottiene prendendo il moltiplicando tante volte quante unità sono nel moltiplicatore. Sicchè il prodotto ha al moltiplicando quello stesso rapporto, che il moltiplicatore ha all' unità. Fa or d' uopo rimarcare che il suo valore non cangia se in vece si prenda il moltiplicatore tante volte quante ha unità il moltiplicando, invertendo cioè l' ordine de' fattori, Il numero 15 p. e. tanto è prodotto da 3 moltiplicato per 5, che da 5 moltiplicato per 3; Eccone una dimostrazione chiarissima,

perchè ne offre una immagine sensibile del modo, con cui formasi il prodotto di due numeri qualunque.

Scriviamo in una fila orizzontale 5 volte la cifra 1. Due altre file simili si pongano sotto la prima, come qui vedesi

1 , 1 , 1 , 1 , 1
1 , 1 , 1 , 1 , 1
1 , 1 , 1 , 1 , 1

Il numero totale delle cifre 1 sarà composto da tante volte 5 quante sono le file orizzontali, cioè da 3 volte 5, o 15. Ma la disposizione di questo numero di cifre è tale, che mentre ci offre 3 file orizzontali ciascuna composta di 5 unità, necessariamente ci offre ancora 5 colonne verticali da 3 unità l' una. Dunque il dato numero 15, che è sempre identico a se stesso, qualunque sia l'ordine con cui si raccolgono le sue unità, tanto si ottiene col prendere le 3 file orizzontali ognuna da 5, che col prendere le 5 colonne verticali ognuna da 3: si ottiene cioè egualmente sì col ripetere 3 volte il 5, che 5 volte il 3. Dunque sì 5 moltiplicato per 3, che 3 per 5 danno lo stesso prodotto 15. Questo ragionamento è applicabile a numeri qualunque, pòichè le unità di qualsiasi moltiplicando si possono immaginare disposte in una linea; e questa ripetuta tante volte quante son le unità del moltiplicatore; e la stessa dimostrazione avrà sempre luogo.

50 Perciò pella pura determinazione numerica del prodotto nella esecuzione dell' operazione si può rovesciar l' ordine de' fattori, e prendere per moltiplicatore quello di essi, che più fa comodo; e possiamo formarci un' idea più generica del prodotto, riguardandolo

come composto di un qualunque de' due fattori ripetuto tante volte quante unità son nell' altro .

51. Da ciò deriva che quando l' un de' fattori è l' unità , il prodotto eguaglia l' altro fattore .

52. E quando l' un de' fattori è zero, zero è pure il prodotto , poichè tanto una quantità qualunque moltiplicata per zero, ossia presa nessuna volta , che zero moltiplicato per qualunque quantità , ossia preso quanto piaccia , è sempre zero .

Fin quì del semplice prodotto , che nasce da un fattore moltiplicato per l' altro . Ma questo stesso ottenuto prodotto può moltiplicarsi per un terzo fattore , e così di seguito . E in tal caso son degne di rimarco alcune verità, la cui dimostrazione è trascurata nella massima parte de' corsi .

53. Prendendo ad esame questi prodotti di più fattori osserviamo , che moltiplicar p. e. 3 per 2, e poi l' ottenuto prodotto per 5, è un ripetere 5 volte il 3 già preso due volte : che ciò non è altra cosa , che prender 2 volte il 3, e ripeter 5 volte questa operazione , ossia ripetere il 3 per quanto indica il 2 preso 5 volte , ossia moltiplicare il 3 per 5 volte 2 , o per 2 volte 5 (49) . Dunque moltiplicare 3 per 2, e poi il loro prodotto 6 per 5 è lo stesso, che moltiplicare il 3 per 2 volte 5.

Qualunque altre cifre vengano sostituite al 3, al 2, al 5, lo stesso ragionamento indipendente affatto dal particolare valore de' numeri ci porta ad un consimile risultato a conchiuder cioè , che *lo stesso prodotto si ottiene tanto col moltiplicare il 1° fattor pel 2° , poi il loro prodotto pel 3° ; che col moltiplicare il primo fattore pel prodotto degli altri due .*

54. Se i fattori son 4, se si avesse p. e. a molti-

plicare 3 per 2 per 5 per 4, considerando 3 per 2 come un fattor solo, (e tale infatti sarebbe se si esprimesse per 6), e marcando questa supposizione col chiuderlo tra parentesi, il caso è ridotto all' antecedente di tre soli fattori; e perciò (3 *per* 2) moltiplicato per 5, e poi il lor prodotto moltiplicato per 4 è lo stesso che (3 *per* 2) moltiplicato pel prodotto di (5 *per* 4).

55. Se or consideriamo 5 per 4 come un fattor solo; (e tal sarebbe se si esprimesse per 20), e riguardiamo di nuovo come due reali fattori il 3 per 2, avremo allora 3 moltiplicato per 2, e poi per (5 *per* 4) uguale a 3 moltiplicato pel prodotto di 2 per (5 *per*4) (53).

Dunque moltiplicando
3 per 2 per 5 per 4
(3 *per* 2) per (5 *per* 4), ovvero 6 per 20
3 per (2 *per* 5 *per* 4), ovvero 3 per 40
si hanno sempre gli stessi prodotti.

Questa dimostrazione indipendente affatto dal valore particolare de' numeri è estensibile a quanti fattori si voglia, onde conchiuder possiamo che = *lo stesso prodotto si ottiene da più fattori tanto col moltiplicare il 1° pel 2°, il lor prodotto pel 3°, il prodotto che ne nasce pel 4°, ec., quanto col moltiplicare il prodotto dei primi per quello degli altri fattori residui, o il primo fattore pel prodotto degli altri tutti.*

56. Si è veduto (53) che I 3 per 2 per 5 può riguardarsi come prodotto.
da 3 per (2 *per* 5) e da (3 *per* 2) per 5
Or se invertiamo in ambedue queste espressioni eguali l' ordine de' fattori chiusi tra parentesi, il che non ne altera il prodotto (49), la prima diverrà

II. 3 per (5 *per* 2) l' altra diverrà

III. (2 *per* 3) per 5.

Or se nelle stesse due espressioni eguali invertiamo l' ordine de' fattori del prodotto intero (riguardando come un fattor solo la quantità tra parentesi) la prima diverrà IV. (2 *per* 5) per 3, e l' altra diverrà

V. 5 per (3 *per* 2).

Finalmente se o nell' una o nell' altra di queste due ultime espressioni ora ottenute invertiamo l' ordine de' fattori del prodotto parziale chiuso tra parentesi, il che non altera il risultato (49), avremo VI. (5 *per* 2) per 3 ovvero 5 per (2 per 3) che è il medesimo (53). Ora le parentesi in tutte le sei contrassegnate espressioni dimostrate eguali si posson togliere, poichè moltiplicare un fattore pel prodotto dei due altri chiusi tra parentesi è lo stesso, che moltiplicare il 1.° pel 2.°; e il lor prodotto pel 3.°; ed allora queste espressioni diventano.

I. 3 per 2 per 5
II. 3 per 5 per 2
III. 2 per 3 per 5
IV. 2 per 5 per 3
V. 5 per 3 per 2
VI. 5 per 2 per 3

e per esser tutte eguali ci mostrano, che i tre 3 fattori situati in tutte le possibili combinazioni ci danno sempre uno stesso prodotto.

Simili ragionamenti ci offrono lo stesso risultato per qualunque numero de' fattori; e perciò conchiuder possiamo, che *lo stesso identico prodotto si ha sempre in qualunque delle possibili relative posizioni vengano più fattori moltiplicati fra loro*.

Processi della Moltiplicazione

Esaminate la proprietà del prodotto relative ai suoi due, o più fattori, occupiamoci ora dei processi con cui si ottiene.

57. Poichè l'intima natura della moltiplicazione non differisce dall' addizione, per mezzo di questa può ottenersi il prodotto scrivendo il moltiplicando tante volte di seguito, quante unità sono nel moltiplicatore, e quindi facendo la somma di tutte queste quantità eguali. Così per ottenere il valore delle 4 libre zuccaro a baj: 9, scritto 4 volte il 9 un sotto l' altro, se ne fa poi la somma. Ma se invece del valore di 4 libre si cercasse il valore di libre p. e. 3500, dovrebbesi 3500 volte scrivere di seguito il 9 in una colonna verticale per poi farne la somma, il che sarebbe cosa assai lunga ed incommoda. Quindi è che ad oggetto d' abbreviare queste addizioni si è inventato un metodo particolare, ed in questo appunto consiste l' operazione detta Moltiplicazione, la qual non è *che una compendiosa addizione*.

Tre casi meritano di essere nella Moltiplicazione distinti, e sono.

1.° Quando ambedue i fattori sono numeri semplici.

2.° Quando non lo è che il solo moltiplicatore.

3.° Quando nol sono nè l' un nè l' altro fattore.

58. I.° *Caso*. Se moltiplicar si dovesse 5 per 4, con altro mezzo ottener non possiamo il prodotto, che coll' aggiungere al 5 tre volte il 5, dicendo 5 più 5 fa 10; più 5 fa 15, più 5 fa 20; cosicchè la moltiplicazione de' numeri semplici, non differisce dall' addizione nè per natura, nè pel processo di esecuzione: ma poichè tutti i possibili diversi prodotti di ciascun de' 9

numeri semplici per ciascun altro di essi sono ben pochi, giova porli a memoria, e rendersili famigliari coll' esercizio, quel gran maestro in ogni genere di discipline, onde eseguire speditamente le moltiplicazioni ancora degli altri due casi.

59. A tale oggetto scriviamo in una fila orizzontale i primi nove numeri. Aggiungiamo ciascun di questi a se stesso; e si scriva la somma in una seconda linea, che vien ad esser composta del doppio di ciascun numero della prima, ovvero del prodotto di ciascun di essi per 2. A ciascun numero della seconda linea si aggiunga quello, che gli corrisponde nella prima, e le somme, che ne risultano si dispongano sovra una terza linea, la quale perciò contiene il triplo di ciascun numero, che trovasi nella prima, ossia il loro prodotto per 3. Si dispongano sovra una quarta linea le somme, che nascono dall' addizione de' numeri della prima linea con i corrispondenti della terza; e queste somme esprimeranno il quadruplo di ciascun numero della prima: si agisca analogamente, finchè saremo pervenuti ad una nona linea, la quale contiene i prodotti de' numeri della prima moltiplicati per 9, come osservasi nella tavola seguente.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Dalla sintesi or esposta di questa tavola, la cui invenzione si attribuisce a Pitagora, donde il nome di *Pitagorica*, risulta, che nella prima colonna verticale a sinistra sono collocati tutti i multipli di 1 per ciascuno de' successivi numeri semplici; nella seconda tutti i multipli del 2, ec.; e nell' ultima tutti i multipli del 9; ond' è, che son compresi in essa tutti i prodotti possibili di un numero semplice per un' altro, alla cognizione de' quali è destinato il suo uso.

60. Se chiedesi infatti il prodotto di 7 per 5, si vada alla quinta linea orizzontale, che contiene tutti i diversi prodotti de' successivi nove primi numeri moltiplicati per 5, e percorrendola si fermi lo sguardo su quel numero, che è in quella fila verticale, in capo a cui sta il moltiplicando 7, e lungo la quale stanno i successivi suoi multipli, mentre quello esser debbe il prodotto di 7 per 5, e trovasi 35. Qualunque prodotto si cerchi di numeri semplici, esso trovasi *nella linea del Moltiplicatore al di sotto del Moltiplicando*, notizia, di cui dobbiam prevalerci per ben apprendere i prodotti tutti dei numeri semplici, onde poter indicarli appena enunciati i loro fattori.

61. 2.° *Caso*. *Nella Moltiplicazione d' un numero composto per uno semplice* cominciar possiamo a mettere in opera un processo più breve dell' addizione fondato anch' esso nel considerare i numeri come decomposti ne' diversi loro ordini di unità, e quindi nell' eseguire a memoria delle operazioni parziali su ciascuna delle cifre esprimenti questi diversi ordini di unità. Se avesse p. e. a moltiplicarsi 342 per 8, in vece di scrivere 8 volte di seguito 342, e poi far la somma, si osservi che ripetere 8 volte il 342 è lo stesso, che

ripetere 8 volte tutte le parti di cui quel tutto risulta. Perciò ripetendo 8 volte le 2 unità, le 4 decine, le 3 centinaja, che costituiscono il numero dato, tutto il numero si sarà così moltiplicato per 8. Ed ecco come l' operazione si eseguisce.

$$\begin{array}{r} 346 \\ 8 \\ \hline 2768 \end{array}$$

Il prodotto delle 6 unità del Moltiplicando pel Moltiplicatore 8 è 48. Si scrivono le sole unità 8, e si ritengono le 4 decine per aggiungerle a quelle, che or si troveranno.

Il prodotto delle 4 decine del Moltiplicando pel Moltiplicatore 8 è 32 decine, che con le 4 decine ritenute precedentemente danno 36. Si scrive il 6, e le 3 decine di decine si ritengono per unirle alle unità del posto addietro, cioè alle centinaja.

Il prodotto delle 3 centinaja pel moltiplicatore 8 è 24, che aumentato delle 3 unità provenienti dal posto innanzi diventa 27; e questo tutto intero si scrive, poichè non vi sono nel moltiplicando altre cifre.

Dunque le 27 centinaja, più le 6 decine, più le 8 unità, ossia il numero 2768 è risultato dal prendere 8 volte le 6 unità, le 4 decine, e le 3 centinaja, che costituiscono il moltiplicando; è dunque il moltiplicando stesso 346 preso 8 volte, come possiamo assicurarcene collo scriverlo 8 volte di seguito, e poi farne la somma.

62. Il processo di questa operazione si enuncia co-

si. *Onde moltiplicare un numero di più cifre per un numero di una sola, posto il Moltiplicatore sotto le unità del moltiplicando, e tirata una linea orizzontale sotto di essi, si moltiplicano successivamente, cominciando a destra, le unità di ciascun ordine del Moltiplicando pel Moltiplicatore; e se il prodotto non eccede 9, si scrive tutto intero: altrimenti scritte le sole unità, o zero, se esse manchino, si ritengano le decine per aggiugnerle al prodotto seguente, e così si continua sino all'ultima cifra sinistra del Moltiplicando, il cui risultato si scrive tutto, come si ottiene.*

3.° *Caso. Quando i due Fattori sono composti*, cominciamo dall'esame del caso men complicato, che è il seguente.

63. *Moltiplicazione per un numero decadico.* Quando il Moltiplicatore è il più piccolo possibile di tutti quelli, che hanno gli stessi ordini di unità, come è 10 fra i numeri espressi da 2 cifre, 100 fra quelli espressi da 3, ec.; quando in somma il moltiplicatore è *decadico* (39), il moltiplicare altro non è che rendere un numero 10, 100, 1000, ec. volte maggiore, il che si ottiene colla sola aggiunta di 1, 2; 3, ec. zeri alla destra dell' ultima cifra (33). Dunque *la moltiplicazione per un numero decadico si fa coll'aggiungere alla destra delle unità del moltiplicando tanti zeri, quanti ne ha il Moltiplicatore.*

64. *Moltiplicazione per un numero d' una sola cifra significativa seguita da zeri.* Si abbia p. e a moltiplicare 228 per 400. Poichè 400 è 100 volte maggior di 4 (31) è cioè 4 moltiplicato per 100, qui trattasi di moltiplicare il 228 pel prodotto dei 2 fattori

(4 *per* 100). Ora si è veduto (53), che questo prodotto è espresso da quel che si ottiene moltiplicando prima 228 per 4, e poi il loro prodotto per 100. Dunque avremo l' intento coll' aggiungere 2 zeri al prodotto di 228 per 4, come vedesi

$$\begin{array}{r} 228 \\ 400 \\ \hline 91200 \end{array}$$

Dal che rilevasi, che quando il Moltiplicatore ha una sola cifra significativa seguita da zeri; conviene *Moltiplicar per questa cifra il Moltiplicando, e a destra dell' ultima cifra del prodotto aggiungere tanti zeri, quanti ne ha il Moltiplicatore*.

65. *Moltiplicazione per un numero qualunque*. La soluzione di questo Problema è un' applicazione delle regole precedenti.

Abbiasi a moltiplicar p. e. 451 per 248. Ciò è ripetere 248 volte il 451, ossia (decomponendo il molplicatore nelle sue parti o collezioni d' unità de' diversi suoi ordini) è un prendere il 451 8 volte, più 40 volte, più 200 volte. Ma noi sappiamo como debbesi operare per ripeterlo 8 volte (61), come per ripeterlo 40, e 200 volte (64). Dunque ottenuti che sieno questi 3 particolari prodotti, non resta, che unirli per conoscere il prodotto totale, ossia il numero che nasce dalla ripetizione del 451 per tutte le 248 volte. A tale oggetto si dispone il calcolo come segue

451	Moltiplicando
248	Moltiplicatore
3608	1.° Prodotto parziale
18040	2.° Prodotto parziale
90200	3.° Prodotto parziale
111848	Prodotto totale

Il Moltiplicando nella esecuzione di questa operazione si è successivamente moltiplicato per le unità, decine, centinaja del moltiplicatore coll' avvertenza di porre uno zero alla destra del 2.° prodotto parziale dato dalle decine del Moltiplicatore ; e 2 alla destra del terzo prodotto parziale dato dalle centinaja giusta la regola (64) ; e quindi si è fatta l' addizione di questi particolari prodotti per ottenere il totale. E poichè in tale addizione gli zeri scritti alla destra di que' parziali prodotti nulla contano, in prattica si usa di ommetterli, avvertendo però di porre in ciascun parziale prodotto le unità dei diversi ordini nel posto, che lor compete, onde sommando si abbiano in ogni colonna unità dell' ordine stesso, al quale oggetto basta collocare la prima cifra del prodotto, che si ottiene da ciascuna cifra significativa del moltiplicatore sotto la stessa cifra moltiplicatrice.

66. Quindi è, che per *moltiplicar tra loro due numeri qualunque, scritto il Moltiplicatore sotto il Moltiplicando in modo, che le unità dei diversi ordini si corrispondano; e tirata sotto i fattori una linea, si formano successivamente i prodotti del Moltiplicando pei numeri esprimenti le unità dei diversi ordini del Moltiplicatore, avendo riguardo di porre*

la prima cifra d'ogni parziale prodotto sotto quella cifra del Moltiplicatore, che lo forma: si sommano tutti i prodotti parziali, e la somma è il total prodotto cercato.

Metodi più compendiosi di moltiplicazione in varii casi.

67. I. Quando il Moltiplicando termina con zeri, che per qualunque quantità moltiplicati danno zero, si possono trascurare nella formazione de' prodotti parziali, incominciando tutte le moltiplicazioni particolari dalla prima cifra significativa del moltiplicando; e perchè nel prodotto totale si trovino poi le cifre nel loro posto convien aggiungere alla destra del prodotto tanti zeri, quanti ne avea alla destra il Moltiplicando. Quindi.

32000	si eseguirebbe	32
45	più brevemente così	45
160000		160
128000		128
1440000		1440000

68. II. Quando termina con zeri il Moltiplicatore, questi possono trascurarsi nell' operazione, avvertendo di aggiungerne un egual numero alla fin del prodotto, poichè se fosse p. e. a moltiplicarsi 34 per 2400, essendo 2400 eguale a 24 per 100, è chiaro che dopo aver moltiplicato 34 per 24, convien poi moltiplicare questo prodotto per l'ultimo fattore 100, il che si ottiene coll' aggiunta di due zeri, di quanti cioè se ne erano trascurati nella prima moltiplicazione.

Perciò

34	più brevemente si	34
2400	esiguisce così	24
00		136
00		68
136		81600
68		
81600		

69. III Se Moltiplicando, e Moltiplicatore terminano con de' zeri, in grazia delle esposte due regole, è chiaro, che nell' esecuzione della moltiplicazione questi zeri finali trascurare si possono sì nell' un, che nell' altro, purchè alla destra dell' ottenuto prodotto scriviamo tanti zeri, quanta è la somma di quelli, che erano in ambo i fattori.
Perciò

32000	più brevemente si	32
400	eseguisce così	4
00000		12800000
00000		
128000		
12800000		

70. IV. Se vi sono zeri tra le cifre significative del Moltiplicatore, siccome questi non danno prodotto alcuno, si trascurano ferma l' avvertenza, che la prima cifra de' successivi prodotti parziali sia sempre sotto la cifra del rispettivo moltiplicatore.

Così

53	più brevemente	53
2004	si eseguisce così	2004
----		----
212		212
00		106
00		------
106		106212

106212		

71. V. Finalmente essendo indifferente per rapporto al risultato numerico prendere per moltiplicatore quello de' 2 fattori, che più piaccia, quello va scelto per la più sollecita esecuzione dell' operazione, che ha minor numero di cifre significative diverse.

Usi, e applicazione della Moltiplicazione ai Problemi.

72. Se è indifferente invertere l'ordine de' fattori per rapporto al *valor numerico* del prodotto (50), non lo è per riguardo alla sua *concreta natura*. Ne' casi pratici il Moltiplicando, e il Moltiplicatore son determinati dalle condizioni de' Problemi. Se per ottenere il valore delle 4 libre zuccaro noi rileviamo, che va ripetuto 4 volte il 9 baj: valor d' una libra, dal quesito stesso vien determinato il moltiplicando 9, e il prodotto altro non essendo che il Moltiplicando ripetuto, dee necessariamente essere ad esso omogeneo. Il Moltiplicatore poi destinato a indicar quante volte va ripetuto il Moltiplicando è sempre un numero, che non esprime oggetti, ma operazioni, e perciò è sempre un

numero *non concreto* (15) : la riflessione però nell' esame del Problema il deduce da un numero concreto eterogeneo al Moltiplicando ; tal è nel nostro caso il numero 4 libre, che ci fa conoscere, che il 9 baj: non va ripetuto nè più nè meno di 4 volte . Non si può dunque ne' casi concreti inverter l' ordine de' fattori , assumer cioè le 4 libre per Moltiplicando , ripeterle 9 volte , prendendo per moltiplicatore il 9 baj: , e quindi aver per prodotto 36. Poichè se è vero , che 36 libre nasce dal ripeter 4 libre 9 volte ; è anche altresì vero, che questo risultato non ha che far nulla con ciò, che il Problema richiede . Però provveduto che si abbia all' invariabil natura concreta del prodotto, che è la cosa che il problema ricerca , e quindi riconosciuto esser per sua natura Moltiplicando quello de' due fattori , che è omogeneo al prodotto , se poi nell' esecuzione del processo giovi inverter l' ordine de' fattori , si faccia pure, perchè ciò non altera il loro numerico risultato .

I casi , in cui convien far uso della moltiplicazione sono tutti quelli , ne' quali trattasi di ripeter più volte una stessa quantità . I più comuni ad occorrere sono .

I. Ricerca del valor totale di molte cose eguali , noto il valore di una . Eccone due esempii

73. *Quanto costano* 360 *balle di lino a ragione di lire* 2560 *l' una* ? — Risultato Lire 92600

E' chiaro che Lire 2560 valor d' una balla va ripetuto 360 volte, ossia va moltiplicato per 360, e il prodotto esprime Lire, come Lire esprime il Moltiplicando, mentre il Moltiplicatore 360 vien desunto dalle 360 balle di lino , che è un numero eterogeneo al Moltiplicando .

74. *Quanto costano 4006 Rubbia di grano a ragione di soldi 675 il rubbio?* — Risultato soldi 2704050.

II Ricerca del prezzo d' una misura, noto quello d' una misura più piccola.

75. *Quante lire costa una libra d' olio volatile di rose, che si è pagato a ragione di 3 lire il denaro?* — Risultato lire 864.

(*Denari 24 formano l' oncia: Oncie 12 la Libra*)

Ripetendo le lire 3 valor del denaro 24 volte, avremo il valore di 24 denari, ossia d' un' oncia. Ripetendo il valor di un' oncia 12 volte, si avrà il valor d' una libra:

76. *Quanto vale una libra di Vainiglia, che si vende a ragione di 22 lire l' oncia?* — Risultato lire 264.

III. Riduzione d' unità ad altre di diversa specie relativa più piccole.

77. *Di quante miglia geografiche è composta la circonferenza massima del Globo terracqueo?* — Risultato 21600.

(*Ognuno dei 360 gradi della circonferenza è Miglia 60.*)

78. *Di quanti minuti secondi è composto l'anno?* Risultato, 31556929.

(*L' anno risulta di 365 giorni, 5 ore, 48, primi, 49 secondi*).

Convien convertire tutti i giorni dell' anno in ore, poi tutte le ore dell' anno in primi, ec.

79. *A che numero sarebbe giunto Adamo colla successiva addizione dell' unità, se dal 1.° momento*

di sua esistenza a tutto il 1835 contato avesse senza interruzione 3 unità per ogni secondo? — Risultato 550794638766.

Conviene esprimere in secondi l' età d'Adamo, che è d' anni 5818 a tutto il 1835 (46), e poi per 3 moltiplicare questo prodotto. E il risultato ci mostra, che converrebbe invecchiasse quasi d'altrettanto il mondo, prima che giungesse Adamo a contare un Bilione.

IV. Qui comprendiamo tutti que' Problemi, che esigono la ripetizione delle quantità, ma non sono riferibili ad un punto di vista generale, come gli altri re casi esaminati. P. es.

80, *Che somma ha consumato in 25 anni una Famiglia, che ha speso lire 8954 all' anno nei primi 10 anni; il doppio di lire 8954 in ciascun dei 12 anni venuti dopo, il triplo di lire 8954 in ciascuno degli ultimi 3 anni?* — Risultato lire 385022.

Elevazione a potenze.

81. Tra i possibili casi della moltiplicazione, di cui ci siamo ora occupati può darsi, che sieno eguali i fattori. Può darsi cioè, che un numero venga moltiplicato per altro a se eguale, e allor dicesi, che la quantità è innalzata alla seconda potenza: può darsi che l' ottenuto prodotto, o seconda potenza, venga moltiplicato per altro fattore eguale ai 2 primi; e il risultato chiamasi terza potenza, ec. Così 3 moltiplicato per 3 dà 9, che dicesi seconda potenza di 3. 9 moltiplicato per 3 dà 27, che dicesi terza potenza di 3. Di questo innalzamento a potenza però serbiamo ad altro opportuno luogo il trattato. Qui si è semplicemente indicato per mostrarne la derivazione.

82. Nell' addizione le *poste* possono esser qualunque, e qualunque può esserne il *numero*.

Se nell' addizione si aggiugne la condizione, che le poste sien tutte *eguali*, rimanendo qualunque il lor numero, l' addizione prende il nome di moltiplicazione.

Se poi aggiungiamo una condizione di più, e delle poste *eguali*, che si hanno a ripetere limitiamo anche il *numero*, facendolo eguale o alla quantità ripetuta, o al prodotto, che si ottiene col moltiplicarla qualche volta per se, la moltiplicazione diventa allora elevazione a potenza.

L' elevazione a potenza è dunque una Moltiplicazione condizionata per parte della necessaria *eguaglianza de' suoi fattori*; come la moltiplicazione è una *addizione condizionata* per parte dell' *eguaglianza delle poste*. Dunque tutte le 3 distinte operazioni dirette ad aumentare la quantità, che noi abbiamo osservate non sono, che addizione. Ma l' addizione è un compendio del la formazione de' numeri colla successiva ripetizione dell' unità: dunque tutte queste operazioni in ultima analisi non sono, che diversi metodi compendiosi, che si sostituiscono al nojoso successivo aggiungere le unità ad una ad una, onde produrre la composizione de' numeri. Ne da ciò traete motivo di prenderle a vile siccome quelle, che altro oggetto non hanno che di ottenere, sol con più brevità, quello stesso intento, che si ha con un processo, di cui anche il bambino è capace, qual' è l' aggiungere un' unità all' altra: che anzi tutt' altra conseguenza fa d' uopo dedurre. La celerità, con cui per loro mezzo abbrevia la mente le sue operazioni, è tale da recar meraviglia; ed un sensibile esempio ne avete nella soluzione del quesito §. 79. Infatti mentre coi processi della moltiplicazione si è il suo risul-

tato ottenuto in pochi minuti, dalle condizioni stesse del problema apparisce, che se ottener si volesse coll' effettivo aggiungere l' unità ad una ad una, vi vorrebbe un tempo eguale a quello, che è scorso dal principio del mondo al termine del 1835. E' dunque per mezzo dei processi dell' addizione, e più della moltiplicazione, che lo spirito assoggetta al suo impero numeri i più alti, di cui percepir non potrebbe altrimenti i rapporti, e a sublimi speculazioni sollevasi, or valutando, e misurando le più piccole parti di que' nuovi mondi, che in mezzo ai comuni oggetti il microscopio gli svela, or determinando le distanze, i volumi, le masse, le forze degli astri, allorchè coi soccorsi dell' astronomia, e del teloscopio si slancia nel cielo.

EPILOGO.

Addizione

Si distinguono in essa le *Poste*, e la *Somma* (41). Si eseguisce I nei numeri semplici colla successiva ripetizione dell' unità (42). II ne' composti con un metodo compendioso (43). Sua applicazione ai Problemi (45 e seg.)

Moltiplicazione

Sua origine, e indole. Essa è l' addizione nel caso in cui tutte le poste sono eguali, e si distinguono in lei i *Fattori Moltiplicando, e Moltiplicatore*, e il prodotto (48).

Proprietà del prodotto. Non cangia I coll' inverter l' ordine de' 2. fattori (49), II o si moltiplichi (nel caso che sian più di 2) il 1.° fattor pel 2.°, poi il lor prodotto pel 3.°, o il 1.° pel prodotto di tutti gli altri (53), III qualunque sia la relativa posizione de' varii fattori (56).

Processi della Moltiplicazione. Essa non può eseguirsi che colla addizione nel *caso* 1.° in cui i fattori son semplici (58). Tutti i loro prodotti possibili sono espressi nella tavola pitago-

rica. Sua sintesi, ed uso (59) -- Vi è un processo compendioso nel 2.° *caso*, in cui il solo Moltiplicatore é semplice (61); e nel 3.°, in cui ambo i fattori son composti (63 e seg.)

Metodi più compendiosi di Moltiplicazione. Occorrono quando o vi son zeri alla fine del Moltiplicando, e Moltiplicatore, o intermedii tra le cifre del 2.°, o i fattori hanno un nnmero disceguale di cifre significative diverse (67 e seg.)

Usi, e applicazioni della Moltiplicazione ai, Problemi. Qui si avverta che ne' casi concreti il Moltiplicando è sempre omogeneo al prodotto (72).

Elevazione a potenze

E' una moltiplicazioue condizionata per parte dell' eguaglianza de fattori (81).

ARTICOLO II.

Operazioni, che diminuiscono i numeri.

SOTTRAZIONE.

Origine, e indole della sottrazione.

83. Accade spesso negli usi della vita il dover togliere un numero da un' altro dato. Se conoscer volessimo cosa *resti* di scudi 12, de' quali se ne sono spesi 9; ovvero di quanto il massimo caldo di ieri, che fu gradi 12 *ecceda* i gradi 9 massimo caldo d' oggi; o se senza curarci di marcare qual di due quantità sia la maggiore, sol c' interessi conoscerne l' ineguaglianza, per es. di quanto *differiscano* le 12 rubbia di grano raccolte in un predio dalle 9 raccolte in un' altro, noi

non possiamo rilevare altrimenti il *residuo* nel 1.° caso, l' *eccesso* nel 2.°, la *differenza* nel 3.°, che col togliere il numero minore 9 dal numero maggiore 12, e quindi osservare che cosa divenga il 12 diminuito di 9. Or questo residuo, eccesso, o differenza sebbene comunemente riguardinsi per sinonimi, perchè si ottengono per mezzo d' una medesima operazione, togliendo cioè un numero da un' altro; pure tali a rigore non sono, mentre ciascun di essi chiaramente esprime la diversità del fine, che in ciascun de' citati quesiti ci siamo proposti, e son perciò tanti risultati diversi tutti ottenuti col medesimo mezzo.

84. *Quell' operazione per la quale da un numero maggiore si toglie un minore per ottenerne il residuo, o l'eccesso, o la differenza dicesi Sottrazione*.

La quantità maggiore, da cui la minore vien tolta si chiama *Diminuendo*; *Diminutore*, *o Sottraendo* la quantità, che si toglie; ed entrambi sono i *termini* della sottrazione. Il risultato dell' operazione dicesi a norma dei casi *Residuo*, *Eccesso*, *o Differenza*.

Proprietà del Residuo, o Eccesso, o Differenza.

85. Il risultato della sottrazione altro non è che il minuendo diminuito di tante unità, quante ne indica il diminutore. Se dunque al minuendo già diminuito si aggiunga tutto ciò, che gli si è tolto, dovrà risultar di nuovo il minuendo intero. Esso dunque non è che il residuo, o eccesso, o differenza, più il diminutore.

Processi della Sottrazione.

86. I Caso. *Quando il Diminutore è un numero*

semplice , la sottrazione si eseguisce con un metodo inverso a quello , che si è prescritto nell' addizione de' numeri semplici : si dee cioè partendo dal numero maggiore discender di tanti gradi nella serie de' numeri naturali, quante unità vi sono nel minore ; e il numero , su cui ci fermiamo sarà il risultato richiesto ; e ciò si ottiene togliendo dal minuendo una alla volta successivamente tutte le unità del Diminutore . Presto però l' esercizio ci insegna a sottrarre ad un tratto da qualunque numero dato un numero semplice , e ci pone in grado di subito dire p. e. *da 14 levando 5 resta* 9 : *da dieci sei , quattro , ec.*

87. II. Caso . *Quando il diminutore è composto*, togliere ad una ad una tutte le sue unità dal minuendo sarebbe operazion ben lunga , e nojosa . Vi si è posto rimedio per mezzo della sottrazione per parti , togliendo successivamente dalle unità di ciascun ordine del numero maggiore le unità corrispondenti del numero minore; giacchè l' aggregato delle differenze parziali dee costituire la differenza totale fra i due numeri ; essendo evidente, che essa non è che da quelle costituita . Così per togliere 52 da 98, dalle 8 unità del numero maggiore levansi le 2 del più piccolo , e si ottiene 6 unità di residuo : dalle 9 decine tolgonsi le 5 corrispondenti , e si ha di residuo 4 decine ; sicchè conchiudesi che il residuo totale è 4 decine, e 6 unità , ossia 46.

88. L' applicazione di questo metodo esige alcune particolari avvertenze , quando qualche ordine del sottraendo contenga più unità dell' ordin corrispondente del minuendo , come nel caso di dover sottrarre 487 da 683.

Minuendo	683
Sottraendo	487
	——
Residuo	196

Nella quì sopra indicata operazione non possiamo togliere immediatamente le 7 unità del sottraendo dalle rispettive 3 del minuendo, se questo numero non s' ingrandisce a spese delle prossime decine. Quest' ingrandimento non può esser minore di 10 unità, poichè un unità sola, che tolta venga dalla seguente cifra a sinistra, val per 10 di quelle dell' ordine in cui si trasferisce (30). Fatto questo mentale trasporto d' una sola decina sull' ordine delle unità, avremo 10 più 3, o 13 unità, da cui possiamo or togliere le 7 unità del sottraendo, scrivendo al di sotto il residuo 6. Passando ora ad operare sulle decine, convien riflettere, che le 8 decine del minuendo non son più tali, ma 8 meno 1, ossia 7 in grazia della fatta cessione. E non potendosi da questo 7 sottrarre la cifra inferiore corrispondente 8, si toglie un' unità dalle 6 prossime centinaja, che trasferita, e aggiunta alle 7 decine ne formerà 17, da cui si potranno ora togliere le 8 del sottraendo, e sotto segnarvi il residuo 9. Finalmente dalle 5 centinaja rimaste togliendo le 4 del sottraendo, abbiamo 1 di residuo, che parimente si scrive sotto al rango su cui si è agito; e così 196 è il risultato della proposta operazione.

89. Che se nel minuendo manchino degli ordini di unità prossimi alle cifre, che hanno d' uopo d' ingrandimento, se cioè vi sieno de' zeri tra le cifre significative, convien avanzarsi sino alla prima di queste a sinistra per l' opportuna provvista; ed eccone un esempio.

Minuendo	9004
Sottraendo	5898
	———
Residuo	3106

Non potendosi togliere le 8 unità del sottraendo dalle 4 del minuendo, si ricorre alla prossima cifra onde aver qualche cosa per ingrandire il 4: ma nè da questa, nè in seguito dalla terza possiam to glier nulla perchè sono zeri. Prendiam dunque un' unità dalla quarta cifra, che è il 9. Questa è un' unità di migliajo: dunque è composta di 9 centinaja più un centinajo, ossia di 9 centinaja più 10 decine, ossia di 9 centinaja più 9 decine più le 10 unità, di cui abbiamo bisogno. Dal che risulta, che l' unità, che si è tolta alla prima cifra significativa a sinistra de' zeri, vale per dare alla prima cifra significativa, che le è a destra le 10 unità dello stesso suo ordine, di cui abbisogna; e per convertire in tanti 9 gli zeri intermedii. Così il minuendo 9004 si trova decomposto in 8990 più 14. Togliendo ora dalle 14 le 8 unità del sottraendo avremo 6 per le unità del residuo, e continuando l' operazione nelle altre colonne, fatta la mentale sostituzione dei 9 agli zeri, e la detrazione dell' unità alla cifra significativa, che gli precede, si ha il resto, che trovasi scritto nell' esempio.

90. In seguito delle esposte osservazioni ecco la regola per eseguire la sottrazione sovra due numeri qualunque. *Posto il sottraendo sotto il minuendo in modo, che le unità dello stesso ordine sieno in una stessa colonna, e tirata una linea sotto il sottraendo per separarlo dal risultato, si toglie, cominciando a destra, successivamente in ciascuna colonna il numero inferiore dal superiore, se non lo eccede :*

se poi lo supera, allor si toglie dal numero superiore aumentato di 10, e si riguarda come diminuita di un unità la prima cifra significativa, che gli sta a sinistra, e se vi sono de' zeri intermedii, si prendono per altrettanti 9, e con queste avvertenze proseguendo la sottrazione, sotto ciascuna colonna si segna il rispettivo residuo.

Usi, e applicazioni della sottrazione ai Problemi.

I casi in cui la sottrazione ha luogo sono tutti quelli, in cui cercasi o un *residuo*, o l' *eccesso* d' una quantità sull' altra.

I. Ricerche d' un Residuo.

91. *Quanti metri di cammino rimangono per giungere a Pietroburgo, da Lisbona, che ne è separata pella distanza di M.* 5001124, *avendo già percorsi M.* 4991943?, — Risultato M. 9181.

92. *Pella compra di un predio del valore di Lire* 30005 *si sono sborsate a conto Lire* 17087. *Quanto rimane a darsi?* — Risultato Lire 12918.

II. Ricerche d' un eccesso d' un numero sull' altro.

93. *Il Dawalagiri monte il più alto del globo situato nel Tibet in Asia, ed elevato* 24769 *piedi parigini sopra il livello del mare, di quanto supera il più alto monte d' America, cioè il Chimborazo alto* 20140 p. p., *di quanto il più alto dell' Affrica, che è il monte Greesh in Abbissinia alto* 14124, *di quanto il più alto d' Europa, cioè il Monte Bianco in Savoja alto* 14698? — Risultati. Il Dawalagiri supera il

Chimborazo di p. p. 4629, il Greesh di p. p. 10645, il M. Bianco di 10071.

94. *L' altezza cui salì l' astronomo Brioschi nè voli areobatici nel* 1808; *che è di p. parig,* 25440, *la massima fin quì ottenuta, di quanto eccede la maggior altezza, cui salì Gaylussac nel* 1804, *che è di p. p.* 21471, *di quanto il più alto punto della superficie del Globo, cioè la cima del Dawalagiri alta p. p.* 24769, *di quanto il più alto grado d' elevazione nè Monti cui giunse Humboldt nel Chimborazo, e che fù di p. p.* 18092, *o a cui giunse nel* 1834 *Boussingault*, e *che fù di p. p.* 18470? — Risultati. L' altezza cui è salito Brioschi supera quella di Gaylussac di p. p. 3969, la cima del Dawalagiri di p. p. 671, la maggior altezza cui sul Chimborazo è giunto Humboldt di p. p. 7348, e quella cui salì sul Chimborazo Boussingault di p. p. 6970.

DIVISIONE

Origine, e indole della Divisione.

95. Anche col dividere un tutto in parti si diminuisce la quantità. Finchè però la divisione è arbitraria, e diseguali le parti in che un tutto si spezza, niun aritmetico risultato è possibile. Ella è perciò condizione essenziale, e sempre sottintesa allorchè trattasi di divisioni *aritmetiche*, che le parti, in cui un tutto dividesi, sien sempre eguali.

Nelle divisioni, p. e. di 32 lire in 8 parti da 4 lire l' una ci si offrono due cose, che reciprocamente dipendono: il *numero* delle parti in cui il tutto dividesi, e il loro quantitativo, o *valore*. Il *numero* delle parti esprime anche *quante volte* ciascuna di esse è

contenuta nel tutto a dividersi, *quante volte* dovrebbe ripetersi per formarlo; è perciò un numero *indicante operazione*, ossia *non concreto* (15). Il loro *valore* poi non è che parte del valore del tutto a dividersi, è perciò un numero concreto al tutto omogeneo.

Se nelle divisioni numero, e valore delle parti son noti, non v' è nulla a cercare: se ambedue sono incogniti, vana è per mancanza di dati ogni loro ricerca: non possiamo dunque ammettere che due quesiti 1.° Dato il *valore* delle parti trovarne il numero: 2.° Dato il *numero*, trovarne il valore.

96. Nel 1.° caso se p.c. si ricerca in quante clemosine da 4 lire l' una sieno state ripartite lire 32, è chiaro, che queste tante saranno, quante volte le 4 lire son contenute in 32. Il 32 può dunque riguardarsi come formato dal 4 ripetuto per quel numero di volte, che vi è contenuto, e che noi ricerchiamo; può dunque riguardarsi come il prodotto del Moltiplicando 4 pel Moltiplicatore ignoto (48). Perciò quando nella divisione, data la quantità a dividersi, e il valore delle sue parti, si cerca il loro numero, può darsi al problema quest' altro aspetto = *Dato il prodotto, e il moltiplicando, trovare il Moltiplicatore* =

97. Nel 2.° caso, se p. e. cercasi quanto ha toccato a ciascuno degli 8 poveri, tra i quali si son divise lire 32; essendosi diviso il 32 in 8 parti eguali, è chiaro, che ciascuna è 8 volte più piccola di 32; cioè va 8 volte ripetuta, ossia moltiplicata per 8, perchè dia 32. Il 32 è dunque il prodotto d' un Moltiplicando ignoto moltiplicato per 8. Perciò quando nella divisione, data la quantità a dividersi, e il numero delle sue parti, se ne cerca il valore, può darsi al pro-

blema quest' altro aspetto = *Dato il prodotto, e il Moltiplicatore, trovare il Moltiplicando.* =

98. V' è dunque una relazione tra la divisione, e la Moltiplicazione, poichè il tutto a dividersi è il prodotto: il numero delle parti, numero *non concreto*, è il Moltiplicatore che è non concreto ancor esso (72): il valor delle parti omogeneo al tutto a dividersi è il Moltiplicando, che è anch' esso omogeneo al prodotto (72); e in ambedue le sorte de' quesiti, che nella divisione possono occorrere, d' altro non trattasi, che far regresso dal prodotto ad uno de' suoi fattori; ossia *trovare uno de' fattori dato che sia il prodotto, e l' altro fattore*, mentre nella moltiplicazione: dati i fattori si cerca il prodotto.

99. Onde ottenere l' intento riflettasi che il prodotto non è che un qualunque de' suoi fattori ripetuto tante volte, quante unità son nell' altro (50); sicchè quante volte il fattore noto trovasi ripetuto nel prodotto, e tante sono le unità dell' altro fattore, che si ricerca. Dunque potrà questo ottenersi col notare il numero delle volte, che il fattore noto può sottrarsi dal prodotto, e suoi successivi residui sinchè riducansi a zero.

100. Ed infatti se nella divisione di un tutto nelle sue parti se ne cerca il *numero*, p. e. in quante parti da 4 lire l' una sia diviso il 32, è evidente che le parti son tante quante volte il 4 può esser sottratto dal 32: se se ne cerca il *valore*, p. e. delle 8 elemosine in cui si è diviso il 32 lire, è pur chiaro che per ogni 8 lire, che noi togliamo da 32, dar non possiamo, che una lira sola a ognun degli 8 poveri che vogliamo beneficare; onde tante volte 8 lire saran sottratte da 32 finchè non vi rimanga nulla, e tan-

te saranno le lire, che comporranno ciascuna delle 8 elemosine, sicchè può dirsi in genere che quante volte il numero delle parti è contenuto nella quantità a dividersi, e tante sono le unità componenti il cercato valore.

101. Nelle divisioni dunque o si cerchi il numero, o il valor delle parti, non si ottiene l' intento, che coll' osservare quante volte il dato valore, o numero è contenuto nel tutto a partirsi; perciò auto riguardo allo scopo, che si prefigge dicesi *Divisione l' operazione per cui mezzo si osserva quante volte un numero è contenuto in un' altro, onde ottenere il fattor d' un prodotto, di cui è dato l' altro fattore, ossia onde ottenere il numero o valor delle parti di un tutto a dividersi, quando se ne conosce il valore, o il numero.*

Il numero a dividersi, che è il prodotto dicesi *Dividendo*. Il fattore noto esprimente il valore, o numero delle parti, che osservasi quante volte è contenuto nel dividendo, chiamasi *Divisore*.

Il fattore ignoto risultato della divisione, che indica quante volte il divisore sta nel dividendo, ed esprime il cercato valore, o numero delle parti, si denomina *Quoziente*, o *Quoto*.

102. Divisore e Quoto son dunque i fattori del Dividendo, ossia il Dividendo non è che il prodotto del divisore pel quoto, e perciò *dividere* una quantità per un' altra è un cercarne una terza detta quoto, che moltiplicata per la seconda dia un prodotto eguale alla prima.

Principali proprietà del Quoto.

103. Poichè il Quoto contiene tante unità quante

volte il Divisore è contenuto nel Dividendo, è chiaro che esso ha all' unità quel rapporto stesso, che il Dividendo ha al Divisore. Quindi se il Divisore è l' unità, il quoto è uguale al Dividendo: se il divisore è uguale al Dividendo, il quoto è l' unità.

104. Inoltre premessa la notizia che le quantità 2, 3, molte volte esattamente più piccole d' un' altra si chiamano *sudduple*, *suttriple*, *submultiple*, o *aliquote*, di quella, notiamo che posto costante il Divisore, se il Dividendo si rende doppio, triplo, ec., conterrà il Divisore un numero di volte doppio triplo di prima, e viceversa lo conterrà un numero di volte sudduplo, suttriplo, se tale esso diventa. Dunque posto invariabile il divisore, il quoto ingrandisce, o impiccolisce nella stessa ragione del Dividendo. Così mentre 6 è il quoto di 24 diviso per 4, abbiamo un quoto duplo, triplo, ec. di 6, se si duplica, o triplica il 24: l' abbiamo sudduplo, suttriplo ec., se si rende 2, 3, ec., volte più piccolo.

105. All' opposto se rimanendo invariabile il Dividendo, il divisore diventa doppio, triplo ec., vi sarà contenuto un numero di volte sudduplo, suttriplo, ec: e se diventa 2, 3, ec. volte più piccolo, vi sarà contenuto un numero 2, 3, ec. volte maggiore di prima. Il quoto dunque impiccolisce, o ingrandisce in ragione che ingrandisce, o impiccolisce il divisore, quando il dividendo è invariabile.

106. Se poi per una stessa quantità si moltiplica tanto il Dividendo, che il Divisore, allora il quoto divenuto tanto più grande pella moltiplicazione del solo dividendo, torna a impiccolirsi di quanto si era ingrandito, allorchè pella medesima quantità vien molti-

tiplicato il Divisore, rimane cioè inalterato. Per simili ragioni il quoto non si altera, se per una stessa quantità dividiamo tanto il divisore, che il dividendo.

107. Possiamo dunque conchiudere, che il valore del quoto d'una divisione

I.° Si moltiplica o col moltiplicare il solo dividendo, o col dividere il sol divisore.

II.° Si divide, o impiccolisce o col dividere il sol dividendo, o col moltiplicare il sol divisore.

III.° Non si altera affatto se per una stessa quantità si moltiplichino, o dividano ambo i termini della divisione.

Processi della Divisione.

108. Si è già veduto, che il processo della divisione tutto consiste in una reiterata sottrazione (99). Noi giungiamo infatti a scuoprire, che nella distribuzione di lire 32 in 8 poveri, tocca la parte di 4 lire a ciascuno, col sottrarre reiteratamente 8 dal 32 finchè vi cape: ma se la somma a distribuirsi in vece di esser sì tenue, com'è 32, fosse di 500, di 1000 lire, ben lungo sarebbe il lavoro, se a forza di successive sottrazioni giunger dovessimo a conoscere quante volte 8 è contenuto in 500, o in 1000. Si sentì perciò ben presto la necessità d'un compenso, e l'indole stessa del sistema di numerazione suggerì un mezzo più breve per eseguire queste successive sottrazioni, e in esso consiste il *processo della divisione*, che può chiamarsi un compendioso metodo di sottrarre più volte una medesima quantità.

109. Tre sono i casi, che meritano di essere nella Divisione marcati.

I.° Quando divisore e quoto sono numeri semplici, ossia quando il divisore essendo d'una cifra, il dividendo non è di lui 10 volte maggiore, e non lo è quando trovasi minore del Divisore reso decuplo coll' aggiunta di uno zero alla destra.

II.° Quando il solo Divisore è un numero semplice, il che accade tutte le volte, che reso decuplo con uno zero innanzi, pur resta minore del Dividendo.

III.° Quando anche il Divisore è composto.

110. In tutti e tre poi questi casi può darsi, che il Divisore non sia esattamente contenuto nel Dividendo, e che perciò si abbia al fin dell'operazione un residuo. Così 2 in 7 sta 3 volte, e vi rimane 1 di resto, il che palesa che il 3 non è il quoto di 7 diviso per 2; ma di 7 diminuito di quanto indica il residuo 1, cioè di 6. Perciò in tal caso il quoto moltiplicato pel Divisore dà per prodotto il Dividendo meno il residuo; ossia conviene aggiungere al prodotto del quoto pel divisore anche il residuo, onde riottenere il Dividendo proposto.

111. Nel I. caso il quoto si ottien facilmente colla reale esecuzione delle successive sottrazioni. Presto giungiamo con tal espediente a conoscere, che il quoto di 24 diviso per 6 è 4, ec. Potremmo anche trovarlo facendo uso della tavola di Pitagora. Essendo nel caso nostro 6 il Divisore, si scende nella sesta colonna sino alla linea orizzontale ove si trova il 24, e la cifra 4 posta al principio di questa esprime il quoto di 24 diviso per 6; giacchè indica, che il 6 preso 4 volte dà 24, e che perciò in 24 è contenuto 4 volte. Se si cercasse il quoto di 50 diviso per 7, ci accorgiamo scorrendo la settima colonna, in cui contengonsi tutti i multipli di 7, che fra questi manca il 50, sicchè dedu-

ciamo, che non è esattamente divisibile per 7; ma poichè è compreso fra i due multipli di 7 il 49, e il 56, così è chiaro che il maggiore multiplo di 7, che contiene il 50 è 49; e la cifra 7, che trovasi a principio della linea orizzontale, ove trovasi 49 ci indica che nel 50 il 7 è contenuto 7 volte, e vi è 1 di residuo.

112. Nel II.° caso in cui il solo divisore è d' una cifra, si può porre in prattica un processo più breve delle successive sottrazioni, considerando i numeri decomposti ne' loro diversi ordini d' unità. Si tratti p. e. di dividere il 7854 per 3. Onde ottener l' intento fa d' uopo osservare quante volte il 3 può esser sottratto dal 7854, e ciò avrem conosciuto quando si sarà trovato quante volte il 3 è contenuto nelle 7 migliaja, 8 centinaja, 5 decine, e 4 unità, che sono tutte le parti costituenti l' intero dividendo, e che chiamansi i *dividendi parziali*.

Cominciando perciò dalla prima cifra a sinistra, che è il 7, si osservi che in 7 il 3 è contenuto 2 volte, e vi è 1 di residuo, o per dir meglio che in 7 meno 1 il 3 è contenuto 2 volte. Riflettiamo però che il 7 stando nel posto delle migliaja hà un valore 1000 volte maggiore di 7. Dunque nel 7 meno 1 il 3 sarà contenuto non 2 volte, ma un numero 1000 volte maggiore, perchè il quoto cresce egualmente col dividendo (104). Dunque la cifra 2 esprimente il quoto parziale dee aver dopo di se tanti zeri quanti ne ha il dividendo parziale cui appartiene; ed ecco che il semplice riflesso, che il quoto ingrandisce come il dividendo, e la nota proprietà delle cifre nel sistema decadico ci porta a conchiudere a colpo d' occhio che nelle 7 unità di migliaja diminuite di 1, cioè in 6000 il 3 è con-

tenuto 2000 volte, cognizione, che avrebbe richiesto senza questo compenso 2 mila sottrazioni.

L' unità di migliajo rimasta si unisca, per non trascurar nulla, alle 8 centinaja; ed avremo così 18 per 2.° parzial dividendo, in cui veggiamo, che il 3 contenuto 6 volte. Avvertendo però che il nostro 18 esprime centinaja, ed è perciò centuplo di 18 unità; centuplo esser dovrà anche il quoto 6, dovrà cioè aver dopo se tanti zeri quanti ne ha il dividendo parziale, cui spetta; e diverrà perciò .600, sicchè il 3 sta 600 volte in 18 centinaja.

Passiamo ora ad osservare quante volte il 3 è contenuto nel 3.° dividendo parziale, che è il 5 collocato nel rango delle decine, ed otteniamo 1 per quoto, e 2 di residuo. Ma 5 stando nel posto delle decine ha un valor decuplo: dunque decuplo esser debbe anche il quoto 1, sicchè in 5 meno due, ossia in 3 decine il 3 sta 10 volte.

Finalmente aggiugnendo le 2 decine residue alle 4 unità, onde non rimanga le menoma parte dell' intero dividendo, su cui non si sia esplorato quante volte il 3 è contenuto, avremo per 4.° dividendo il 24, in cui il 3 sta precisamente 8 volte.

Possiamo dunque conchiudere che nella somma di tutte le parti costituenti il 7854, il 3 è contenuto come qui sotto

In 6	mila	il 3 è contenuto	2000
In 18	centinaja		600
In 3	decine		10
In 24	unità		8
		Somma	2618

Dunque in tutto l' intero 7854 il 3 è contenuto 2618 volte.

E questa somma potea ottenersi implicitamente nello stesso processo della divisione, se i quoti parziali successivamente auti, si fossero segnati l' uno a destra dell' altro; e così diffatto si usa nella prattica della divisione, poichè in qualunque caso ogni quoto parziale, come abbiam dimostrato, ha tanti zeri dopo di se, quante ha cifre dopo di se il parzial dividendo, cui corrisponde, si trova cioè nel rango stesso delle sue unità, sicchè colla stessa disposizione con cui nel Dividendo succedonsi da sinistra a destra i diversi ordini di unità, che sono i dividendi parziali, che consideriamo, succedonsi egualmente i respettivi quoti parziali.

113. Accade talvolta, che la prima cifra a sinistra del Dividendo sia minore del Divisore. Così sarebbe, se fosse a dividersi 2836 per 4.

Non potendosi in tal caso osservare quante volte il 4 stia nella sola prima cifra 2, perchè più piccola di 4, convien marcare quante volte sta nel 28. Nel posto del quoto segnasi 7; avvertendo che per essere il 28 centuplo di 28 unità, anche il quoto 7 debbe esser centuplo. Non essendovi rimasto residuo alcuno da aggiungere alla prossima cifra 3 del dividendo, si esamini quante volte il 4 è contenuto in questo 2.° parziale dividendo 3. Non essendovi mai contenuto, ciò si esprime col porre al quoto a destra del 7 uno zero, affinchè il 7 acquistar possa quel valor centuplo, che debbe avere. Questo 3 rimasto si concepisca ora unito all'ultima cifra 6 del dividendo, e per 3.° parzial dividendo avremo 36, in cui il 4 sta 9 volte esattamente, onde segnasi 9 a destra dello zero nel quoto; e

non avendo più cifre al Dividendo, conchiudasi, che 709 è il quoto esatto di 2836 diviso per 4.

114. Dopo queste premesse ecco il prattico processo, che ne discende. *Si segna il divisore a destra del dividendo, da cui si separa mediante una linea verticale. Se ne tira quindi un' altra orizzontale appiè del divisore, onde sotto di essa segnare di mano in mano che si ottengono le cifre del quoto le une a destra delle altre* (112). *Ciò disposto, si comincia* 1.° *a veder quante volte il divisore è contenuto nella prima, o nelle prime due cifre del Dividendo, qualor la prima non lo contenga, e la cifra che marca quante volte vi è contenuto si segna nel posto del quoto.* 2° *Si moltiplica il divisore per questa cifra, e il prodotto si segna sotto il primo membro della divisione:* 3° *tirata una linea si fa la sottrazione, ed a destra del residuo si segna la cifra seguente del dividendo, onde avere il* 2° *parzial dividendo. Si opera su questo come sul primo; e così si continua, finchè sono esaurite le cifre tutte del dividendo coll' avvertenza, che quando un dividendo parziale non contiene il divisore, conviene segnar zero al quoto prima di abbassare al fianco della quantità rimasta la nuova prossima cifra del dividendo e se anche coll' aggiunta di quest' altra cifra il dividendo parziale fosse minore del divisore, conviene segnar zero al quoto prima di abbassarne un' altra, e tanti in somma quante cifre si abbassano prima d' ottenere un dividendo parziale, che contenga il divisore, affinchè sì la prima, che tutte le successive cifre ottenute al quoto abbian dopo di loro tanti ranghi quanti ne hanno i parziali dividendi cui corrispondono.*

Ecco qui sotto il processo dell' operazione dei 2 citati esempj .

Dividendo			Dividendo	
7854	3 Divisore		2836	4 Divisore
6	———		28	———
———	2618 Quoto		———	709 Quoto
18			036	
18			36	
———			———	
05			00	
3				
———				
24				
24				
———				
00				

115. Nel III.° caso , quand il divisore ancora è un numero composto , ha luogo lo stesso prattico processo or indicato , e solò due importanti osservazioni cadono in acconcio sul modo con cui si ottiene il quante volte il divisore è contenuto ne' successivi parziali dividendi; e queste rimarcheremo ne'due esempii seguenti .

Sia a dividersi per 49 il 343203 . Nel dato numero convien prendere a sinistra per 1.° parzial dividendo tante cifre quante son quelle del divisore, o una di più, se non bastano a contenerlo , come è appunto in questo caso, in cui osservar conviene quante volte il 49 sta in 343. E poichè a colpo d' occhio non possiamo conoscere quante volte tutto il 49 sia contenuto in tutto il 343, l' esame si fa parte per parte cominciando ad osservare quante volte le 4 decine del divi-

sore sono contenute nelle 34 decine del dividendo; e poichè risulta che vi son contenute 8 volte, e si hanno 2 decine di residuo, dopo aver mentalmente unite queste 2 decine residue alle 3 unità di questo 1.° dividendo parziale 343, convien osservare se anche in queste 23 unità, che sono rimaste nel 343 dopo avervi separato ciò che appartiene alle 4 decine prese 8 volte, sien contenute 8 volte le unità 9 del divisore. Ora il 9 non istà 8 volte in 23: dunque conchiudiamo, che nemmeno tutto il divisore 49, che risulta di decine e unità è contenuto 8 volte nel 343, subitochè non vi son contenute tutte le rispettive sue parti. Se il 49 non è contenuto 8 volte in 343, si esplora collo stesso metodo se vi è contenuto una volta di meno, cioè 7: e dopo che ci siamo assicurati, che realmente tutto il 49 è 7 volte contenuto in 343, a tenor del metodo (114) si moltiplica il divisore 49 pel quoto 7, ed il prodotto si sottrae dal 1.° parzial dividendo 343. Se il prodotto, che si debbe sottrarre si trovasse maggiore del parzial dividendo corrispondente, sarebbe ciò indicio d'un errore in più commesso nel rimarcare quante volte il divisore è contenuto nel rispettivo dividendo, giacchè non potrebbe esser contenuto 7 volte in 343 il 49, se preso 7 volte dasse un prodotto di lui maggiore: se all'opposto fatta la sottrazione, il residuo fosse eguale, o maggiore del divisore, ciò indicherebbe un'errore in meno, giacchè se il 49 prèso 7 volte, e quindi sottratto da 343 dasse un residuo non minor di 49, un'altra volta almeno oltre 7 vi sarebbe il 49 contenuto.

Fatta poi la debita sottrazione, a destra del residuo che nel caso nostro è zero si abbassa la seguente cifra 2 del dividendo; e si vede quante volte il diviso-

re 49 sia contenuto in questo 2.° membro di divisione, che in questo caso è il semplice 2; e poichè non vi stà mai, si segna al quoto un zero a fianco del 7 (114). Quindi segnata accanto al 2 la seguente cifra 0 del dividendo, si ha 20 per 3.° dividendo parziale, e poichè ne anche in 20 è mai contenuto il 49, si segna un' altro zero al quoto: si abbassa accanto al 20 l'ultima cifra 3 del Dividendo, e dopo aver visto, che in questo 4.° dividendo parziale 203 il 49 sta 4 volte, si moltiplica il 49 per 4, e il suo prodotto 196 si sottrae dal 203, e si ha 7 per residuo della divisione, e 7004 per quoto, come nel quì sottoposto esempio rilevasi.

```
Dividendo  343203   | 49  Divisore
           343     .| ———
           ————     | 7004 Quoto
            0203
             196
             ———
Residuo  7
```

116. Sia ora a dividersi per 199 il 19896. Anche in questo esempio convien prender per 1.° parzial dividendo una cifra di più di quelle del divisore, e osservar quante volte il 199 è contenuto in 1989; e qui cade in acconcio l'altra osservazione, che cioè il divisore non può esser mai contenuto più di 9 volte in alcuno dei dividendi parziali, poichè per esservi contenuto almen 10 volte, converrebbe, che il dividendo fosse almeno eguale al divisore con uno zero a destra, che fosse 1990 rispetto al nostro divisore 199, caso che non può darsi, perchè essendo stabilito, che allora so-

lo il dividendo parziale contener debba una cifra di più del divisore, quando un numero eguale non vale a contenerlo, vero è che un numero uguale al divisore accresciuto d'uno zero a destra contiene 10 volte il divisore, ma non è vero che esser possa il dividendo parziale, il quale in tal caso risulta d'una cifra di meno, cioè delle sole cifre eguali al divisore. Così p. e. il 1990 sebbene il più piccolo fra i numeri, che contengono più di 9 volte il 199, mentre qualunque altro di esso minore non giunge a contenerlo 10 volte, pure è troppo grande per servire da dividendo parziale, sicchè convien di esso prendere le sole prime tre cifre, che bastano per contenere esattamente una volta il 199.

Premesse queste notizie, quando per giudicar quante volte nel nostro esempio il divisore 199 è contenuto nel 1.° parzial dividendo 1989, noi passiamo ad esplorar partitamente quante volte la prima cifra del divisore 1 centinajo è contenuta nelle 19 centinaja del 1989, non dobbiam cominciar dal provare se tutto il numero stia 19 volte in tutto il numero, come sta un centinajo nelle 19; giacchè vano sarebbe cominciar la ricerca da un numero maggior di 9, quando si sa che un divisor qualunque non può esser contenuto più di 9 volte in qualunque parzial dividendo: si comincia perciò l'esplorazione dal 9 volte dicendo 1 in 19 sta 9 volte, e ne avanzan 10, che uniti alla seguente cifra 8 formano 108 decine. Anche in queste le 9 decine del divisore stanno 9 volte, giacchè prese 9 volte danno 81, che sottratto da 108 ci dà di rimanenza 27 decine, che unite alle 9 unità formano 279, ove non v'è dubbio, che vi sien contenute 9 volte le unità del divisore; e poichè le centinaja, decine, e unità del divisore 199 son tutte contenute 9 volte nelle rispettive parti del

1989, conchiudiamo che tutto il 199 sta 9 volte nel 1989. Si segna perciò 9 al quoto ; e si prosegue ad operare secondo gli indicati metodi, come qui sotto osserviamo .

Dividendo	19896	199	Divisore
	1791	———	
	————	99	Quoto
	1986		
	1791		
	————		
Residuo	195		

Metodi di divisione più compendiosi .

Ve ne sono de' generali per tutti e tre i notati casi di divisione : ve ne sono de' particolari in alcune circostanze del solo terzo caso .

117. I. Quando divisore , e quoto sono d'una cifra sola , il più sollecito espediente è l' imprimersi a memoria i quoti , che si possono avere dividendo i numeri d' una o due cifre per ciascun numero semplice , saper cioè che in 4 il 2 sta 2 volte; in 6 3 volte , in 8 4 volte , ec.

118. II. Quando il solo divisore è un numero semplice , p. c. il 2, il 3, il 4, ec. , giova segnare immediatamente sotto ciascuna cifra del Dividendo la sua metà , o terzo , o quarto , o la metà , terzo , o quarto del numero inferiore prossimo , quando la metà , o il terzo , o il quarto della cifra non è un numero intero, tenendo conto in tal caso della, o delle trascurate unità nel posto seguente , ove esse hanno un decuplo valore .

Onde divider per 2 il numero 625408 si dice: la metà di 6 è 3, che segnasi sotto il 6: la metà di 2 è

1, che poniamo sotto il 2: non potendosi dire la metà di 5, perchè non è dessa un intero, dicesi la metà di 4 è 2, che segnasi sotto il 5, e ne avanza 1, che unito al seguente 4 dà 14, onde la metà di 14 è 7, che ponesi sotto il 4: la metà di 0 è 0, che scrivesi sotto zero: la metà di 8 è 4, che si colloca sotto la cifra 8, sicchè

Dato il numero	625408,
la sua metà è	312704.

Onde divider per 3 il 721 dicesi: il terzo di 6 prossimo a 7 è 2, che scrivesi sotto il 7; e ne avanza 1, che unito al seguente 2 esprime 12; onde il terzo di 12 è 4, che segnasi sotto il 2: il terzo di 1 non è numero intero; e poichè non v' è quantità minor di 1, che aver possa per suo terzo un' intero: perciò esprimesi questa mancanza con uno zero, sicchè

Dato il numero	721,
Il suo terzo è	240
e vi è 1 di residuo.	

Si eseguono in simil modo le divisioni per 4, 5, 6, ec; ma divengono esse più difficili a misura che il divisore aumenta.

119. III. Quando tutti i termini della divisione sono numeri composti, se ne abbrevia il processo coll eseguire a memoria le sottrazioni de' prodotti del divisore pei quoti parziali dei rispettivi parziali dividendi, e segnando semplicemente i residui, come risulta dal sottoposto esempio

1758	|	39
198	|	——
———	|	45
00		

Dopo che si è veduto, che il primo parzial dividendo 175 contiene 4 volte il divisore 39, scritto al quoto il 4, cominciasi dal moltiplicare le unità 9 del divisore per 4, ed otteniamo 36, e siccome queste 36 unità non posson sottrarsi dalle sole unità 5 corrispondenti, che troviamo nel parzial dividendo, dalla prossima cifra 7 togliamo 4 decine, perchè 3 sole aggiunte al 5 formando 35 non basterebbero pella sottrazione del 36. Queste 4 decine unite al 5 fanno 45 unità, da cui togliendo le 36, si ha 9 di resto. Onde poi tener conto delle 4 decine, che sono state tolte alla cifra 7, in luogo di diminuire di 4 questa cifra, da cui si son prese, si aggiungono col pensiero al seguente prodotto delle 3 decine del divisore pella stessa cifra 4 del quoto; e perciò dopo aver detto 4 volte 3 fa 12, e 4 di ritenuta danno 16, veggiamo che tolto questo 16 dal 17 si ha di residuo 1, che si sarebbe egualmente ottenuto, se in vece si fosse tolto il solo 12 prodotto delle decine dalle decine 17 diminuite delle 4, che loro si erano tolte per portarle all'unità. A destra del residuo 19 si abbassa l'ultima cifra 8, e su questo 2.° membro di divisione 198 si opera egualmente: scritto infatti al quoto il quante volte in 198 sta il 39, cioè 5, si dice 5 volte 9 fa 45, onde giungere a 48 mancan 3, che segniamo sotto l'8: 5 volte 3 dà 15, e 4 di ritenuta 19; onde giungere a 19 nulla manca, e nulla si segna; onde il quoto è 45, e v' è 3 di residuo.

Similmente si agisce anche ne' casi *i* più complicati.

120. Gli indicati metodi di abbreviazione sono applicabili, qualunque sieno i termini della divisione. Ve ne è però un' altro da pratticarsi allora solo che il Dividendo e divisore terminano con dei zeri; giacchè alla fine di ciascun di essi togliendone tanti, quanti ve ne sono in quello che ne ha di meno, si impiccoliscono entrambi egualmente (33), e il loro quoto non si altera (106). Così in vece di dividere per 12000 il 240000 noi divideremo per 12 il 240 sicuri di avere il quoto stesso.

Usi, e applicazione della Divisione ai Problemi.

121. I problemi risolvibili per mezzo della divisione sono di due sorte. Infatti dato un tutto a dividersi, vi son de' quesìti in cui cercasi il *numero* delle sue parti, o una quantità, che ne dipende: e ve ne sono di quelli, in cui delle parti si cerca il *valore*.

Problemi, in cui cercasi il numero delle parti, o una quantità, che ne dipende.

I. Ricerca del numero di misure di un dato genere, che può ottenersi per una data somma, noto il prezzo d' una di esse.

122. *Si sono spese lire* 464. *in tanto panno del valore di lire* 16 *il braccio. Quante braccie se ne sono provvedute?* Risultato 29.

E' chiaro che le braccia, e in genere le misure sono tante, quante volte il valor d' una misura, cioè

lire 16 è contenuto in 464; son cioè precisate dal quoto di 464 diviso per 16.

II. Ricerca del numero di monete, che frutta un dato capitale, noto il capitale, che frutta una moneta sola.

123. *A ragion del guadagno d' una lira per ogni* 90, *che guadagno si avrà da lire* 22950? — Risultato; lire 255.

Le lire di guadagno denno esser tante quante volte 90 lire di capitale son contenute in 22950, e perciò son precisate dal quoto di 22590 diviso per 90.

III. Riduzione di unità ad altre di diversa specie relativa più grandi, come di soldi in lire, pollici in piedi, minuti in ore, ore in giorni, ec.

124. *Quante lire formano* 37840 *soldi?* — Risultato: lire 1892.

(Soldi 20 fanno una lira).

Ben si comprende, che le lire son tante quante volte il 20 soldi, che forma una lira è contenuto nel 37840; e perciò son precisate dal quoto di 37840 diviso per 20; e che in genere il numero delle unità più grandi si ottiene dividendo il numero delle unità date per quel numero, che di esse si esige per formar l' unità maggiore.

125. *Quanti minuti primi, ore, e giorni son contenuti in* 31556929 *secondi?* — Risultato: Minuti primi 525948 più 49 secondi, ovvero ore 8765, più 48 primi, più 49 secondi, ovvero giorni 365, più 5 ore più 48 primi, più 49 secondi, ossia un'intero anno.

126. *Quanto tempo si richiede per contare un Bilione, posto che per ogni* 3 *unità si esiga un se*

condo ? — Risultato : anni 10562 , giorni 336, ore 5, minuti primi 13, secondi 55 si esigono per contare un Bilione meno 1.

Questo risultato si ottiene riflettendo , che vi vogliono tanti secondi quante volte il 3 entra in un bilione: e quindi riducendo i secondi ad anni , giorni , ec.

127. Prendendo ad esame tutti questi , e simili esempii troviamo che la cosa cercata è eterogenea al dividendo, ed è determinata in grazia delle condizioni del quesito dal *quoto* , ossia dal quante volte il valor dato d' una parte è contenuto nel tutto, ossia dal *numero* delle parti , che è un numero non concreto (95) , mentre dividendo, e divisore sono concreti, e omogenei .

Problemi in cui cercasi il valor delle parti .

I. Ricerca del prezzo d' una cosa noto il prezzo di un certo numero di esse.

128. *Lire 16512 è stato il valore di 344 chilogrammi di Canella . Quanto vale il Chilogrammo ?* — Risultato : lire 48.

Essendo lire 16512 il valore di 344 chilogrammi, un chilogrammo solo sarà 344 volte più piccolo di 16512, ossia sarà il quoto di 16512 diviso per 344, che è il numero dato delle parti .

II. Ricerca del prezzo d' una misura noto quello d' una più grande .

Questo caso è solo in apparenza diverso dal sopracitato , perchè una misura più grande equivale ad un certo determinato numero delle misure date .

129. *L' essenza di rose che si è pagata soldi*

4320 *la libra , quanto vale il denaro ?* — Risultato: soldi 15.

(Denari 24 fanno l' oncia , e oncie 12 la libbra).

III. Ripartizione : di un tutto qualunque in un dato numero di parti eguali .

130. *Quanto tocca a ciascuno di 3906 individui che deggiono ripartirsi un guadagno , una perdita , un' eredità , un' elemosina , di lire* 28125074880 ? Risultato: lire 7200480.

131. E in tutti questi, e simili casi si scorge, che la cosa cercata , ossia il quoto è una quantità concreta omogenea al dividendo, perchè esprime il valore delle sue parti ; e il loro numero , che è una quantità non concreta , che esprime il divisore , vien precisato in forza delle condizioni del problema da una quantità al Dividendo eterogenea .

Applicazioni della divisione alla ricerca di tutti i divisori di un dato numero ,

132. Dopo de' casi concreti merita d' essere rimarcata l' applicazione della divisione ad un caso puramente astratto , di cui in seguito conosceremo l' importanza, la ricerca cioè di tutti i numeri , che esattamente son contenuti in un dato altro numero , ossia la ricerca di tutti i suoi divisori .

Vi sono dei numeri , come 1, 2, 3, 5, 7, 11, ec. che non sono prodotti dalla moltiplicazione d' altri numeri minori , ossia che non hanno altri divisori , altra misura che l' unità e loro stessi , e si chiamano *Primi* ; e ve ne sono di quelli , che hanno de' particolari diviso-

ri oltre l' unità, e se stessi, che sono cioè decomponibili in fattori, e si chiamano *numeri prodotti*.

Passando ora a far l' analisi de' numeri per rapporto ai loro fattori, il mezzo troviamo di rilevare tutti i lor possibili divisori. Sia p. e. 180 il numero dato. Cominciamo a dividerlo pel 2 numero primo il più semplice dopo l' unità; e si avrà 90; sicchè 180 è uguale a 2 per 90. Il 90 dividesi pur esso per 2, e ci dà 45: onde 90 è uguale a 2 per 45; e perciò 180 è uguale a 2 per 2 per 45. Non essendo più divisibile per 2 il quoto ottenuto 45, si divide per 3 e si ha 15, che pur si divide per 3, e ci dà 5 per quoto, numero *primo*, indivisibile ulteriormente; e perciò il 45 è uguale a 3 per 15, ovvero a 3 per 3 per 5; e quindi 180 provato eguale a 2 per 2 per 45 è uguale a

2 per 2 per 3 per 3 per 5

Questi 5 fattori essendo numeri primi si chiamano *i fattori, o divisori semplici* del numero 180; ed è chiaro, che in simil guisa qualunque altro numero prodotto si può decomporre ne' suoi fattori *semplici, o primi, tentando la divisione del dato numero, e quindi de' successivi quoti, che si ottengono per i successivi numeri primi 2, 3, 5, 7, ec, proseguendo a dividere per lo stesso numero quanto si può, prima di passare agli altri*.

Trovati così tutti i divisori semplici di un dato numero, è ben facile rinvenirne i composti, poichè dalle osservazioni fatte (55) risulta, che il 180 essendo eguale a 2 per 2 per 3 per 3 per 5, qualunque prodotto risultante dai suoi fattori primi combinati a due, a due a tre a tre, ec, si può riguardare come fattore, o divisor composto del numero dato; combinando perciò in tutti i modi possibili i fattori semplici del 180, ottenia-

mo tutti i possibili suoi divisori composti, come la seguente tabella ci offre.

Dividendi	Divisori semplici	Divisori composti	di fattori combinati
180	2	4, 6, 10,	a 2 a 2.
90	2	9, 15.	
45	3	12, 20, 18,	a 3 a 3.
15	3	30, 45,	
5	5	36, 60, 90,	a 4 a 4.
		180.	a 5 a 5.

Nella stessa guisa trovansi i divisori di 84.

Dividendi	Divisori semplici	Divisori composti	di fattori combinati
84	2	4, 6, 14, 21	a 2 a 2.
42	2	12, 28, 42	a 3 a 3.
21	3	84.	a 4 a 4.
7	7		

133. Esaminando i divisori tanto semplici, che composti de' due numeri 180, e 84, ne troviamo diversi appartenenti ad entrambi: tali sono il 2, il 3, il 4, il 6, il 12; e perciò questi si chiamano fattori, o divisori comuni di 180, e 84; ed il 12, che è il più grande di tutti chiamasi *massimo comun divisore*.

Vi sono però de' numeri, che sebben sien *prodotti*, e non *primi*, sebben cioè abbiano dei divisori, pure non ne hanno alcuno comune, come 12, e 35, e questi si chiamano *primi tra loro*.

134. E poichè nella ricerca dei divisori di un dato numero convien divider questo pei successivi numeri semplici, che il partiscono esattamente, perciò giova aver de' criterii per esplorare, se il dato numero sia o no esattamente divisibile pei diversi numeri semplici prima di procedere all' effettiva divisione, ed eccone alcuni.

135. *Divisibili per* 2, sono tutti i numeri, che terminano con una delle cifre o, 2, 4, 6, 8, poichè qualunque sia il numero, che per 2 si divida, quando siamo alle decine non può aversi, che o zero, o 1 di residuo; e perciò nella nostra ipotesi l' ultima divisione dee cadere o sovra 0, 2, 4, 6, 8, se niun resto è risultato dalla divisione delle decine, o sui nnmeri 10, 12, 14, 16, 18, se vi è stato 1 di residuo; e tutti questi numeri son per 2 divisibili.

I numeri esattamente divisibili per 2, perchè ripartibili in parti eguali, o pari diconsi numeri *pari*, e quindi *impari* quelli, che per 2 non dividonsi. Quindi eccettuato il 2, tutti i *pari* sono numeri *prodotti* da un dato numero moltiplicato pel fattore 2, che è a tutti comune, e per conseguenza tutti i numeri *primi* eccettuato il 2 son compresi nella serie degli *impari*, sono cioè tutti que' numeri impari, che decomporre non si possono in fattori più piccoli.

136 *Divisibili per* 5 sono tutti que' numeri, che terminano o con zero, o con 5; poichè quando in essi giungiamo alla divisione delle decine per 5, il resto dovendo esser minore del divisore 5, non può esser altro che o zero, o uno, o dne, o tre, o quattro

decine, di modo che se a tenor dell'ipotesi l'ultima cifra o è zero, o è un 5, l'ultima divisione non può cadere, che sui numeri 0, 5; 10, 15; 20, 25; 30, 35; 40, 45 divisibili tutti per 5.

137. Divisibili per 9 son tutti que' numeri, la somma delle cui cifre prese nel loro valore assoluto è divisibile per 9. Infatti i numeri decadici 10, 100, ec. si possono decomporre in 9 più 1, 99 più 1, 999 più 1, ec: dunque essendo divibili i numeri 9, 99, 999 per 9, ne segue, che i numeri 10, 1 00, 1000, ec, divisi per 9 danno 1 di resto. Ma ogni numero espresso da una sola cifra significativa seguìta da zeri può decomporsi in numeri decadici, poichè, p. e. 30 è uguale a 10 più 10 più 10; 200 è uguale a 100 più 100: dunque se si divide 200, ossia 100 più 100 per 9, il resto sarà 1 più 1, ossia 2; se si divide 30, ovvero 10 più 10, più 10, il resto sarà 1 più 1, più 1, ossia 3; e in generale un numero qualunque espresso da una sola cifra significativa seguìta a destra da zeri, se si divide per 9 dà un resto eguale alla stessa cifra significativa.

Ora un numero qualsiasi, decomponendolo in unità, decine, centinaja, ec. si vede formato dalla unione di più numeri espressi da una sola cifra significativa: p. e. 528 è uguale a 500 più 20, più 8; e ciascuno di questi numeri diviso a parte dà per quel che si è or dimostrato un resto eguale alla sua cifra significativa, il 5 centinaja dà per resto 5, il 2 decine dà per resto 2, l'8 unità dà per resto 8; cosicchè se la somma di tutti questi resti, ossia di tutte le cifre componenti il numero, che è 15 nel nostro caso non è divisibile per 9, è chiaro, che anche l'intero numero non è per 9 divisibile, ma se la somma di tutti i resti, ossia di tutte le cifre componenti il numero è per

9 divisibile, come accade nei numeri 3042, 585, 88415, ec, la somma delle cui cifre è 9 nel 1.°, 18 nel 2.°, e 27 nel 3.°, allora ogni resto in grazia della divisibilità dell' insieme loro, svanisce; ossia divisibile per 9 è anche il numero intero, sebbene nol sieno le diverse sue parti, o unità de' diversi ordini separatamente prese.

138. *Divisibili per* 3 son parimenti tutti i numeri, la somma delle cui cifre è per 3 divisibile; e la dimostrazione è simile all' antecedente. V' è solo da avvertirsi, che tutti i numeri divisibili per 9 il sono anche per 3; non così però viceversa.

139. *Divisibili per* 6 sono tutti i numeri, che si dividono sì per 3, che per 2. Infatti se si dividono per 3, e per 2 hanno il 3, e il 2 nel numero de' loro divisori, o fattori primi; e perciò denno esser divisibili anche pel loro prodotto, ossia per 6 (132).

Estrazioni di Radici

140. Un' altra operazione diretta a diminuire la quantità è quella per la quale dato un numero, e considerato come potenza, giungiamo a scuoprire quel fattore, che moltiplicato una, o più volte per se medesimo la produce, cioè l' *Estrazione di radici*, così detta perchè chiamasi *radice* quel fattore, che moltiplicato una o più volte per se medesimo produce il numero dato: e la radice dicesi seconda, terza, ec, secondo che va scritta o due, o tre, ec. volte come fattore per produrre il numero dato. Così risultando 81 da 9 per 9, si dice, che 9 è la radice seconda di 81; e risultando dal 3 scritto come fattore 4 volte, cioè da 3 per 3 per 3 per 3, si dice, che 3 è la radice quarta di 81.

141. Il processo dell' estrazione delle radici non è però una numerica operazione diversa dalle altre fin qui esposte, ma è un complesso di esse diretto da alcune nozioni, che in seguito ci somministrerà l' Algebra; e poichè anche l' operazione ad essa opposta, cioè l' elevazione a potenza non differisce affatto per l' *esecuzione* dalla moltiplicazione, conchiuder possiamo circa le operazioni sui numeri, che

Le operazioni sono 6 se si hanno in mira tutte le *particolarità* sotto le quali può esser concepito l' aumento, o diminuzione della quantità, cioè *Addizione*, *Moltiplicazione*, *Elevazione a potenza*; e le opposte *Sottrazione*, *Divisione*, *Estrazione di radici*.

Le operazioni sono 4 se si riguardano solo per rapporto alla diversità de' *metodi*, che si prattieano, cioè *Addizione*, e *Moltiplicazione*, *Sottrazione*, e *Divisione*.

Le operazioni sono 2 *sole* se si contempla puramente la loro *indole*, cioè l' *Addizione*, che aumenta, e la *Sottrazione*, che diminuisce; mentre le Moltiplicazioni, e Divisioni non sono, che compendiose addizioni, e sottrazioni.

EPILOGO

Sottrazione

Indole della sottrazione. In essa distinguonsi Minuendo, Diminutore, e Residuo, o Differenza: (83, ec.)

Proprietà del Residuo. Unito al Diminutore dà il Minuendo (85).

Processi della sottrazione. Non può eseguirsi che colla successiva deduzione dell' unità quando I. il diminutore è semplice; ed ammette un metodo compendioso quando II. il diminutore è composto (86, ec.)

Applicazione della Sottrazione ai Problemi. Appartengono ad essa tutti quelli, in cui cercasi un residuo, o eccesso, o differenza (91, ec.)

Divisione

Origine, e indole della divisione. Nelle divisioni di un tutto o si cerca il *numero* se è noto il valore, o il *valore* se è noto il numero delle sue parti; e l' intento, che è il quoto, si ha sempre col sottrarre dal tutto, che è il dividendo, il noto valore o numero delle parti, che è il divisore quante volte vi è contenuto; onde il Dividendo è il prodotto del quoto pel divisore (95, ec.)

Proprietà del quoto. E' uguale ad 1 quando il divisore eguaglia il dividendo: è uguale al dividendo, quando 1 è il divisore (103). *Cresce* per quanto viene ingrandito il dividendo, e impiccolito il divisore (104); *diminuisce* viceversa (105); *non s' altera* se dividendo, e divisore si moltiplichino, o dividano per una quantità stessa (106).

Processi della divisione. I. Quando il divisore è d' una cifra, e il dividendo minore del suo decuplo, la divisione non si esegue che colla reiterata sottrazione, al che giova la tavola pitagorica (111): II. Quando il solo divisore è semplice, e III quando anche il divisore è composto vi sono metodi particolari (112, e seg.)

Metodi di divisione più compendiosi. Ve ne sono per ciascuno dei 3 casi in genere, e in particolare pel terzo, quando dividendo, e divisore hanno zeri alla fine (117, e seg)

Usi, e applicazioni della divisione ai Problemi. Per quelli, che si risolvono colla ricerca del *numero* delle parti, il dividendo e il divisore sono omogenei, e il quoto è un numero non concreto precisato da una quantità nota eterogenea al dividendo (127). Per quelli in cui cercasi il *valor* delle parti, il quoto è omogeneo al dividendo; e il divisore è un numero non concreto precisato da una quantità nota eterogenea al dividendo (131).

Applicazione della divisione alla ricerca di tutti i divisori de' numeri. I numeri sono o *primi*, o *prodotti*; e di questi si trovano tutti i divisori semplici, e composti (132). Due numeri sebben prodotti possono esser *primi tra loro* (133); e vi sono de' criterii per conoscere se i numeri son divisibili per varii numeri semplici (134, e seg.)

Estrazione di radici.

E' un' operazione inversa all' elevazione a potenze (140).

ARTICOLO III.

Criterii , o prove delle operazioni aritmetiche .

142. I processi delle operazioni, che per rapporto ai metodi abbiamo distinto in numero di 4, tutti consistono nel far parte a parte ciò che non può farsi nel tutto insieme in grazia della limitazione del nostro spirito, che non sa afferrare che poche idee, e rapporti alla volta. Infatti in tutte si agisce partitamente sulle unità, decine, ec, riguardo avendo al valore, che le cifre hanno, e a quello, che acquistano a tenor de' posti in cui sono, o in cui si trasportano, tutto essendo al sistema decadico appoggiato il maneggio delle aritmetiche operazioni. Possono però queste dare accesso ad errori, non già perchè d' errore sieno suscettibili i metodi, che sono basati sovra sicuri inconcussi principii; ma perchè può la memoria tradirci in que' risultati, che nelle diverse particolari operazioni ad essa chiediamo. Necessita perciò aver de' criterii per verificare se le operazioni sieno bene eseguite; e questi in altro non consistono, che in operazioni inverse a quelle, della cui esattezza si dubita.

143, Ed infatti l' addizione si prova colla sottrazione, togliendo cioè successivamente in ordine inverso dalle rispettive parti della somma ottenuta tutte le somme parziali delle unità dei diversi ordini, che la costituiscono, mentre se l' operazione è stata ben eseguita, non dee ottenersi alcun resto. Eccone un' esempio.

397
290
789
————
1476
210

Si addizionano primieramente i numeri della prima colonna a sinistra, e la loro somma 12 si sottrae dal 14 parte della somma totale, che a questa colonna corrisponde. La differenza 2 proveniente da ciò, che sulla colonna delle decine si è ritenuto, ed aggiunto a questa terza colonna delle centinaja, si scrive al di sotto di essa, e mentalmente unita alla cifra 7 indicante le decine della somma totale ci dà 27 decine, da cui si toglie la somma della colonna delle decine, che ascende a 26. Il residuo 1, che ci esprime ciò, che fu ritenuto sulla colonna dell' unità per aggiungerlo alle decine nella prima operazione, si scrive sotto la colonna delle decine; e mentalmente unito alla cifra 6 ultima del risultato ci dà 16, che debbe esattamente esprimere la somma de' numeri componenti la colonna delle unità, poichè nella eseguita operazione questa somma non potea essere ingrandita dalle unità ritenute sulla colonna posteriore, non essendovene altre. Se dunque l' operazione è ben fatta, sottraendo da questo 16 la somma delle unità, zero esser debbe il residuo.

Per far dunque la prova dell' addizione *convien sommare di nuovo i numeri di ciascuna colonna cominciando dalla prima a sinistra, e toglier la somma da quella parte del già ottenuto risultato, che le corrisponde, scrivervi sotto il resto, che si trova, e mentalmente aggiungerlo come decina alla cifra seguente a destra del risultato, e da questo numero*

sottrarre la somma, che ci dà la colonna corrispondente, e così di seguito; e se l'operazione è fatta bene, nulla dee rimanere nella sottrazione delle unità.

144. La sottrazione si prova coll' addizione, poichè se l' ottenuto residuo è giusto, unito al sottraendo dee formare il minuendo (85).

145. La moltiplicazione viene verificata dalla divisione, poichè se l' ottenuto prodotto è esatto, dividendolo per uno de' suoi fattori dee risultar l' altro (98).

146. La divisione all' opposto vien verificata dalla moltiplicazione, poichè il quoto ottenuto, se è il vero, moltiplicandolo pel divisore dee riprodurre il dividendo (102).

CAPO IV.

Nozioni preliminari dell' Algebra.



ARTICOLO I.

Origine, e distintivi caratteri dell' Algebra.

147. Due cose occorrono sempre qualunque sieno i Problemi, che vogliamo risolvere: 1.° conoscere quali operazioni convenga porre in prattica per ottenere ciò che si ricerca, ossia la parte *teorica*: 2.° la reale esecuzione delle medesime, ossia la parte *prattica*. Su questa, che tutta consiste nell' applicazione delle regole stabilite pelle 4 fondamentali numeriche operazioni non ha luogo rilievo alcuno: ma rapporto alla parte teorica fà d' uopo rimarcare, che se in tutti i Problemi, che abbiamo sciolto fin' ora, essa è stata un' inda-

gine di lieve momento, perchè portata appena la nostra riflessione sulle relazioni, che passano tra le cose note, e le ricercate, in forza di un semplicissimo ragionamento abbiamo veduto dover essere le richieste incognite il semplice risultato o d' un addizione, o sottrazione, o moltiplicazione, o divisione di quantità tutte note, lo stesso non può dirsi di qualunque altro quesito, che presentato ci venga, mentre ve ne sono di quelli per i quali fa d' uopo scorrere per una trafila di ragionamenti prima di giungere ad un risultato tale, che a colpo d' occhio ci offra (come accade in tutti i già sciolti problemi di numerica) per quali operazioni si giunga all' intento.

148. Se p. e. ci si dicesse = *Giulio, e Marco non rammentano il numero delle lire, che ciascuno di essi perdette al giuoco: ricordan solo che la somma delle perdite di entrambi fu di lire 84; e che Giulio perdette lire 12 più di Marco. Quanto perdettero entrambi?* =

Eccoci ad un quesito, in cui non veggiamo a primo aspetto come ottenere i due numeri, che si cercano con una o addizione, o moltiplicazione, o sottrazione, o divisione, che nei già sciolti problemi numerici abbiam potuto tosto eseguire sulle loro quantità note. Dirigendo però la nostra riflessione sulle condizioni del Problema, notiamo prima d' ogni altro, che in esso *si cercano due numeri l' uno maggiore l' altro minore, la cui somma è 84, la cui differenza è 12.*

Osserviamo in seguito, che il numero maggiore, o la perdita di Giulio è uguale al numero minore ossia alla perdita di Marco, più la loro differenza, che è 12.

E da ciò segue, che se il numero minore fosse conosciuto, coll'aggiungervi la data differenza 12, si avrebbe tosto il numero maggiore, sicchè trovato quello, tosto noto si rende anche il valore di questo.

Cerchiamo dunque il numero minore, e partiam dal riflesso che

Il numero minore più il numero maggiore formano la data somma, che nel nostro caso è 84.

Se alle parole *numero maggiore* si sostituisca l' espressione equivalente, cioè *il numero minore più la differenza* 12 nella ora esposta proposizione, essa si trasformerà in quest' altra.

Il numero minore, più il numero minore, più la differenza 12 forma la somma 84.

Espressione, che può enunciarsi più compendiosamente così

Due volte il numero minore, più la data differenza 12 forma la somma 84,
dalla quale frase deduciamo, che

Due volte il numero minore soltanto è uguale alla data somma 84 diminuita della differenza 12.

E quindi, poichè le metà di cose eguali sono eguali anch' esse,

Una volta il numero minore è uguale alla metà della somma 84, meno la metà della differenza 12, è cioè uguale a 42 meno 6, ossia a 36.

E poichè il numero maggiore è uguale al minore più la differenza, sarà perciò eguale alla metà della somma 84 meno la metà della differenza 12, più la differenza 12; sarà cioè eguale alla metà della somma 84, meno la metà della differenza 12, più due metà della differenza 12, ovvero sarà eguale alla metà della somma

84, più la metà della differenza 12, sarà cioè 42 più 6, ossia 48.

149. Per giunger dunque a conoscere nell'enunciato Problema, che il numero minore, o la perdita di Marco è 36, il maggiore, o la perdita di Giulio è 48, ben ponderate le sue condizioni è stato d'uopo di scorrere per una serie di frasi esprimenti ciascuna un nuovo rapporto che immediatamente scende dall'antecedente, ed il medesimo far conviene in Problemi di simile indole, finchè siam giunti ad un'ultima frase concepita in questi termini = *L'incognita eguaglia la somma, o la differenza, o il prodotto, o il quoto delle tali, e tali note grandezze* = frase, che ci fa conoscere ottenersi l'incognita per qualcuna di quelle operazioni, che già sappiamo eseguire sui numeri,

Or questa trafila di monotoni ragionamenti annoja la mente; e la stanca, e l'opprime producendo una confusione la più enorme quando in Problemi più difficili si rende tanto più complicata, e più lunga. Di quì è nato il bisogno di abbreviare le espressioni per giungere con più facilità, e sollecitudine ai risultati; e poichè negli accennati ragionamenti d'altro non si parla, che delle *quantità* note, e ignote del Problema, e delle *relazioni* colle quali esse stanno tra loro connesse, così l'intento è allora ottenuto, quando si sarà trovato il modo di abbreviare l'espressione sì delle une, che delle altre.

150. Le prime rimarchevoli modificazioni, che si sono introdotte sono necessariamente cadute sulle quantità incognite. Infatti per rapporto alle quantità note il più naturale espediente, che a principio si è preso, è stato quello di esprimerle per que' determinati numeri, che l'esempio ci offre, e che costituiscono il

caso particolare del problema. Così nel nostro caso invece di dire = *la somma data de' due numeri ignoti* = dir possiamo 84; e possiamo dir 12 in vece di dire = *la differenza data fra i due numeri ignoti* = tali essendo i valori di queste quantità nel caso particolare preso ad esempio. Non così però possiamo contenerci colle quantità incognite, poichè con cifre, che determinano il rapporto delle grandezze all' unità siamo impossibilitati ad esprimere grandezze, in cui questo rapporto si ignora. Perciò piuttosto che indicare le cose, che si cercano col nome di *quantità ignote*, espressione ben lunga, e non valevole poi a distinguerle, quando sono più in uno stesso problema, si è pensato di ricorrere in vece a qualche segno di convenzione indipendente da ogni valore particolare atto a semplicemente risvegliare l' idea d' una quantità indeterminata, senza cioè, che sia precisato il suo rapporto all' unità; e tra i varii, che si saria potuto addottare si sono scelte le lettere dell' alfabeto, come le più facili ad essere per abitudine delineate. Così il numero maggiore ignoto si può chiamar y, il minore x.

151. Ma nelle espressioni de' ragionamenti, che far dobbiamo sui problemi prima di passare alla parte prattica, non per altro occorre il bisogno di nominare le quantità incognite, che per esprimere i rapporti, che hanno colle quantità note, con cui son vincolate o per somma, o per moltiplicazione, ec. Or poichè sulle quantità, che non si conoscono queste operazioni sono ineseguibili, siamo necessitati a indicarle, e per farlo con maggior brevità, piuttosto che servirci delle espressioni *aggiunta a*, *diminuito di*, *moltiplicato per*, *eguale a*, ec, che vediamo spessissimo ripetute nei cita-

gi ragionamenti, si è pensato di rappresentare ancor esse con dei particolari concisi segni di convenzione.

Così per indicare, che due quantità sono eguali, si pone tra le loro espressioni il segno =, che significa *eguale*

Per esprimere l' ineguaglianza fra due quantità si impiegano i segni < o >, facendo sì che l' apertura sia rivolta verso la quantità maggiore; sicchè $x > 10$ significa x *maggiore* di 10; $x < 20$ significa x *minore* di 20.

Per accennare l' addizione si usa il segno +, che si pronunzia *più*.

Per la sottrazione si usa il segno —, che significa *meno*.

Per additare la moltiplicazione si adopera il segno ×, che significa *moltiplicato per*, ponendolo in mezzo al moltiplicando che si scrive a sinistra, e al moltiplicatore, che si scrive a destra.

Pella divisione si scrive il divisore sotto il dividendo, separandolo con una linea.

Così $\frac{4}{2}$ significa 4 *diviso per* 2.

152. Or se ci facciamo di nuovo a risolvere il dato problema, facendo uso de' nuovi segni introdotti e rapporto alle quantità, e alle lor relazioni, abbiamo dalle condizioni.

$$x + y = 84$$

ed essendo $y = x + 12$, sostituendo nel superior risultato ad y il suo equivalente, avremo

$$x + x + 12 = 84$$

ovvero $$2x + 12 = 84$$

e rilevandosi da questa espressione, che a $2x$ conviene aggiungere 12, perchè sia eguale a 84, è chiaro, che la sola quantità $2x$ è eguale a 84 diminuito di 12, avremo cioè

$$2x = 84 - 12 = 72.$$

onde $$x = \frac{72}{2} = 36.$$

ed essendo $y = x + 12$

avremo $y = 36 + 12 = 48.$

ed ecco trovati i valori dei due numeri incogniti maggiore, e minore cogli stessi ragionamenti di prima, sol che espressi in un assai più laconico linguaggio.

153. Osserviamo però, che questi ottenuti numeri 36, e 48 non convengono che al caso particolare, in cui la somma de' due numeri cercati esser debba 84, e la differenza 12; mentre i ragionamenti in parole avendoci portato a conoscere, come i numeri incogniti dipendano e si ottengano dai numeri dati, *qualunque essi sieno*, ci offrono perciò il modo di risolvere tutti i casi particolari possibili, che il Problema comprende. Questo prezioso vantaggio, che i ragionamenti in parole ci danno si è da noi perduto nel nostro nuovo linguaggio, perchè abbiamo espressa la *somma data dei due numeri ignoti*, *e la loro differenza* per mezzo dei numeri 84, e 12, che esprimono un valore determinato per un solo fra i tanti casi particolari, che abbraccia il Problema. Eseguendo infatti su questi numeri tutte le operazioni, che di mano in mano ragionando ci si offrono, giungiamo ai risultati 36, e 48 senza più ravvisar traccia alcuna del come si sieno essi ottenuti dalle quantità date 84, e 12.

Perciò se ci si presentasse un' altro caso particolare del Problema medesimo, se volessimo conoscere due altri numeri, la cui somma fosse p. e. 100, e la differenza 22, i valori 36, e 48 ottenuti nell' esempio antecedente non ci servon di norma alcuna, e conviene, che ripetiamo la stessa serie di raziocinii fatta pocanzi per ottenere l' intento; mentre se ci atteniamo all' ultimo risultato dei ragionamenti in parole, che ci dimostra il numero minore eguale alla semisomma meno la semidifferenza, e il maggiore uguale alla semisomma più la semidifferenza, troviamo subito, che in questo secondo caso

il numero minore è $\frac{100}{2} - \frac{22}{2} = 50 - 11 = 39$;

e il numero maggiore è $\frac{100}{2} + \frac{22}{2} = 50 + 11 = 61$

154. V' è però il mezzo di profittare de' vantaggi che si hanno dagli ultimi risultati de' ragionamenti in parole, che sono tante regole prattiche estensive a tutti i casi pasticolari del dato Problema senza rinunciare alla brevità, che ci arrecano i nuovi segni introdotti. Infatti se noi 1.° dopo aver espresse con lettere le quantità incognite: 2.° dopo avere indicati i loro rapporti colle quantità note per mezzo di concisi appositi simboli, facciamo anche un passo più oltre, ed in vece di più esprimere le quantità note del Problema coi numeri, che appartengono al caso particolare preso ad esempio, passiamo in vece 3.° ad esprimer anch' esse con dei segni indipendenti da ogni determinato valore, cioè con le lettere dell' alfabeto a riserva delle ultime, che si sono per convenzione riserbate per la indicazione delle quantità incognite, ogni incoveniente allora spa-

risce . e le frasi del nuovo linguaggio sono sino all' ultimo risultato una fedel traduzione de' ragionamenti in parole.

Ed in vero se allorchè le quantità note sono espresse in numeri, per mezzo delle operazioni, cui si assoggettano essi scompariscono, e nuovi ne appajono nelle frasi successive, e nell' ultimo risultato, senza che nulla ci manifesti con che operazioni ad essi siam giunti, al contrario quando le quantità note sono espresse con lettere, non potendosi sulle lettere *eseguire*, ma solo *indicàre* dei calcoli; esse passano senza alterazione veruna da una frase all' altra sino all' ultimo risultato, il qual perciò mostra sempre quali operazioni convenga fare sulle quantità date per ottenere l' incognita.

Così applicando le lettere anche alle quantità note nel proposto Problema (148), si può esso indicare in un modo generale così. *Trovar due numeri, la cui somma sia s, e la cui differenza sia d.*

Proseguendo ad indicare il numero minore con x, e con y il maggiore, le condizioni del problema ci danno $x + y = s$; ed $y = x + d$.

Sostituendo l' equivalente di y, cioè $x + d$ nella prima espressione, avremo $x + x + d = s$

ovvero $2x + d = s$

e sottraendo d da ambe le parti, si ha

$$2x = s - d$$

e quindi $$x = \frac{s}{2} - \frac{d}{2}$$

Se traduciamo in linguaggio ordinario quest' ultimo risultato, sostituendo le parole, e le frasi, che so-

no per convenzione rappresentate dalle lettere, e dagli altri segni, che esso contiene, noi abbiamo la regola stessa, che si è trovata coi ragionamenti in parole, che cioè = *Il numero minore è uguale alla semisomma meno la semidifferenza* =

Se nell' espressione $y = x + d$ sostituiscasi ora ad x il suo valore $\frac{s}{2} - \frac{d}{2}$,

avremo $$y = \frac{s}{2} - \frac{d}{2} + d\,;$$

e poichè $d = \frac{d}{2} + \frac{d}{2}$,

avremo $$y = \frac{s}{2} - \frac{d}{2} + \frac{d}{2} - \frac{d}{2},$$

dalla qual'espressione togliendo $-\frac{d}{2} + \frac{d}{2}$, perchè si distruggono, resta

$$y = \frac{s}{2} + \frac{d}{2}$$

frase, che tradotta pur essa in parole ci mostra che = *Il numero maggiore è uguale alla semisomma più la semidifferenza* =.

Questi ultimi risultati ottenuti

$$x = \frac{s}{2} - \frac{d}{2} \mid y = \frac{s}{2} + \frac{d}{2}$$

pella proprietà, che hanno di esser generici, di darci

cioè la soluzione generale del problema per tutti i casi possibili, ossia per qualunque valore, che dar ci piaccia alla somma s, e alla differenza d dei due numeri, che ricerchiamo, indicando le operazioni, che costantemente eseguire si deggiono su que' numeri, che in ciascun caso particolare vanno sostituiti alle lettere, hanno ricevuto il nome di *Formole*.

La esecuzione poi delle operazioni dalla formola indicate nello speciale caso preso di mira è ciò che chiamasi *sostituzione de' valori alle lettere*, o *trasformazione delle Formole in numeri*; il che costituisce nella soluzione de' problemi quella seconda parte che *prattica* abbiamo chiamata (147).

155. Nella lunga *analisi*, che fatta abbiamo intorno all' ora sciolto Problema, ci è occorso di osservare, come 1.° il bisogno, che si ha in alcune circostanze di esprimere le quantità incognite, che trovansi vincolate alle note, ha portato nel calcolo l' introduzione delle lettere, come caratteri indipendenti da ogni particolare valore. 2.° Come la necessità di spesso indicare le operazioni, che è impossibile di eseguire sulle quantità ignote, piuttosto che a far uso delle parole somma, moltiplicazione, ec, ci ha indotto a servirci in vece di segni assai più concisi atti a mostrarci a colpo d' occhio i loro rapporti: 3.° come il bisogno che si ha di rendere permanenti anche negli ultimi risultati le traccie di quelle operazioni, che si sono eseguite per ottenerli, onde possan queste applicarsi ad altri numeri per tutti gli altri quesiti della stessa natura, l' uso ha introdotto delle lettere per la espressione ancora delle quantità note, addimostrando così che alcune speculazioni di quantità non si verificano sol per alcuni valori numerici, ma per qualunque essi sieno.

156. Così a poco a poco è nato un' altro metodo di calcolare, che può prendersi per una *continuazione* della numerica in quanto che ha auto origine per suo sussidio, ma non già perchè ne sia simile l' indole, mentre le idee di quantità, i loro segni, e il modo di marcare le loro relazioni sono così variati in questo nuovo algoritmo, che possono riguardarsi come costituenti una sintassi, e una lingua a parte.

Or questo nuovo metodo, di cui le prime invenni sono attribuite a Diofanto è ciò che chiamasi *Algebra*. Credesi questo vocabolo di origine araba; e taluni pretendono, che significhi *Aritmetica più eccellente*: ma se certe prove non abbiamo, che tale sia l' Algebra per significato etimologico, su cui nulla si sa ancor di preciso, vero è però che essa sia tale in realtà per la sua superiorità sulle forze dell' aritmetica comune nella soluzione de' problemi, come può sin d' ora rilevarsi dall' esame della tavola annessa divisa in tre colonne, nella prima delle quali v' è la soluzione del problema col linguaggio ordinario, ed a fianco di ciascun ragionamento v' è nella seconda colonna la sua traduzione nella scrittura parte numerica parte algebrica; e nell' ultima v' è la traduzione totalmente algebrica. Dalla semplice ispezione di questa tavola chiaramente appariscono le indicate circostanze, che hanno condotto alla invenzione dell'Algebra, ed i suoi sommi vantaggi.

PROBLEMA

Trovar due numeri, la cui somma sia una data quantità, e la differenza una data altra.

SOLUZIONE.

Col linguaggio ordinario.	Col linguaggio parte aritmetico, e parte algebrico.	Col linguaggio tutto algebrico.
	Somma de'2 numeri è 84	Somma de' 2 numeri è s
	Lor differenza è 12	Lor differenza è d
	Numero minore è x	Numero mimore è x
	Numero maggiore è y	Numero maggiore è y
Il numero minore, più il maggiore formano la data somma.	$x+y=84$	$x+y=s$
Ma il numero maggiore è uguale al minore, più la differenza:	$y=x+12$	$y=x+d$
Dunque il numero minore, più il numero minore, più la differenza è uguale alla data somma.	$x+x+12=84$	$x+x+d=s$
Dunque due volte il numero minore, più la differenza è uguale alla data somma.	$2x+12=84$	$2x+d=s$
Dunque due volte il numero minore eguaglia la data somma diminuita della differenza.	$2x=84-12=72$	$2x=s-d$
Dunque una volta il numero minore è uguale alla semisomma, meno la semidifferenza	$x=\frac{72}{2}=36$	$x=\frac{s}{2}-\frac{d}{2}$
Il numero maggiore poi è uguale al minore, più la differenza.	$y=x+12=36+12=48$	$y=x+d$
Dunque il numero maggiore è uguale alla semisomma, meno la semidifferenza, più la differenza.		$y=\frac{s}{2}-\frac{d}{2}+d$
Il numero maggiore è uguale alla semisomma, meno la semidifferenza, più due semidifferenze.		$y=\frac{s}{2}-\frac{d}{2}+\frac{d}{2}+\frac{d}{2}$
Dunque il numero maggiore è uguale alla semisomma più la semidifferenza.		$y=\frac{s}{2}+\frac{d}{2}$

157. Da quanto si è esposto ben apparisce, che nelle speculazioni di quantità non solo si possono combinare le idee de' numeri senza applicarle ad alcun essere reale, vale a dire in uno stato di perfetta astrazione, il che si fa colle cifre, ed anche coi nomi de' numeri, e ciò è l' oggetto dell' *Aritmetica*: ma si possono fare anche dei calcoli senza nemmeno attendere al valore numerico astratto di alcune quantità, e colla sola considerazione, che esse sono qualche cosa e null' altro, servendoci de' segni algebrici, ossia delle lettere. Così si calcolano degli *a*, dei *c*, ec; senza interessarci di quanto possano valere ridotti in cifre, colla certezza, che tutte le combinazioni, che si saranno fatte son giuste, qualunque sia il valore numerico, che si dia ad *a*, e *c*, al modo stesso, che siamo sicuri, che i valori numerici astratti serban sempre tra loro gli stessi rapporti, qualunque sia l' essere, cui vengono applicati.

Nell' *Aritmetica* in somma noi abbiam la certezza, che i ragionamenti fatti sui numeri astratti si verifican sempre, qualunque sia la specie delle cose, cui essi si applicano: nell' *Algebra* abbiamo di più; poichè i ragionamenti, che si fanno sulle lettere si verificano non solo qualunque sia la specie delle cose, cui vengono applicati, ma ancora qualunque sieno i valori numerici, che a noi piaccia dare alle lettere.

158. Se diversa è l' indole de' ragionamenti aritmetici, e algebrici, diverso esser debbe pur anche il valore delle *cifre*, che sono i segni dell' Aritmetica, e delle *lettere*, che sono i segni dell' Algebra. Entrambo indicano quantità astratte, ma le lettere indicano quantità più generali delle cifre.

Difatto le cifre non indicano la specie delle cose,

8

ma determinano il rapporto, che hanno le grandezze con quella arbitraria, che si è fissata per unità. P. e. 4 non esprime nè metri, nè lire, nè uomini; ma fissato che per nnità s' intenda uu' uomo, la cifra 4 determina tosto il numero de' medesimi che non può esser nè 100, nè 1000. Le lettere al contrario non determinano nè la *specie*, nè il *numero* delle cose. La quantità *c* p. e. non solo non ci esprime nè metri, nè lire, nè uomini: ma posto ancora, che di uomini si parli, *c* non ne determina nè quattro, nè cinque, nè dieci, come fanno le cifre. Perciò le quantità, che considera l' Algebra sono più generali di quelle dell. Aritmetica, e perciò ha ricevuto anche il nome di *Aritmetica generale*.

Ben diversa è pur l' impressione, che nella mente de' principianti fanno le cifre, e le lettere. Avvezzi essi a trattare i nnmeri, e ad applicarli ai casi particolari, anche prima di studiar matematiche, trovandosi già abituata la loro immaginazione ad annettere ai segni numerici delle idee sensibili, non provano imbarazzo alcuno per concepire il significato delle cifre, come il provano per concepir quello delle lettere. I segni *a*, *b*, *c*, non risvegliano allo lor mente alcun oggetto determinato, come 2, 3, 4, che tante volte hanno preso per frutti, per libre, per uomini, e son perciò tentati a credere, che il calcolo de' segni algèbrici sia un vano modo di ragionare, che aver non possa applicazione alcuna agli oggetti di nostra conoscenza, falsa prevenzione fatale ai loro progressi, che convien sradicare dal bel principio col mostrar loro come il bisogno ci ha recato all' uso di questi segni, i quali appunto per essere sforniti di particolare significato sì per rapporto alla specie, che al qnantitativo delle cose, so-

no attissimi ad esprimere de' ragionamenti generici applicabili ad una infinità di casi particolari in ogni genere di grandezze. E precisamente a tale importantissimo fine sono state dirette le minute analitiche osservazioni, che fatte abbiamo sull' esposto Problema, la cui soluzione potrebbe sembrar precoce, se non venisse giustificata dall' accennato riflesso.

159. Dalle notate differenze intorno ai ragionamenti, ed ai segni sì numerici che algebrici conchiuder possiamo, che mentre l' *Aritmetica tratta delle combinazioni, e decomposizioni de' numeri* (12), di quelle quantità cioè, che hanno un rapporto all' unità (8), l' Algebra contempla d' altronde le quantità facendo in esse astrazione anche da questo rapporto; e quindi che = L' *Algebra è quella scienza, che si occupa delle quantità indeterminate, esprimendole colle lettere dell' alfabeto, e marcandone le relazioni con de' brevi segni convenzionali ad oggetto di condurci a dei risultati, che diconsi formole, le quali ci indicano non già i valori numerici delle cose incognite, che nei Problemi si cercano, ma le aritmetiche operazioni, che eseguir dobbiamo in tutti i casi particolari possibili della medesima specie, onde ottenerli*.

160. Tutte le varie sorte di quantità determinabile nei suoi gradi di aumento, e diminuzione esser possono il soggetto dell' Aritmetica, e dell' Algebra, forza, moto, tempo, spazio, velocità, estensione: ma l' estensione è appunto tra queste una quantità, che considerata astratta dai corpi ci offre un numero immenso di utilissime proprietà, e di rapporti di un genere tutto suo proprio, i quali perciò meritano di formare una scienza a parte, la *scienza dell' estensione*,

che è chiamata *Geometria*, ma impropriamente, perchè questo nome che significa *misura della terra* non ci indica, che una sola semplice sua applicazione.

Questo studio non è però affatto indipendente dall' Aritmetica, e dall' Algebra: anzi siccome si è veduto, che le quantità considerate da queste due scienze purchè determinabili, esser possono di qualunque sia classe, chiaro risulta, che le speculazioni aritmetiche, e algebriche possono applicarsi anche all' estensione, e il fatto ci proverà di quanti sommi vantaggi sia stata capace questa felicissima applicazione.

161. Oltre questi tre diversi aspetti, sotto i quali è la quantità considerata dall' *Aritmetica*, *Algebra*, e *Geometria*, ve n' è un quarto più sublime, sotto cui vien presa di mira nel così detto *Calcolo infinitesimale*, la cui disamina non appàrtiene al nostro corso.

162. Lo studio poi della quantità determinabile nei suoi gradi di aumento, e diminuzione, qualunque sia l' aspetto, sotto cui si consideri, ha riceuto fin dai più remoti tempi il nome di *Matematica*, che può dividersi in *elementare*, e *sublime*.

L' *elementare* comprende gli Elementi di *Aritmetica*, *Algebra e Geometria*, che sono il soggetto delle nostre occupazioni.

La *sublime* abbraccia le più elevate nozioni di Algebra, e Geometria, che costituiscono la così detta *Introduzione al calcolo infinitesimale*, e quindi il *Calcolo infinitesimale*, ossia *differenziale*, e *integrale*.

La Matematica tanto *elementare*, che *sublime* dicesi *pura*, finchè si limita alle sole astratte teoric. L' applicazione di queste ai casi prattici, ed a qualunque classe di corpi chiamasi *Matematica mista*, o *Fisico-Matematica*.

Greca è l' etimologìa della pàrola *Matematica*. Essa deriva o dal verbo μανθάνω *scire*, o dal nome μάθημα *scientia*; e le si è dato tal denominazione di *scienza per antonomasia*, e perchè colle felici sue applicazioni l' ossatura a così esprimermi costituisce di tutte le scenze esatte, e perchè le sue teorie sono una serie di cognizioni evidenti, e certe, e innaccessibili all' errore, (nel che appunto consiste la *scienza* presa nel suo stretto valore).

EPILOGO

I Problemi, che esigono una serie di ragionamenti pria che si conosca con che operazioni si trovan le incognite, ci obbligano ad introdurre *primo* le ultime lettere pell' espressione di queste (150); *secondo* i segni per l' indicazione delle operazioni (151); *terzo* le altre lettere dell' alfabeto per le quantità note (153); ed ecco il passaggio dall' *Aritmetica* all' *Algebra*, l' utilità dei cui segni è manifestata dal confronto della soluzione di un Problema ottenuta col linguaggio ordinario, e algebrico (156). I ragionamenti algebrici differiscono dagll aritmetici pella loro estensione (157); e il valor delle *lettere* da quello delle *cifre*, perchè queste determinano il *numero* se non precisano la specie, quelle non precisano nè specie, nè numero (158). — *Aritmetica*, *Algebra*, *Geometria*, *Matematica elementare*, *e sublime*, *pura*, *e mista* (159 e seg.)

ARTICOLO II.

Delle quantità positive, e negative, e del significato il più generico dei segni +, e —.

163. Non basta nel calcolo aver riguardo al *valore* delle quantità: convien di più averlo al *modo di essere* delle une, rispetto alle altre.

Se prefiggendoci di marcare il capitale di Tizio, e trovando scudi mille di beni, e scudi 400 di debito, senza riguardo alcuno al modo di essere delle sue partite, ponendole indistintamente insieme, conchiudessimo, che il suo asse ammonta a scudi 1400, la nostra conseguenza sarebbe erronea. Gli scudi 400 di debito sono una quantità, che ha un modo di essere opposto a quello dei scudi 1000, e distrugge in essi una quantità eguale a lei. Perciò mentre gli scudi 1000 sono della stessa natura della cosa presa di mira, che è il capitale, e perciò entrano nel calcolo in istato di addizione, gli scudi 400 al contrario vi entrano in istato di diminuzione, o sottrazione, cosicchè il capitale di Tizio è $1000 - 400 = 600$.

In questo esempio la quantità opposta a quella presa in mira, siccome è di essa più piccola, per mezzo dell' effettiva sottrazione sparisce nel risultato, quando ci esprimiamo coi numeri, ma in Algebra, se il 1000 fosse espresso da a e il 400 da c, non potendo conoscere cosa è il valore di a diminuito di c, poichè le lettere non esprimono come le cifre un determinato valore, non ci è dato indicare in altro modo il capitale di Tizio, che scrivendo $+ a - c$; ed ecco come occorrono nel calcolo le quantità affette dai segni $+$, e $-$.

164. Se il debito di Tizio eguagliasse gli scudi 1000 di capitale, se cioè la quantità opposta a quella presa in mira, le fosse eguale, noi avremmo allora $1000 - 1000 = 0$, ovvero $a - a = 0$; il risultato cioè sì in Aritmetica, che in Algebra sarebbe zero, poichè *quantità eguali, ed opposte si distruggono.*

165. Finalmente se il debito superasse i beni, come nel caso in cui ascendesse a scudi 1200, abbiamo allora $1000 - 1200$; e per ottenere il risultato di questa e-

spressione, si decompone il sottraendo in due parti, una delle quali eguagli la quantità, che sta in istato di addizione, ed allora in vece di 1000 — 1200, abbiamo l'equivalente 1000 — 1000 — 200, che riducesi alla sola quantità — 200, perchè le due prime si distruggono siccome eguali, ed opposte. Ed ecco come nascono le quantità cel segno — anche isolate. E di queste è ben palese il significato, poichè dall' esposto ben apparisce, che il risultato — 200 è una quantità opposta al capitale preso in considerazione: che perciò vi vorrebbe tra i beni presi di mira una quantità eguale ad essa, perchè potesse dirsi, che si ha zero: è una quantità in somma, che abbisogna di scudi 200 per dare zero, e rettifica la nostra primiera supposizione, che Tizio avesse de' capitali, la determinazione de' quali era lo scopo prefisso, col farci conoscere che Tizio in vece ha scudi 200 di debito.

166. Se le quantità col segno — isolate nascono talvolta, come si è veduto dalla sottrazione d' una quantità maggiore, da una minore, tal' altra si affacciano naturalmente ancora nel calcolo; giacchè se dopo aver fissato di notare i capitali di Tizio, troviamo che egli non possiede nulla affatto, ed ha scudi dieci di debito, per esprimere, che questo debito è una quantità di natura opposta a quelle, che ci eravamo divisati di segnare, la facciamo precedere dal segno —, indicando con ciò, che dessa è una quantità, che sta in istato di sottrazione rispetto a quelle, che abbiamo preso di mira, e che perciò distruggerà altrettanto ne' beni di Tizio per quanto essa è, allorquando o per una eredità o industria, o fortuna si sarà egli formato un qualche capitale.

167. Che se poi all' opposto lo scopo delle nostre

ricerche stati fossero i debiti di Tizio, allora gli scudi dieci di debito non sarebbero una quantità opposta, ma della stessa natura di quelle, che ci siamo prefissi di rimarcare, e perciò preceduta andrebbe non dal segno —, ma dal segno +.

168. Simili ragionamenti istituir possiamo sopra i guadagni, e le perdite, sui moti per una, e per l'opposta direzione, sulle forze, che agiscono in sensi contrarii, e conchiuder possiamo, che il segno +, o —, che noi apponiamo alle quantità, ossia il riguardarle in istato di addizione, o sottrazione non dipende dall' indole, o natura di esse, come taluni hanno credato, supponendo p. e., che i debiti, e le perdite sieno per loro natura qnantitá contrassegnabili dal —, perchè in realtà diminuiscono il capitale; e che i crediti, i guadagni debbano come cose reali naturalmente contraddistinguersi col +; giacchè come si è veduto (167) possono anche ricevere il segno opposto, dipendendo la lor maniera di esistere in istato di addizione, o sottrazione dall' arbitrio, o per dir meglio dalle mire, che si prefigge il calcolatore.

169. In somma quando in un calcolo abbiamo due generi opposti di quantità, che si distruggono reciprocamente, tutte quelle che hanno la stessa maniera di esistere della cosa, che è lo scopo delle nostre operazioni tendono all' incremento della convenuta unità, esistono in istato di addizione, sono contrassegnate o dal segno +, o dal non aver innanzi alcun segno, e diconsi *Positive*.

Tutte le quantità poi, che hanno un modo di esistere opposto alla cosa cercata abbisognano d' un numero a loro eguale delle unità prese in mira, perchè si abbia zero, esistono cioè nel calcolo in uno stato di

sottrazione, si fanno perciò precedere dal segno —, e diconsi *negative*.

170 Quindi è che quando riflettesi alle quantità positive, non pensiamo, che ad una sola maniera di esistere, quella cioè, che la circostanza ci ha indotto a prender di mira: quando abbiamo quantità negative, due maniere di essere abbiamo allora in pensiero, l'una della quantità negativa, che si considera, l'altra della quantità che nel calcolo si è presa in vista, onde rilevare che rispetto ad essa la quantità considerata ha un modo di esistere opposto.

171. Dopo tali dilucidazioni non potrà più cadere ad alcuno in pensiere, che le quantità *negative* sieno eguali a zero, quasi che esprimessero la *negazione*, o mancanza delle quantità positive. Sì queste che quelle sono quantità *reali* in opposizione, e perciò le negative distruggendo nel positivo esistente, o possibile altrettanto di quello, che esse sono, non possono essere eguali a zero incapace di distruggere il più menomo che. L'avere infatti un debito di scudi 100 è ben altra cosa, che il non aver nulla. L'aver fatta una perdita è ben altra cosa, che il non aver vinto nulla, e l'aver fatto 10 miglia per una direzione contraria non è al certo lo stesso, che il non aver fatto alcun passo pel sentiero propostoci.

172. Ma se l'errore di credere le quantità negative uguali a zero è proprio de' principianti, altre idee che ci sembrano mancar di esattezza si sono aute, e si hanno da Matematici d'altronde profondi intorno alla genesi, e natura delle quantità negative, che perciò sarà bene il discutere.

Immaginiamo con Boscowich spinto da remi contro

acqua un battello con forza capace a fargli percorrere 9 metri al minuto, se non vi fossero ostacoli; mentre venga retrospinto dalla corrente del fiume con una forza, che gli farebbe percorrere tre metri. In tale ipotesi il battello progredirà di soli sei metri per minuto.

Supponiamo ora che il fiume ingrossi, e l' impeto della piena si faccia doppio nel 2.° minuto, triplo nel 3.° ec, in modo cioè, che spinto venga indietro il battello dalla corrente con una forza, che se sola agisse gli farebbe percorrere 6 metri nel 2.° minuto, 9 nel 3.°, 12 nel 4.° ec. In tale ipotesi il battello percorre.

Nel Minuto	1.°	9 — 3 =	6
Nel	2.°	9 — 6 =	3
Nel	3.°	9 — 9 =	0
Nel	4.°	9 — 12 =	— 3
Nel	5.°	9 — 15 =	— 6
ec.			

Sicchè da tale esempio conchiudere in generale possiamo, che col successivo ingrandirsi della quantità, che si sottrae dalla data positiva accade, che si hanno de' risultati, che a principio sono quantità positive sempre più piccole della data, e ciascuna più piccola di quella, che la precede: che poi questi risultati decrescenti vanno a svanire, e a ridursi a zero, e passano poi a prendere un valore negativo successivamente crescente. Ecco quanto noi possiamo ragionevolmente dal citato, e da simili esempii dedurre.

173. Alcuni Matematici però abusando per quel che a noi sembra del principio, che tanto più impiccolisce il minuendo quanto più il sottraendo ingrandisce, in ossequio alla pretesa *legge di continuità* han-

no immaginato, che una quantità proseguir possa a sempre più impiccolirsi senza limite alcuno di mano in mano, che cresce la quantità, che le si sottrae; e perciò hanno erroneamente estesa l'idea del decremento della data quantità oltre lo zero, cioè anche quando essa più non esiste, opinando, che i risultati 6, 3, 0, — 3, — 6, — 9, — 11, ec. che successivamente nel citato esempio si ottengono sottraendo da 9 una quantità a gradi a gradi crescente, non sieno, che la stessa quantità primitiva 9, che va successivamente in diminuzione, cosicchè una stessa grandezza in forza solo del progressivo decrescere vada a poco a poco ad esinanirsi, divenga zero, e quindi quantità negativa sempre crescente.

174. Ma da tale maniera di vedere hanno origine tre conseguenze che sebbene addottate da sommi matematici, pur non sapremmo come difenderle dalla taccia di assurde.

E I.° le quantità negative che dopo lo zero nel citato esempio cominciano a comparire ed a crescere non sono, che le stesse quantità positive in una progressiva diminuzione, non possono perciò differirvi, che dal più al meno, e quindi esser dovrebbero della medesima specie, non potendo questa cambiare per un semplice graduato decremento, e per tali si riguardan di fatto dai sostenitori dell' accennata opinione.

Ma il riguardar quantità diametralmente contrarie, quantità che si elidono come d' una medesima specie e natura par che ripugni, e sia un errore derivante dall' abuso della legge di continuità.

Ed infatti una quantità concreta qualunque ella sia, potrà per qualche causa decrescere, e svanire, ma svanita che sia non può prendere altro aspetto, poichè

lo zero non è suscettibile di alcuna modificazione. E quando nel nostro esempio la forza, che spinge il battello contr' acqua a gradi a gradi affievolendosi va finalmente a ridursi a zero per l' impeto crescente del fiume, che la distrugge, ogni maniera di vita, che proseguiamo a darle in seguito è chimerica, poichè non è certamente più dessa, che dopo essersi annullata rinasca presentandoci opposta natura: è la quantità negativa, cioè la forza della corrente, che col suo successivo incremento dopo esser giunta al grado di estinguere la opposta forza de' remi, comincia, e prosegue a comparir col suo eccesso, obbligando il battello a muoversi per una direzione contraria.

175. II. Inoltre se le quantità negative altra cosa non fossero, che le positive stesse in diminuzione, esse sarebbero quantità *minori di zero*, perchè stanno al di sotto di zero nella scala del decremento, e III. *avrebbero un valore tanto più piccolo, quanto è maggiore il numero, che le esprime*, perchè quanto più ci innoltriamo ne' termini di questa scala decrescente, e tanto più forti sono i numeri, che esprimono le quantità negative, che si succedono (173); e per tali si riguardan realmente nell' opinione che non addottiamo.

Or che vi sieno *quantità minori di zero*, che lo zero sia il termine medio il limite tra i termini positivi, e negativi in modo che tutti i termini positivi sieno di lui maggiori, e tutti di esso minori i termini negativi, sono maniere di vedere, che ci sembra non reggano alla severità della logica; poichè mentre ci par superfluo il dire, che le *quantità positive sono maggiori di zero*, giacchè è questa una proprietà comune a tutto ciò che è, ne pare poi assurdo il sostenere, *che le quantità negative sien minori di zero*, poichè a

qualunque scolastica sottigliezza ricorrasi pel concetto della quantità negativa, se è quantità, sia per quanto vogliasi tenue, supera il nulla, che è la negazione dell' essere. E così pure da un conflitto di idee non sappiamo dissimpegnarci, allorchè procuriamo di convincerci, che una quantità riguardar si debba per tanto più piccola quanto maggiore è il numero, che la esprime, e viceversa.

176. Le citate massime, che a noi sembrano assurde hanno auto a sostenitori de' Matematici illustri, ne ha mancato fra essi chi ha preteso di dimostrarle. Ora il tener dietro all' andamento di queste, a nostro credere, false dimostrazioni ci sembra assai utile, perchè serve a mostrarci, come l' abitudine di ragionare più su i segni che sulle idee, abitudine indispensabile nella prattica dell' algoritmo, ha trascinato de' sommi Algebristi, all' abuso di applicare le regole del calcolo, e gli assiomi anche ai casi, che non ne sono suscettibili, ponendo così i risultati dell' Algebra in conflitto con quelli della ragione. E l' indagar, che in esse faremo l' origine dell' errore ci servirà di norma per avvezzare lo spirito ad un' analisi rigorosa sul valore de' segni, onde acquistare sotto la scorta d' una sana ideologia, che non può esser mai in contraddizione coll' Algebra, idee il più possibile esatte sulle sue prime nozioni fondamentali, il che se debbe esser lo scopo de' trattati elementari in ogni genere di scienze, molto più il debbe essere nella scienza dell' esattezza. Tra le varie dimostrazioni in proposito, ecco le principali.

Di due quantità, ci si dice, quella è più grande, che aggiunta ad una terza forma una somma più grande. Perciò di due numeri negativi, che si aggiungono ad una quantità, quello debbe dirsi il

che nel seguente ragionamento. » *Tutto ciò che abbisogna di incremento per essere uguale ad una data quantità è minore di essa: ma le quantità negative son tali che esigono l' aggiunta di quantità positive loro eguali, perchè si abbia zero: dunque son minori di zero* » Ma le quantità negative, noi replichiamo, esigono per formar zero non una reale aggiunta, o incremento, quale riceverebbero da quantità di simil natura, bensì una *diminuzione*, che in esse producesi da quantità positive eguali, che loro si uniscono: dunque non son minori di zero.

Ci si replica $+ a - a = 0$

Dunque $- a < 0$

Questa conseguenza è appoggiata all' assioma » *Se ad una sola di due quantità eguali si tolga qualche cosa, il suo residuo è minore dell' altra quantità* »: ma quest' assioma non è al nostro caso applicabile, poichè il $-a$, che risulta dal togliere $+a$ dal simbolo $a - a$ non può a rigore riguardarsi per un residuo perchè l' idea del residuo è l' idea d' una parte di ciò, che si avea prima che gli si fosse tolto qualche cosa, e debbe perciò essere della stessa identica natura, e non di una natura opposta come è $-a$ alla cosa presa in mira nel calcolo. Il simbolo $a - a$ è uno zero, che nasce per elisione di opposte quantità, e perciò col togliere a da questa espressione non otteniamo un residuo, perchè lo zero non è suscettibile di rimaner qualche cosa, ma facciamo sì, che torni ad esistere quella quantità, che era prima distrutta dalla esistenza di $+a$. Il citato assioma non è dunque al caso applicabile, e perciò $-a$ non è un *residuo minore di zero*, è una grandezza che in una espressione eguale a zero riacquista valore, quando vien tolta la quantità opposta, che l'annichiliva.

Ci si replica ancora $- a = - a$
Dunque $+ a - a > - a$
Ossia $0 > - a$

L'assioma » *Se ad una sola di due quantità eguali si aggiunge qualche cosa, la somma è maggiore dell' altra quantità* » cui è appoggiata la sovra espressa conseguenza, non è applicabile che ai casi in cui la quantità aggiunta formi colla prima una somma reale, e in lei non operi una diminuzione, o annichilamento. Lo zero non è dunque una vera somma nata dall' addizione di $+$ a alla $-$ a sicchè possa dirsi che $0 > - a$; esso è nato per avere distrutto $- a$ coll' introdurre nel calcolo $+ a$.

Se $a - a$ fosse una vera somma, come sostengono i fautori di questa dimostrazione, essendo assioma che ogni tutto è maggiore di ciascuna delle sue parti, per essere conseguenti a loro stessi, ammetter dovrebbero che la somma $+ a - a$, ossia zero non solo è maggiore di $- a$, ma che è maggiore ancora dell' altra parte $+ a$; e se $0 > + a$ è un' assurdo anche nella loro opinione, ragioni non veggiamo perchè assurdo ancora non sia la proposizione $0 > - a$.

Da tutte queste osservazioni ci sembra ben contestata l'assurdità delle massime, che abbiamo confutate intorno alla natura delle quantità negative, ma quand' anche non fossero assurde come a noi pajono, niuno negherà, che più difficili a concepirsi non sieno delle idee, che noi abbiamo addottate. Or come conciliar negli allievi amore alla scienza, se in vece di insinuarsi nel loro spirito per facili vie, onde radicarvi le idee le più esatte, ci impegnassimo a convincerli che *le quantità negative sebben d' opposta natura pure non sono che le positive stesse in diminuzione*, e *son mi-*

nori di zero, e tanto maggiori quanto più piccolo è il numero che le esprime? Ad ammettere queste nozioni si rifiuta lo spirito, e così mentre l' inesattezza, e l' oscurità fanno di se pomposa mostra agli allievi mascherate sotto il velo del sublime, e del misterioso, molti come innaccessibile ai loro passi abbandonano sin dal vestibolo il santuario dell' Algebra, e que' pochi, che proseguono a coltivarla si imbevono di false, o almeno inesatte idee, che germe sono sempre di errori. Le ipotesi di Newton, e Boscovich intorno alla natura delle forze attrattive, e ripulsive, che or tutti i Fisici riconoscono per false, già altrove indicammo (a), che furono suggerite, come essi stessi attestano, dalle loro idee sulla natura delle quantità positive, e negative che son quelle appunto, che abbiamo confutate.

177. Fin quì nei segni + e — altro non abbiamo ravvisato che l' indicazione di quantità positive, e negative; e questo è appunto il loro *particolare* significato, finchè l' Algebra si occupa del *modo di essere* delle quantità che prende a calcolo, ma spesso l' Algebra e specialmente allorchè trattasi di stabilire delle formole generiche, non solo sotto i simboli letterali *a*, *b*, *c*, ec. fa astrazione dal *valore* delle quantità, ma ancora dal *loro modo di essere* sia positivo, sia negativo: e in tal caso i segni +, o — che precedere si veggono le lettere non possono più indicarci il positivo, o negativo loro stato, dappoichè per convenzione sappiamo, che sotto le date lettere possono essere significate tanto quantità positive, che negative. In

(a) Vedi Riflessioni sulla Teoria degli atomi pag. 7.

tali circostanze, quando cioè le quantità sono indeterminate non solo riguardo al valore ma anche al loro modo di essere, non occorrendo i segni +, e — per esprimere lo stato positivo, o negativo, da cui dobbiamo anzi fare astrazione, essi prendono un significato più *generale*; e precisamente, poichè ne' procedimenti del calcolo accade talvolta, che una quantità vada presa nello stato in cui è, positivo se positivo, negativo se negativo, e tal' altra vada presa in uno stato opposto al suo, negativo cioè se il suo stato è positivo, e viceversa, così si è convenuto indicare il primo di questi due casi col premettere alle quantità il segno +, e il secondo col premettervi il segno — *destinato sempre ad indicare quantità opposte a quelle contrassegnate dal* +; di modo che in grazia di tal convenzione nelle formole generali può darsi che $+c$ sia una quantità negativa, e positiva la $-a$, mentre $+c$ significa la quantità c presa nello stato in cui si ritrova, e che esser potrebbe negativo; e $-a$ significa la quantità a presa in uno stato opposto a quello che ha nel caso particolare preso di mira; e se a avesse un valor negativo, è chiaro che $-a$ esprimendo uno stato opposto, indica una quantità positiva.

178. E poichè talvolta accade, che una stessa quantità a, sia positiva sia negativa, vada ripetuta o nel suo proprio stato, o nell' opposto non una volta sola, ma più volte, e per quanto lo indica un' altra quantità c, che fa così officio di *moltiplicatore*, in tal caso costumasi di premettere a questo moltiplicatore c il segno +, o il segno — per indicare se il moltiplicando, positivo, o negativo che sia, vada le tante volte ripetuto o nello stato suo, o nell' opposto; ed infatti i segni +, e — premessi al moltiplicatore non possono avere

altro significato, non possono cioè esprimere giammai nè lo stato positivo, nè il negativo della quantità cui sono applicati, poichè il moltiplicatore essendo un numero non concreto indicante soltanto ripetizioni, non è per se stesso nè positivo nè negativo, essendo questo carattere riserbato alle sole quantità concrete.

EPILOGO

Secondo che in un calcolo le quantità opposte alle prese in mira o sono di esse minori, o le eguagliano, o le superano, risultano o quantità negative unite alle positive, o zero, o quantità negative isolate (163 ec.) Queste ultime possono anche affacciarsi naturalmente nel calcolo (166), Lo stato positivo, o negativo delle quantità dipende non dalla concreta loro natura, ma dalle mire del Calcolatore (167 ec.) Le quantità negative non sono eguali a zero (171); ed è pur erroneo il riguardarle della *stessa specie delle positive, minori di zero, e tanto più piccole, quanto è maggiore il numero, che le esprime* (172 ec.) — Quando si conviene che le lettere esprimano qualunque quantità sia positiva, sia negativa, i segni + o −, che le precedono significano che le quantità vanno prese o nel loro stato, o in uno stato opposto (177); e questo è sempre il significato de' segni premessi al *moltiplicatore*, che non è nè positivo, nè negativo (178).

ARTICOLO III.

Convenzioni circa l' indicazione delle prime operazioni algebriche, donde l' idea del Coefficiente, e dell' Esponente.

179. Le operazioni, cui si assoggettano le quantità positive, e negative hanno in Algebra tutt' altro andamento che in Aritmetica. Ed infatti se aggiunger vogliamo alla quantità $+a$ l' altra $+c$, o sottrarre la c da a, non possiamo come nei numeri trovare una

terza lettera, che ci indichi o la loro somma, o la loro differenza: conviene che ci limitiamo a puramente indicare l' operazione, scrivendo $a + c$, ovvero $a - c$, riserbandone l' esecuzione al caso in cui a, e c acquistino un valore determinato.

180. Ma se si trattasse di dover far la somma di quantità eguali, come a, ed a, in vece di $a + a$, possiamo scrivere $2a$. Così l' addizione di $a + a + a$ può essere espressa da $3a$, ec. Egualmente per indicare la somma di due quantità negative eguali, *in vece dell' espressione* $- a - a$, usar possiamo l' altra $- 2a$; ed ecco come nascono le quantità algebriche affette dai numeri. Ora queste cifre, che poste innanzi alla quantità letterale ci indicano quante volte questa è ripetuta nel suo stato positivo, o negativo, diconsi *Coefficienti* cioè *facienti con* le lettere un prodotto; cosicchè il Coefficiente non è altro, che il moltiplicatore della quantità innanzi a cui è posto. Così $5a$ equivale a $5 \times a$; e stabilir possiamo, che ogni quantità algebrica è di coefficiente fornita anche quando ne è apparentemente sprovvista, giacchè in tal caso il coefficiente è l' unità, essendo ben chiaro, che $1a = a$, perchè a preso una sola volta, ossia moltiplicata per 1 non è che a (51).

E qui si noti che anche quando abbiamo convertita l' espressione $a + a + a + a$ in $4a$, questo risultato $4a$ è un' indicazione di operazione più compendiosa, che non è $a + a + a + a$, poichè esprime una moltiplicazione mentre la prima esprime un' addizione, ma è sempre un' indicazione di operazione, che non può eseguirsi, se non quando si dia ad a un determinato valore.

181. Egualmente se vogliasi moltiplicare o dividere c per m, noi trovar non possiamo come nei numeri un' altra quantità, che ci esprima il loro prodotto, o quoto, e perciò il prodotto non può che indicarsi scrivendo $c \times m$, ovvero $c \cdot m$; e il quoto scrivendo $\frac{c}{m}$, ovvero ponendo a sinistra di due punti il dividendo, e a destra il divisore, scrivendo cioè $c : m$

182. Circa il prodotto però è a osservarsi, che in vece di indicarlo per $c \times m$, ovvero $c \cdot m$, si fa uso anche d' una espressione più laconica, cioè di cm; e se questo prodotto $c\,m$ si volesse moltiplicare per r, il nuovo prodotto sarebbe indicato da $cm \times r$, o da $c\,m \cdot r$, o da $c\,m\,r$, giacchè si è convenuto, che quando una lettera è seguita da una o più altre senza interposizione di segni, s' intenda, che le quantità da esse espresse sono tra loro moltiplicate. Così $a\,c\,m\,p$, $a \cdot c \cdot m \cdot p$, $a \times c \times m \times p$ sono sinonime espressioni indicanti tutte un prodotto formato dai 4 fattori a, c, m, p, che non può anch' esso effettivamente ottenersi, se non allora che sieno precisati in numeri i loro valori; e se comunemente si dice, che si eseguisce la moltiplicazione, quando l' espressione $a \times c \times m \times p$ si converte in $a\,c\,m\,p$, questo modo di esprimersi è inesatto, giacchè altro non facciamo che passare da un' indicazione più lunga ad altra più breve, poichè anche $a\,c\,m\,p$ è un prodotto indicato, e non ottenuto al pari dell' altro.

183. Può però darsi il caso che i fattori di una data moltiplicazione sieno tutti eguali, ossia che una quantità sia moltiplicata una, o più volte per se stessa, come se si avesse mm, $a\,a\,a$, $c\,c\,c\,c$. In tal circostan-

za si è convenuto di accorciare le espressioni, evitando le ripetizioni collo scrivere la lettera una volta sola, e mettere alla sua destra una piccola cifra un poco elevata per esporre quante volte di seguito dovrebbe essere scritta la lettera come fattore. Così i citati prodotti si indicano per m^2, a^3, c^4. Le cifre che *espongono* quante volte di seguito dovrebbe essere scritta come fattore la data lettera si chiamano *esponenti*, le quantitá affette da questi esponenti, siccome sono quantità moltiplicate un dato numero di volte per se stesse, si chiamano *Potenze* (81); ed essendo il grado della potenza determinato dal numero delle volte, che la quantità generatrice entra come fattore nel dato prodotto, essendo ora questo numero determinato dalla cifra *esponente*, è ben chiaro, che il grado della potenza sarà additato dall' esponente, e perciò si dirà potenza seconda, terza, quarta, ec, se l'esponente sarà il 2, il 3, il 4, ec. Quindi m^2, a^3, c^4 si pronunziano *m innalzato alla seconda potenza*, o più semplicemente *m alla seconda* o anche *m due*; e così *a elevata alla terza potenza*, ovvero *a alla terza*, o *a tre*; *c alla quarta*, o *c quattro*, ec; e poichè due fattori si esigono per fare la prima moltiplicazione d'una quantità per se stessa, è chiaro, che il numero de' fattori è di una unità maggiore del numero delle moltiplicazioni, e quindi per ottener la potenza d'una data quantità convien moltiplicare la quantità per se stessa una volta di meno delle unità, che sono nell'esponente della potenza.

La seconda potenza dicesi anche *quadrato*, e la terza *Cubo* della quantità generatrice, e vedremo in Geometria da che abbia auto origine l'introduzione di questi nomi.

184. Se una quantità avesse per esponente l'unità, ciò significherebbe, che va scritta una volta sola come fattore. Dunque $a^1 = a$; e siccome a^3 è la *terza* potenza di a, a^2 è la *seconda* potenza di a, così per analogia si è anche detto, che a^1 è la *prima* potenza di a, quantunque a rigore essendo destinato il vocabolo potenza ad esprimere i diversi prodotti di una quantità che si moltiplica successivamente per se medesima, non può esservi potenza propriamente detta, ove non ha luogo moltiplicazione. E' vero per altro, che qualunque quantità algebrica si può riguardare come sempre provvista di esponente, mentre quando esso manca vi si sottintende l' unità, essondosi già dimostrato che $a = a^1$.

185. *L' esponente* non va poi confuso col *coefficente*, ben diverse essendo le loro attribuzioni, Questo denota quante volte una quantità va *ripetuta* (180), quello quante volte una quantità va *moltiplicata* per se stessa (183). Così $4a = a + a + a + a$; ed $a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$; cosicchè se a fosse 10, $4a$ sarebbe $4 \times 10 = 40$, ed a^4 sarebbe $10 \times 10 \times 10 \times 10$, ossia 1000; sicchè $4a$ ed a^4 sono quantità ben diverse.

186. Non solo le semplici lettere, ma anche i prodotti di più fattori possono essere affetti da coefficienti, ed esponenti. Infatti intende ognuno, che invece dell' espressione $cmp + cmp + cmp$ si può scrivere più brevemente $3\,cmp$; e $2a^3$ in vece di $a^3 + a^3$, come pure in vece: di $a^2cm^3 \times a^2cm^3$ si può più brevemente scrivere $(a^2cm^3)^2$ indicando così, che la quantità chiusa tra parentesi, che potrebbe essere espressa anche da una semplice lettera, è moltiplicata una volta per se medesima.

187. Dopo le acquistate notizie intorno alle quantità positive e negative, coefficienti ed esponenti conchiuder possiamo, che ogni quantità è fornita del suo segno, del suo coefficiente, ed esponente: ma il segno si tralascia per convenzione nelle quantità positive, quando esse sono isolate, o sono il primo termine di qualche algebrica espressione: il coefficiente, e l'esponente poi, quando essi sono l'unità. Così se apparentemente a è una lettera senza segno, coefficiente, ed esponente; in realtà essa è fornita di tutti e 3, poichè $a = +1a^1$.

EPILOGO

In Algebra l'addizione, e sottrazione, la moltiplicazione, e divisione non possono che indicarsi (179). I *Coefficienti* nascono dall' addizione (180), e gli *Esponenti* dalla moltiplicazione delle stesse quantità (183). Di queste possono esser fornite non solo le semplici lettere, ma anche i prodotti di più fattori (186). Ogni quantità, sebbene apparentemente sprovvista, ha il suo segno, coefficiente, ed esponente (187).

ARTICOLO IV.

Dei diversi aspetti sotto i quali possono considerarsi le quantità algebriche positive, e negative.

188. Si è già osservato che nelle addizioni, e sottrazioni algebriche non potendo giungere ad esprimere con un solo segnale come in Aritmetica la somma, o il residuo di più quantità, siamo obbligati ad indicarle insieme coi loro rapporti, e di qui nascono le quantità dipendenti le une dalle altre per mezzo dei segni +, e —.

189. Ora una quantità, che è sotto un solo segno, che non è cioè unita ad altre per mezzo dei segni + o

—, chiamasi *quantità semplice*, o *incomplessa*, o *termine*, o *monomio*. Così tanto a, che $-c$ è un monomio: così $3\,a\,c\,d$, ovvero $-2\,a^2\,m\,p^3$, ovvero $3\,a^2 \times c^2 m^4$ sono tanti monomii, perchè le diverse lettere, che li formano non sono separate nè dal $+$, nè dal $-$.

190. Le quantità, che risultano di più monomii insieme collegati, e distinti per mezzo dei segni $+$ e $-$ diconsi *complesse*, *o Polinomii*, e più particolarmente *binomii*, se risultano di 2 termini, *trinomii* se di 3, *quadrinomii*, se di 4 ec.

191. *Que' monomii, che risultano dello stesso numero di fattori*, sien pur qualunque le lettere, e i loro esponenti, coefficienti, e segni, diconsi *Omogenei*; ed *eterogenei* se il numero de' loro fattori è diseguale. Così acf, m^2p, a^3 sono omogenei; ac, ac^2 eterogenei.

192. Que' monomii omogenei, che son formati della stessa, o delle stesse lettere fornita ognuna del medesimo esponente, sien pur qualunque i coefficienti, e i segni, *que' monomii cioè, che hanno eguale la quantità letterale dopo il coefficiente* si chiaman *simili*, e *dissimili* quelli che l' hanno diseguale.
Così $6a^2c$ — $4a^2c$ sono *simili*: $+3\,a\,p$, e $+3\,m\,p$, ovvero $2a^2c$, e $2ac$ sono *dissimili*.

193, I termini simili, che si trovano in un calcolo 1.° o son tutti positivi, come $2a^2 + 6a^2 + a^2$, e possono ridursi in un termine solo $9a^2$, facendo precedere la quantità letterale a^2 dalla somma de' coefficienti. 2.° o son tutti negativi, come $-3cf - 2cf$; e si riducono in egual modo nel solo termine $-5cf$, avvertendo di far precedere dal segno $-$ il termine ridotto. 3.° o sono parte positivi, e parte negativi, e in allora si

riducono facendo la somma delle quantità simili precedute dal $+$, poi quella delle quantità simili precedute dal $-$; poi togliendo la più piccola di queste somme dalla più grande, e dando al resto il segno della maggiore. Così $3cm^3 - 2cm^3 - 4cm^3 + cm^3 = 4cm^3 - 6cm^3 = - 2cm^3$. (165). Quando poi la somma de' termini negativi, e positivi è uguale, il risultato è zero (164). L'utilissima operazione or esposta per di cui mezzo tutti i termini simili si raccolgono in uno, chiamasi *Riduzione*.

194. Que' monomii simili, che hanno eguale il coefficiente, fatta astrazione dai loro segni, diconsi *eguali*, *diseguali* se hanno un coefficiente diverso. $+ 3a^2p$, e $- 3a^2p$ sono eguali: $+ 4a^2p$, e $+ 3a^2p$ sono diseguali.

195. Finalmente que' monomii eguali, che son forniti dello stesso segno, sia pur qualunque la disposizione dei loro fattori, diconsi *identici*; *non identici* se il loro segno è diverso. Monomii eguali, e identici sono $+ 3acp$, e $+ 3pca$: eguali, ma non identici sono $+ 3acp$, e $- 3acp$. Ed infatti mentre a costituir l'eguaglianza di due termini basta che sia lo stesso il *valore*, sebbene opposto il loro modo di essere, come ce ne assicura la massima, che *due quantità eguali, ed opposte distruggonsi*; a costituire l' *identità* fa d'uopo, che oltre il *valore* convengano i termini ancora nel loro *modo di essere*, ossia nel *segno*.

196. Ed è pur chiaro, che tutti i termini identici sono eguali: gli eguali sono simili; i simili omogenei: non così però viceversa, dovendo convenire sol nel *numero* de' fattori per esser *omogenei*: più nelle *lettere e rispettivi esponenti*, ond' esser *simili*: più ne' *coef-*

ficienti, ond' esser *eguali*; più ne' *segni*, ond' essere *identici*.

EPILOGO

Dall' addizione, e sottrazione algebrica nascono i Polinomii, e il confronto de' loro termini ci fa distinguere le quantità omogenee, ed eterogenee; le simili, che danno luogo alla *riduzione*, e le dissimili, le uguali, e le diseguali; le identiche, e le non identiche (188. e seg.)



CAPO V.

Primarie Operazioni sugli interi Algebrici.

Ossia Metodi di eseguire tutto ciò, che è possibile nelle indicazioni delle prime operazioni sulle quantità intere espresse in lettere.

197. L' esame intorno la natura delle quantità algebriche, e delle loro operazioni, ci ha naturalmente condotto alla cognizione dei segni, dei coefficienti, e degli esponenti, e quindi dei diversi nomi, che secondo i diversi loro rapporti acquistano le quantità stesse, che ne sono affette. Or questi segni, coefficienti, ed esponenti esigono un trattamento particolare nel calcolo, che per loro mezzo si rende assai più breve, e spedito; e nelle regole loro relative consistono principalmente i metodi delle prime 4 operazioni algebriche, le quali ad altro non valgono che a trasformare le primitive indicazioni di operazioni in indicazioni di altre operazioni o men complicate, o aventi una forma più addatta a manifestare le condizioni cui dobbiamo soddi-

sfare, giacchè in Algebra anche gli ultimi risultati a riserva di que' pochi casi di sottrazioni, e divisioni in cui son espressi de una lettera sola, null' altro sono che *indicazioni di operazioni*.

ARTICOLO I.

ADDIZIONE

198. *L'Addizione algebrica non è che una materiale raccolta di più quantità, sì positive, che negative, che si fa coll' avvicinarle, e scriverle le une presso le altre coi propri loro segni*. Il capitale di Tizio, che ci venga esposto dall' insieme di tutte le sue partite attive, e passive prese ad una ad una coi segni che loro competono, ce ne offre un' esempio.

I. *Addizione di Monomii*

199. Le quantità monomie, che debbonsi aggiungere ad una data qualunque, esser possono positive, o negative.

Se p. e. al capitale espresso da a fosse ad aggiungersi un altro capitale espresso dal monomio $+c$, è evidente che il risultato è $a+c$. Se al capitale a aggiunger si dovesse un debito c indicato perciò da $-c$ (169), avremmo per risultato dell' addizione algebrica $a-c$. Ma in questo 2.° caso se ci facciamo a ponderare il valore di questa così chiamata somma algebrica $a-c$, veggiamo che dessa non è altrimenti a rigore una somma, ma è un *residuo* della quantità a, cui vien tolta una porzione eguale a c, onde distruggere la quantità negativa $-c$, che esisteva nei dati. Non possiamo in somma annettere altra idea alla espres-

sione » *aggiungere una quantità negativa* » che quella di *fare una sottrazione*.

Anche le sottrazioni son dunque comprese nell' addizione algebrica ; e perciò non dee recar meraviglia, se dessa talvolta diminuisce la quantità invece di aumentarla, come sempre fa l' addizione numerica. In Algebra l' addizione ha un significato più esteso, che in Aritmetica, quanto la voce *raccogliere*, che si applica ancora alle quantità negative ha un significato più generale della voce *aumentare*, che sempre verificasi nell' addizione numerica, perchè essa si limita alle sole quantità positive, a quelle cioè, che hanno uno stesso modo di essere.

II. *Addizione di Polinomii*.

200. Poichè i polinomii non sono che monomii positivi, o negativi uniti insieme, la loro addizione nulla esige di diverso da quella de' monomii, ed in altro perciò non consiste, che nello scrivere un dietro l' altro col loro segno tutti i termini, che li compongono, onde costituire un polinomio solo. Se questo risulta di termini tutti dissimili, l' operazione è compiuta, e non ha allora altro oggetto, che porre sotto un colpo d' occhio più quantità sparse: ma se vi sono de' termini simili, ha luogo allora la *Riduzione*, operazione in che molti fanno appunto consistere l' addizione algebrica, perchè per mezzo di lei varie quantità si riuniscono in una sola ; ma che noi crediam bene di distinguere 1.° perchè non ha luogo in tutte le addizioni algebriche : 2.° perchè può aver luogo in tutte le altre operazioni dell' Algebra.

201. Ecco alcuni esempii d' addizione colla riduzione, la quale si prattica colle regole già date (193).

Polinomii a sommarsi	$5a^2 - 3cf + c^3f^2$ $2c^3f^2 + 3a^2 + 3c^2f + 4cf$ $- 8a^2 + c^3$

Somma $5a^2 - 3cf + c^3f^2 + 2c^3f^2 + 3a^2 + 3c^2f + 4cf - 8a^2 + c^3$

Somma ridotta $cf + 3c^3f^2 + 3c^2f + c^3$

202. Per eseguire però la riduzione con più speditezza, giova disporre i polinomii a sommarsi in guisa, che le quantità simili sieno le une sotto le altre.

Eccone l' esempio.

Sieno a sommarsi i termini

$3a^2m + 4m^2 - am^3 + 6m^2 + 8x - 2am^3 - 4x - 9m^2 - 4x$

Disponendoli avremo

$$\begin{array}{llll} 3a^2m & + 4m^2 & - am^3 & \\ & + 6m^2 & & + 8x \\ & & - 2am^3 & - 4x \\ & - 9m^2 & & - 4x \end{array}$$

Somma ridotta $3a^2m + m^2 - 3am^3$.

203. Giova poi avvertire, che in prattica mentre è indifferente scrivere uu termine prima d' un' altro, e cominciar l'addizione a sinistra, ovvero a destra come facciamo unicamente per uniformarci all'andamento della nostra scrittura, è poi d'altronde in questa, e in tutte le operazioni assai utile nello scrivere le lettere di un termin qualunque, conservare il loro ordine alfabetico, onde facilitare la ricognizione de' termini simili.

ARTICOLO II.

SOTTRAZIONE.

204. *La sottrazione algebrica è quell' operazione per di cui mezzo una o più quantità sian positive o negative si tolgono da un' altra qualunque.*

I. *Sottrazione di Monomii.*

205. Occorre talvolta di togliere da una data quantità un termine positivo. P. e. se Tizio, che ha un capitale di scudi 1000 fa una perdita di scudi 250, conviene che tolga da 1000 una quantità positiva eguale a 250 per pagare il suo debito, ossia per distruggere la quantità negativa debito, che è entrata nel calcolo; e ciò si indica collo scrivere dopo il 1000 col segno — la quantità positiva 250, che si deve sottrarre, così 1000—250. Questo 1000—250 è dunque l' espressione del residuo; ed infatti questo residuo unito al sottraendo + 250 ci dà il minuendo 1000 (85).

206. Talvolta occorre di togliere da una data quantità un termine negativo. P. e Tizio, che ha un capitale di scudi 800 risultante di scudi 850 di beni, e scudi 50 di debito, risolve di questo estinguere con una vincita or fatta di scudi 50. Trattandosi di togliere un debito da un capitale, che è la quantità presa in mira, eccoci al caso di togliere una quantità negativa. Ora il capitale risulta di 850 scudi di beni, e scudi 50 di debito, risulta cioè di scudi 800 di beni, più altri scudi 50 di beni, che vengono distrutti dai scudi 50 di debito, e perciò è espresso da 800 + 50 — 50. Togliendosi perciò materialmente da questa espressione del capitale il debito di scudi 50, ossia la quantità negati-

va — 50, ciò che vi rimane è scudi 800 + 50. Ed infatti questo improprio residuo 800 + 50 unito al sottraendo — 50 dà il minuendo 800 + 50 — 50 = 800. Dunque dal capitale di Tizio, che è di scudi 800 si è tolta la quantità negativa — 50 coll'aggiungerla in istato positivo. Per togliere — 50 è stato d' uopo scrivere + 50; e si è perciò ottenuto per risultato della sottrazione una quantità maggiore del minnendo: doveasi infatti aumentare il capitale di que' scudi 50 positivi, che prima erano annullati, e distrutti dai scudi 50 di debito, che si son tolti via.

207. Ecco un' altro esempio di sottrazione di quantità negative. Si vuò conoscere di quante miglia distano Marco, e Cajo, che partiti entrambi da un luogo stesso coll' intenzione di recarsi a Roma, si sa che il 1° è tornato in dietro di miglia 25 dopo averne percorse 100 verso Roma: e il 2° è stato obbligato cominciare il viaggio percorrendo 25 miglia in direzione tutta opposta.

Il cammino verso Roma fatto da Marco è di miglia 100 — 25, cioè 75 miglia più 25 miglia, che sono distrutte dalle altre 25 miglia fatte in senso opposto è cioè 75 + 25 — 25; ed il cammino fatto da Cajo essendo 25 miglia percorse in direzione opposta a quella, che si è presa in mira, è — 25 (169). Per conoscere di quanto l' uno dista dall' altro basta rilevare di quanto Marco trovasi avanzato verso Roma più di Cajo, convien cioè trovare l'eccesso del numero delle miglia verso Roma fatte da Marco su quello delle miglia fatte da Cajo, il che si ottiene col sottrarre la quantità minore dalla maggiore. Or la quantità minore, che qui dobbiamo sottrarre è appunto una quantità negativa; e ben si scorge che to-

gliendo effettivamente dal minuendo, cioè dalle miglia fatte verso Roma da Marco, che sono espresse dal trinomio 75+25—25 il sottraendo — 25 esprimente il cammino fatto da Cajo, ciò che rimane, e che appunto esprime l'eccesso delle miglia verso Roma fatte dal primo su quelle percorse dal secondo è 75+25 = 100. E in realtà questo residuo, o eccesso 75+25 unito al sottraendo —25 ricostituisce il minuendo 75+25—25=75; cosicchè anche qui notiamo, che per togliere — 25 da 75 ha fatto d'uopo aggiugnere +25; e si è auto 100. E 100 ben si scorge dover essere nel nostro caso particolare la distanza fra Marco, e Cajo, subitochè si trova il primo avanzato verso Roma di miglia 75; e l'altro trovasi miglia 25 in direzione opposta.

208. Or dai casi particolari passando al generale conchiudiamo, che l'idea del *togliere* una cosa da un' altra è inseparabile dall' idea, che nel minuendo esista la cosa, che si vuò tolta; e poichè in algebra il sottraendo non ha un valore determinato, noi non possiamo giungere ad osservare cosa rimanga dal minuendo, dopo che gli si è tolto il sottraendo, se nell' espressione del minuendo non esista materialmente la quantità sottraenda, onde possa questa togliersi effettivamente. E però facil cosa giungere a questo intento anche quando nel minuendo non sia espressa la quantità sottraenda, come nel caso, che sottrarre si volesse la quantità $+c$, o $-c$ da $+a$. In fatti questa quantità a, potendo considerarsi come risultante da un' infinità di diverse operazioni, e quindi presentarcisi sotto mille aspetti diversi, che non ne alterino il valore, potrà benissimo essere espressa da un polinomio, in cui vi sia o la quantità $+c$, o la $-c$, che noi vogliamo sottrar-

vi. E il polinomio men complicato, che abbia lo stesso identico valore di a, e soddisfi alle volute condizioni è $a + c - c$. Or poichè $a + c - c = a$, tanto è togliere una quantità qualunque da a, quanto è toglierla dal trinomio equivalente $a + c - c$; poichè togliendo da quantità eguali quantità eguali, anche i residui sono eguali; sicchè ciò che resta del trinomio, dopo che gli si è tolta una data quantità esprime ciò che resta di a, cui venga tolta la quantità stessa.

Quando dunque da a vogliamo togliere $+c$, si tolga materialmente dal trinomio $a+c-c$ equivalente ad a la quantità $+c$, e si avrà evidentemente per residuo $a-c$; ed infatti questo residuo $a-c$ unito al sottraendo $+c$ dà il minuendo a.

Quando da a si vuò togliere $-c$, si tolga materialmente $-c$, cancellandolo dal trinomio $a+c-c$ equivalente ad a; e si avrà per risultato della sottrazione $a+c$; sicchè per togliere $-c$ da a convien scrivere $a+c$, ed infatti questo residuo $a+c$ unito al sottraendo $-c$ dà il minuendo a.

Dunque da a sottraendo $+c$, si ha $a-c$, da a sottraendo $-c$ si ha $a+c$; cioè *si sottrae una quantità positiva, scrivendola negativa accanto al minuendo*, come è chiaro; mentre per indicare una sottrazione convien porre in istato di sottrazione, o negativo la quantità positiva a sottrarsi, e *si sottrae una quantità negativa collo scriverla positiva dopo il minuendo*, *poichè* è pur chiaro, che togliere una quantità negativa è un togliere da un' assieme di quantità una che vi sta in istato di sottrazione, ossia è un *far sì che abbia valore nel calcolo quella positiva*, *che rimaneva antecedentemente distrutta per l' esistenza della negati-*

va, che togliamo; è in somma un accrescere il positivo di quanto vale la quantità negativa, che si toglie. Conchiudiamo per ciò, che sottrarre in algebra altro non significa che prendere la quantità a sottrarsi in uno stato contrario a quello che hanno, e che perciò *la sottrazione algebrica di un monomio qualunque si ottiene collo scrivere a destra del minuendo il monomio sottraendo col segno opposto*; e il polinomio che ne risulta esprime il residuo.

209. Da tutto ciò apparisce, che la sottrazione in Algebra non sempre *diminuisce*, ma talvolta *accresce* la quantità, equivalendo ad una addizione, appunto perchè sottrarre una sottrazione, togliere ciò che diminuisce è un vero aumentare, e ciò accade tutte le volte, che essa si eseguisce sulle quantità negative. In Aritmetica in cui le quantità si contemplano sotto un' unico modo di essere, la *sottrazione* non può che *diminuire* la quantità: ma in Algebra il concetto di questa parola sottrazione è più esteso, quanto più generico è il significato della voce *togliere* di quello della voce *diminuire*, potendosi togliere anche aumentando, come accade quando negativo è ciò si che toglie, ond' è che mentre il *togliere* è sempre proprio della sottrazione sì numerica che algebrica, il *diminuire* non è sempre proprio di questa, come lo è sempre di quella.

II. *Sottrazione de' Polinomii*.

210. Poichè un polinomio non è che un complesso di monomii, sottrarre un polinomio significa sottrarre tutti e singoli i monomii, che lo costituiscono, ossia ripetere la sottrazione di un monomio per quanti sono i termini del sottraendo.

Or 1.° O tutti i termini del sottraendo son positivi, ed è ben chiaro che per sottrarli converrà scriverli tutti dopo il minuendo col segno —. Così dovendosi sottrarre il binomio $c+f$ da a avremo $a - (c + f) = a - c - f$.

2.° O tutti i termini del sottraendo son negativi, ed applicando a tutto il loro complesso i ragionamenti fatti (208) quando il sottraendo era monomio, risulta, che per sottrarli convien scriverli dopo il minuendo col segno +. Così dovendosi sottrarre da a il binomio $-c-f$, avremo $a-(-c-f) = a+c+f$.

3.° O i termini del sottraendo parte son positivi, e parte negativi, come p. e. se da a sottrarre si dovesse $c-f$, e in tal caso col sottrarre da a il solo c, scrivendo $a-c$, noi abbiam tolto da a una quantità troppo grande, poichè non c, ma c diminuito di f doveva sottrarsi. Da a si è dunque sottratto più del dovere, e precisamente si è sottratto di più tutta quella quantità di cui andava diminuito il c prima di assoggettarlo alla sottrazione, cioè f. Se dunque da a si è tolto più di quello che si dovea per quanto indica f, per avere il giusto residuo convien aggiungere quella f che si è tolta di più, e quindi $a-(c-f) = a - c+f$. Per eseguir dunque la sottrazione in questo terzo caso il termine positivo c (e dicasi lo stesso di quanti altri fossero i termini positivi del sottraendo) va scritto negativo; ed il termine negativo $-f$, (e così dicasi di ogni altro termine negativo, che nel sottraendo esistesse) va scritto positivo.

E in una accogliendo tutte queste tre osservazioni concludiamo, che *la sottrazione di un Polinomio si effettua collo scrivere a destra del minuendo, monomio o polinomio che sia, tutti i termini del sot-*

traendo coi segni cambiati. E tutto il polinomio, che ne risulta costituisce il residuo, su cui si eseguisce la riduzione, se ha luogo. Ed eccone degli esempii.

211. *Minuendo* $3a^3c+a^2c-mn-d$
Sottraendo $2d-4a^3c+a^2c+4mn$

Residuo $3a^3c+a^2c-mn-d-2d+4a^3c-a^2c-4mn$

Residuo ridotto $7a^3c-5mn-3d$

Giova poi quando la riduzione ha luogo sovra molti termini, scrivere il residuo ponendo i termini simili l'un sotto l'altro e l'un fuor dell'altro i dissimili. Così dovendosi dal polinomio. $2fm^2-3f^2+a^3-a^2$ sottrarre $a^3-2a^2+fm^2+3x$, piuttosto che scrivere il residuo come sopra, possiamo regolarci così:

Minuendo $2fm^2-3f^2+a^3-a^2$
Sottraendo co' segni cambiati, e termini ordinati $-fm^2 \quad -a^3+2a^2-3x$

Residuo ridotto $fm^2-3f^2 \quad +a^3-2x$

212. Conchiudiamo dunque che il risultato della sottrazione si ottiene coll' *aggiungere* al minuendo il sottraendo preso in un senso opposto, e che a differenza di ciò che accade in Aritmetica, ove la sottrazione è un' operazione opposta all' addizione, motivo per cui fu trattata in luogo ben disgiunto dall' addizione, in Algebra la sottrazione non è che un *caso particolar di addizione*, un' addizione condizionata, *l' addizione cioè ad una quantità d' un' altra presa in un senso opposto*; ed è perciò che si è collocata di seguito all' addizione. Come infatti l' addizione algebrica può aumentare, e diminuire la quantità, così diminuirla, e au-

mentarla può ancora la sottrazione, sicchè come non sempre il risultato della prima è una *vera somma*, non sempre a rigore il risultato della seconda è un *vero residuo*, potendo talvolta esser vera somma il risultato d' una sottrazione, e vero residuo il risultato d' un' addizione

ARTICOLO III.

MOLTIPLICAZIONE

213. Quattro distinti casi ci offre la moltiplicazione algebrica.

I.° *Di Monomii per Monomii*
II.° *Di Polinomii per Monomii*
III.° *Di Monomii per Polinomii*
IV.° *Di Polinomii per Polinomii*

E qui è a notarsi, che quando uno, o entrambi i fattori sono polinomii, la moltiplicazione si accenna chiudendo tra parentesi i fattori polinomii, o conducendo sovra ciascun d' essi una linea dopo averli separati con uno dei due segni addottati pella moltiplicazione. Così $(a+2c-3f^2) \times (3m-d)$, o $(a+2c-3f^2) . (3m-d)$, ovvero $(a+2c-3f^3)(3m-d)$,

ovvero $\overline{a+2c-3f^2} \times \overline{3m-d}$,

sono tutte equivalenti espressioni, le quali ci mostrano, che l' intero trinomio $a+2c-3f^2$ dee moltiplicarsi per tutto il trinomio $3m-d$. Similmente l' espressione $(3a+c)(2a^2-n)(3ac+h)$ indica, che il primo binomio dee moltiplicarsi pel 2.°: che il prodotto, che ne nasce dee moltiplicarsi pel 3.°, ec.

Come possano nel calcolo aver luogo i 4 distinti

casi di moltiplicazione gioverà, onde fissar le idee degli Allievi, additarlo con de' facili esempii.

I. *Moltiplicazione di Monomii per Monomii.*

214. Un piccolo Pescatore riceve dal padre lire 5, che indicar possiamo con a per ogni tiro di rete con preda. Questi essendo stati 8, numero, che esprimer possiamo con f, si cerca quante lire ha guadagnate.

Questo numero sarà 5 ripetuto 8 volte, ossia 5×8 ossia $a\times f$, ossia af.

II. *Moltiplicazione di Polinomii per Monomii*

215. Se per ogni tiro di rete anche la madre promette al piccolo pescatore lire 4 espresse da c, allora per ottenere il numero delle lire guadagnate, non più 5,

ma invece	$5+4$, ovvero	$a+c$
dee moltiplicarsi per	8	f
ed il prodotto è	$40+32$	$af+cf$

poichè moltiplicare $5+4$ per 8, ovvero $a+c$ per f altro non significa, che prendere 8 volte, o f volte il dato moltiplicando, ossia prendere 8 volte, o f volte tutte le parti, che lo costituiscono, ossia moltiplicare per 8 ciascuno de' suoi termini, cosicchè la regola della moltiplicazione per questo 2.° caso consiste *nel fare tante particolari moltiplicazioni di monomio per monomio, quanti sono i termini del moltiplicando*, poichè ciascun d' essi va moltiplicato pel moltiplicatore monomio, onde possa conchiudersi, che la moltiplicazione *si* è eseguita su tutto l' intero moltiplicando.

III. *Moltiplicazione di Monomii per polinomii*.

216. Se il piccol pescatore guadagna 5 lire sole per ogni tiro di rete con preda, e di questi ne fece ieri 8 espresso da *f*, ed oggi 7 espresso da *g*, allora per ottenere il numero delle lire guadagnate

debbe moltiplicarsi	5, ovvero	a
per	8+7	$f+g$
ed il prodotto è	40+35	$af+ag$

dal che rileviamo, che il prodotto di 5 per 8+7, ossia di a per $f+g$ si ottiene ripetendo il moltiplicando 8 volte più 7 volte, ossia f volte più g volte; cosicchè la regola della moltiplicazione per questo 3.° caso consiste *nel fare tante particolari moltiplicazioni, quanti sono i termini del moltiplicatore, per ciascun dei quali va moltiplicato il moltiplicando monomio*, onde possa conchiudersi che la moltiplicazione si è fatta per tutto *l' intero* moltiplicatore.

IV. *Moltiplicazione di Polinomii per Polinomii*

217. Se poi il piccolo pescatore per ognuna delle 8 tirate felici di ieri, e delle 7 di oggi, oltre le 5 lire dal Padre promesse percepisce pur 4 lire per parte della madre, in allora onde avere il totale guadagno

debbe moltiplicarsi	5+4 ovvero	$a+c$
per	8+7	$f+g$
ed il prodotto è	40+32+35+28	$af+cf+ag+cg$

poichè moltiplicare 5+4 per 8+7 significa prendere il 5+4 per quanto lo indica 8, più per quanto lo in-

dica 7, ossia moltiplicare tutti i termini del moltiplicando, cioè $5+4$ prima per 8, con che si ottiene $40+32$ (215), poi per 7, con che si ottiene $35+28$; ovvero esprimendoci in lettere, dobbiamo prendere $a+c$ per quanto indica f, più poi per quanto lo indica g; dobbiamo cioè moltiplicare $a+c$ per f, il che dà $af+cf$ (215); e quindi moltiplicare $a+c$ per g, il che ci dà $ag+cg$ prodotto, che va aggiunto al primo; giacchè per poter dire che il moltiplicando è stato ripetuto quanto lo indica l' *intero* moltiplicatore, conviene ripeterlo tante volte, quanto è indicato da tutte e singole le parti, da cui il moltiplicatore vien costituito; e così la regola di moltiplicazione per questo 4.° caso consiste *nel moltiplicar successivamente ciascun Monomio del moltiplicando pel* 1.° *termine del moltiplicatore; tornar indi da capo a moltiplicare ciascun monomio del moltiplicando pel* 2.° *termine del moltiplicatore, e quindi la stessa operazione ripetere per quanti sono i suoi termini*; ond' è che per ciascuno di essi si ottengono tanti *prodotti parziali*, si viene cioè a replicare il 2.° caso della moltiplicazione di un polinomio per un monomio; e perciò anche in questo 4.° caso, come in tutti gli altri non ha luogo che la *ripetizione* d' un unica operazione, della moltiplicazione cioè di monomio per monomio.

Moltiplicazione di fattori aventi termini negativi.

218. In tutti i citati esempii osserviamo, che il prodotto totale si forma colla somma de' prodotti di ciascuna parte del moltiplicando per ciascuna del moltiplicatore, in un modo simile a ciò, che in Aritmeti-

ca accade per rapporto alle unità, decine, ec.; e ciò sempre avviene in tutte quelle espressioni letterali, in cui tutti i termini sono riuniti col +. Vi sono però nella moltiplicazione Algebrica delle circostanze, le quali non s' incontrano mai nei nnmeri, e per cui si ottengono nel prodotto dei risultati, che contengono dei termini negativi.

219. Se a modo d' esempio mentre il padre promette 5 lire al piccol pescatore per ogni tiro di rete con preda, vi aggiugne la condizione, che ogni volta che guadagna le 5 lire dar ne debba 2 al fratello, è chiaro che il suo guadagno dopo otto tiri felici sarà 8 volte il 5—2. Or questa quantità 5—2, che in Aritmetica risolverebbesi nella sola cifra 3 è obbligata a rimanere nello stato di un binomio $a-h$, quando il 5 è espresso da a, e il 2 da h; ed eccoci al caso di dover moltiplicare per 8 un binomio risultante di un termine positivo, e di un negativo.

Se dunque il *Moltiplicando* è	5—2
Il *moltiplicatore* è	8
Il *prodotto* è	40—16

Infatti 40 prodotto di 5 per 8 eccede il giusto, mentre non 5, ma 5—2 debbesi moltiplicare per 8; sicchè ognuna delle 8 volte, che si è ripetuto il 5 onde ottenere 40, si è ripetuto un 2 di più. Va dunque tolto 8 volte il 2, cioè 16 dal prodotto 40, e perciò scriver dobbiamo 40—16=24. Ed in vero 5—2=3; e 3×8=24.

220. Se diamo ai numeri un valor letterale, se cioè

Il Moltiplicando è	$a-d$
Il Moltiplicatore	f
Il prodotto sarà	$af-df$

poichè non la quantità a, ma a diminuito di d si dee ripetere f volte. Quante volte dunque ripetesi a, e tante volte ripetesi d più del dovere, sicchè nel prodotto af, in cui a è presa f volte, si è f volte introdotta un d di più. Per correggere dunque l' errore, ed ottenere il vero richiesto prodotto di $a-d$ per f, fa d' uopo da af togliere d ripetuto f volte, ossia df, il che dà, come sopra si è segnato $af-df$. Quindi conchiudiamo, che nei casi in cui il moltiplicando risulta di termini positivi, e negativi, il $+$ da cui è affetto il moltiplicatore f ci esprime, che ciascun termine del moltiplicando va preso f volte nello stato in cui trovasi, positivo se tale, negativo se negativo.

221. Supponiamo finalmente, che delle otto tirate fatte dal piccol pescatore tre sieno state vuote di effetto. In tal caso il numero delle lire guadagnate è $5-2$ moltiplicato non più per 8, come antecedentemente, ma pel numero dei tiri colla preda, cioè per $8-3$, quantità che se ridurrebbesi in Aritmetica al solo termine 5, è obbligata a rimanere nello stato di $f-m$, quando 8 è espresso da f, e 3 da m: ed eccoci al caso di dover moltiplicare non solo quantità negative oltre le positive; ma di dover moltiplicar le une, e le altre per un moltiplicatore polinomio, che ha termini affetti dal segno $+$, e dal segno $-$.

Debbesi infatti moltiplicare	$5-2$
Pel moltiplicatore	$8-3$

Or se $5-2$ si fosse dovuto moltiplicare semplice-

mente per 8, il prodotto sarebbe 40—16 : (219): ma questo binomio, che esprime le lire 5—2 ripetute 8 volte, quanti sono stati i tiri di rete, esprimerebbe il numero delle lire guadagnate, se non vi fossero stati 3 tiri senza premio, perchè vuoti di effetto. In questo prodotto 40—16 il 5—2 è stato ripetuto 3 volte di più di quello, che si dovea. Per aver dunque il giusto risultato, da questo prodotto 40—16 conviene togliere il 5—2 preso 3 volte (ed ecco cosa precisamente significa *il moltiplicare* 5—2 *per* — 3), convien togliere cioè il 5—2 moltiplicato per 3, ossia il 15—6 (219). E poichè la sottrazione si fa cambiando i segni ai termini del sottraendo (208), noi onde avere un' esatto risultato, accanto al 40—16 porre dovremo — 15 + 6 : sicchè avendosi

Per Moltiplicando 5—2
Per Moltiplicatore 8—3

Il prodotto sarà 40—16—15+6 = 46—31=15

Ed infatti il moltiplicando 5—2=3 : il moltiplicatore 8—3=5 ; e 3×5=15

222. Dando ai numeri il valor letterale

Moltiplicando	*a—d*
Per	*f—m*
Il prodotto è	*af—df—am+dm*

Infatti ripetendo algebricamente lo stesso raziocinio fatto sui numeri, se il binomio *a—d* moltiplicato per *f* ci ha dato *af—df*, dovendo moltiplicarlo non per *f* ma per *f—m* cioè per *f* diminuito di *m*, è chiaro, che il prodotto *af—df*, che ci esprime *a—d* ripetuto *f* volte contiene la quantità *a—d* ripetuta *m* volte più

di quello che si dovea ; e perciò $af—df$ supera il prodotto , che si cerca di quanto è $a—d$ ripetuto m volte ossia di $am—dm$. Per aver dunque il giusto valore , conviene togliere da $af—df$ il prodotto $am—dm$, il che si ottiene cangiandone i segni ; onde avremo $af—df—am+dm$ pel risultato richiesto . Dal che apparisce , che mentre il moltiplicare per $+f$, ossia per un moltiplicatore , che è affetto dal segno + è un ripetere f volte le quantità *nello stato in cui sono* , il moltiplicare per — m, ossia per un moltiplicatore, che è corredato del segno — è un prenderle m volte in uno stato contrario a quello , che hanno , onde correggere l' errore , che si è commesso moltiplicandole prima per una quantità troppo grande.

223. Perciò quando capitano dei casi , in cui una quantità concreta fornita di termini positivi , e negativi , come il numero delle tirate di rete felici espresso dalle 8 tirate fatte meno le 3 vuote d' effetto , che abbiamo indicato per $f—m$ serve in grazia delle condizioni del problema ad accennarci quante volte ripeter dobbiamo una data quantità , passa cioè ad esser *Moltiplicatore* , e diventa perciò un numero non concreto , in tal trasformazione anche i segni de' suoi termini cambiano significato: il +, ed il — non indicano più come prima il relativo modo di essere delle quantità concrete , giacchè divenute queste termini di un moltiplicatore destinato solo ad esprimere *quante volte* va ripetuta una quantità, non possono più essere nè positive nè negative ; e perciò i segni , da cui sono affetti non potendo più indicare la diversa maniera di essere non compatibile coi numeri non concreti esprimenti operazioni , valgono invece ad indicarci se i termini del moltiplicando debbono esser ripetuti o nello

stato in cui si ritrovano, o in uno stato opposto; sicchè *ogni particolar prodotto ha lo stesso segno del moltiplicando, quando il moltiplicatore è affetto dal segno +, ed ha un segno contrario a quello del moltiplicando, quando è affetto dal segno —*.

224. Dall' esame delle circostanze di que' casi, in cui o nel moltiplicando, o nel moltiplicatore, o in entrambi esistono de' termini negativi, risulta, che il prodotto in algebra non sempre è, come nei numeri, la somma de' prodotti parziali, mentre talvolta può esser anco una differenza, o residuo, come, negli ultimi esempii apparisce.

225. Esaminata l' indole della moltiplicazione in tutti i 4 casi distinti tanto allorchè tutti i termini de' fattori son positivi, quanto allorchè ve ne sono dei negativi, convien che ora ci occupiamo del dettaglio de' processi. E poichè per rapporto ai tre ultimi casi, veduto già abbiamo (217), che essi non sono, che una ripetizione del 1.°, *della moltiplicazione cioè di Monomio per Monomio*, ne vien di suo piede, che le regole, le quali si applicano a questo caso valgono per tutti.

226. Or nella moltiplicazione de' monomii conviene aver riguardo a tutti 4 i diversi elementi, di cui i monomii risultano, cioè 1.° ai segni, 2.° alle lettere: 3.° ai loro coefficienti: 4.° ai loro esponenti.

Regola pei segni

227. Dopo l' analisi fatta intorno al valore de' segni, da cui trovasi affetto il moltiplicatore, diventano evidenti le massime stabilite dagli Algebristi intorno ai 4 diversi casi che occorrono rispetto ai segni, e queste

massime, la cui laconica espressione sarebbe assurda senza la sottintelligenza, che la moltiplicazione riguarda non i segni ma le quantità da essi affette, sono le seguenti.

I. + per + dà +

cioè il moltiplicando positivo ripetuto nello stato in cui è dà necessariamente un risultato positivo.

II. — per + dà —

cioè un moltiplicando negativo ripetuto nello stato in cui è, non può produrre, che un risultato negativo.

III. + per — dà —

cioè il moltiplicando positivo ripetuto in uno stato opposto al suo, cioè negativamente, fa d'uopo che dia un risultato negativo.

IV. — per — dà +

cioè un moltiplicando negativo ripetuto in uno stato opposto al suo, preso cioè positivamente, dar debbe un risultato positivo.

Nell'esposizione de' 4 casi or contemplati abbiamo supposto, che il segno da cui trovasi affetto il moltiplicando esprima il suo stato positivo, e negativo; ma quando trattasi di espressioni algebriche, in cui si fa astrazione anche dal modo di essere delle quantità (177), è ben facile, prendendo in rivista gli stessi 4 casi distinti per rapporto ai segni, stabilire questa regola più generale, e semplice, che cioè *il prodotto* ha sempre il segno +, quando i suoi fattori hanno segni conformi: ha sempre il segno — quando i suoi fattori hanno segni contrarii.

Dall'esposto apparisce, che basta analizzare il valore convenzionale de' segni per ben intendere qualunque delle 4 proposizioni enunciate, cioè + *per* + *dà* +, ec. Ed infatti quando sappiamo che il prodotto non è che il moltiplicando ripetuto o nel suo stato, o nell'

opposto al suo, a tenor dell' indicazione del moltiplicatore, determinato abbiamo con ciò solo qual debbe esserne il segno, nè può venirci in pensiero di dedurlo da una dimostrazione. E se taluni ci chieggono p. e. perchè — per — da +, noi loro rispondiamo francamente, che non è questa la domanda, che debbono farci. Chiedere essi debbono in vece *che cosa* s' intenda quando si dice — per — dà +. Il significato solo de' simboli, e non la dimostrazione delle verità per essi espresse, e che intenderanno appena appreso il loro valore, è la cosa di che debbono essere istrutti, al modo stesso, che quando in una lingua ignota loro venisse espresso, che il tutto è maggiore d' una sua parte, ciò che loro abbisogna è la spiegazione de' termini, e non già la dimostrazione della proposizione per se stessa evidente.

Eppure un Eulero, e un Laplace, e sulla loro autorità tutti quelli che giurano in *verba Magistri* sono caduti nell' errore di credere, che sieno suscettibili di dimostrazione le regole tutte, che sono relative ai segni nella moltiplicazione eccettuata la prima.

Ecco infatti la dimostrazione di Eulero. $+a\times+b$ *dà* $+ab$. $-a\times+b$ *non può dare lo stesso prodotto che dà* $+a\times+b$. *Il suo prodotto dovrà dunque avere il segno opposto; e perciò* $-a\times+b$ *dà* $-ab$. *Abbiasi ora* $-a\times-b$. *È evidente, che rispetto alle lettere il prodotto è ab: ma è incerto se a questo prodotto dar si debba il segno — o il segno +: è però certo, che un de' due è da sciegliersi. Or la scelta non può cadere sul — perchè* $-a\times+b=-ab$; *e* $-a\times-b$ *non può dare lo stesso prodotto che dà* $-a\times+b$: *dunque dovrà ave-*

re il segno opposto ; e il prodotto sarà $+ ab$. *Dunque* $- \times -$ *dà* $+$.

Ecco la dimostrazione di Laplace. *Lo zero moltiplicato per qualunque quantità dà zero. Dunque* $(+a - a) \times + b = 0$. *Or non potendo cader dubbio che il primo termine del prodotto sia* $+ab$, *perchè nasce da* $+a \times +b$, *fa d' uopo che il 2.° termine del prodotto, che nasce da* $-a \times +b$ *sia* $-ab$, *onde unito al primo dia zero per prodotto totale. Dunque* $- \times +$ *dà* $-$.

Egualmente qualunque quantità moltiplicata per zero dà zero. Dunque $+a \times (+b - b) = 0$. *Ora essendo* $+ ab$ *il primo termine del prodotto, ne vien di conseguenza, che il 2.° che nasce da* $+a \times -b$ *sia* $- ab$, *altrimenti tutto l' intero prodotto non sarebbe zero. Dunque* $+ \times -$ *dà* $-$.

Anche $(+a - a) \times -b = 0$: *ma il 1.° termine di questo prodotto, che nasce da* $+a \times -b$ *è* $-ab$, *come si è ora provato: dunque il 2.°, che nasce da* $-a \times -b$ *debbe esser* $+ ab$, *onde unito al primo dia zero per risultato. Dunque* $- \times -$ *dà* $+$.

Non vi ha dubbio, che Eulero con una dimostrazione del genere delle indirette, che poco soddisfano, ma pur convincon lo spirito, e Laplace con ragionamenti a priori fanno tutte le altre regole derivar rettamente dalla proposizione che » $+$ *per* $+$ *dà* $+$. » Ma per fissarci su di una, notiamo p. e. che la proposizione $-$ *per* $-$ *dà* $+$ o è evidente per se, come lo è di fatto, ed è inutile dedurla da un' altra proposizione egualmente evidente insinuando così negli allievi la falsa idea, che la prima sia una verità di deduzione, e sol la seconda evidente per se, quando che tali

sono ambedue: o la proposizione — *per* — *dà* + non è evidente, e tal non debbe essere allora nemmeno l' altra + *per* + *dà* +. Dire infatti, che non è evidente competere al prodotto il segno +, quando esso è una quantità ripetuta col segno opposto al —, è un dire, che non è evidente competere al prodotto il segno +, quando esso è una quantità ripetuta col segno + (poichè segno opposto al — ; e segno + equivalgono); è un dir cioè, che non è evidente la proposizione + *per* + *dà* +; e se non è evidente questa proposizione, che è la base su cui si appoggiano amendue le citate dimostrazioni, ogni lor forza è perduta. Perciò o la proposizione — *per* — *dà* + è evidente, come noi supponiamo, e le dimostrazioni di Eulero, e Laplace sono inutili, anzi producono idee inesatte: o non lo è come essi suppongono, e le loro dimostrazioni mancan di base.

Ed ecco un' altro errore oltre quello sulla genesi delle quantità negative (173) addottato dalla maggior parte degli Elementisti dietro l' autorità di due matematici sommi, che l' hanno commesso per l' abitudine contratta nella prattica del calcolo di ragionare più su i segni, che sulle idee: ed ecco perciò in questi esempii un nuovo motivo, che debbe sempre più eccitare la nostra attenzione a continuamente analizzare il valore delle espressioni, e a non limitarsi a spolverare l' epidermide, come pur troppo in molti corsi elementari si prattica, ma a sviscerare la sostanza delle cose, onde non cadere in idee inesatte, allorchè si tratta non già di eseguire la prattica del calcolo, ma di apprenderne le fondamentali teorìe.

Regola per le lettere.

228. *Quando i monomii a moltiplicarsi risultano di più lettere diverse, si scrivono l'una presso l'altra senza frapporvi alcun segno*. Così non solo in vece di $a \times c$ scrivesi ac; ma ancora in vece di $ac \times f$ scrivesi acf; invece di $acf \times gm$, scrivesi $acfgm$; e non vi ha dubbio che $acfgm$ possa riguardarsi come prodotto da $acf \times gm$, poichè rammentando quanto fu esposto (55) $acfgm = a \times cfgm = ac \times fgm = acf \times gm = acfg \times m$; e cade pur in acconcio il rimarcare inoltre, che questo prodotto qualsiasi di più fattori $acfgm$ alterazione alcuna non soffre qualunque altra sia la loro disposizione; cioè $acfgm = mgfca = gfmca$ ec. ec. (56).

Regola pei Coefficienti.

229. Gli ora esposti monomii letterali non esigono avvertenza alcuna rapporto al loro coefficiente sottinteso che è 1. Non così però quando i monomii sono affetti da coefficienti diversi dall' unità nel qual caso può darsi che il coefficiente esista 1.° nel solo moltiplicando: 2.° nel solo moltiplicatore: 3.° in entrambi.

Ora 1.° $3c \times f = (c+c+c)f = cf+cf+cf$ (215) $= 3cf$ (186).

2.° $c \times 3f = c\ (f+f+f) = cf+cf+cf = 3cf$

3.° $3c \times 2f = (c+c+c)\ (f+f) = cf+cf+cf +cf+cf+cf = 6cf$.

Dunque da tali esempii rilevasi, che il prodotto di monomii forniti di coefficienti si ottiene colla reale esecuzione della moltiplicazione de' coefficienti tra loro e col far seguire questo prodotto dal prodotto letterale, che è sempre una semplice indicazione. Ad un tale ri-

sultato giungiamo pure immediatamente ; se riflettiamo che i coefficienti non sono che moltiplicatori, o fattori (180) ; mentre applicando ad essi le regole, che pei fattori letterali si sono stabilite, intendendoli cioè moltiplicati un per l' altro collo scriverli di seguito, p. e. $3ac \times 5fm$ diverrà $3ac5fm$; e poichè l' inverter l' ordine de' fattori non altera il prodotto (50), profittiamo di tale circostanza per avvicinare i fattori numerici, de' quali si può eseguir la moltiplicazione ; ed avremo in vece $3.5acfm$; e finalmente $15acfm$ eseguendo realmente la indicata moltiplicazione de' fattori numerici.

Lo stesso si prattica anche allorquando fossero molti i monomii a moltiplicarsi un per l' altro. Così $3a \times 4cf \times 2m = 3a4cf2m = 3.4.2acfm = 24acfm$.

Si eseguisce dunque realmente la moltiplicazione de' coefficienti de' termini, che si hanno a moltiplicare un per l' altro, e il lor prodotto si pone per coefficiente della quantità letterale indicante il prodotto puramente algebrico.

Regola per gli Esponenti.

230. Quando nei diversi fattori monomii, che si hanno a moltiplicare tra loro s' incontra una stessa lettera, la loro moltiplicazione si indica più brevemente. Infatti $f^2 \times f^3 = ff \times fff$ (183) $= fffff$ (181) $= f^{2+3} = f^5$. Così $afm^3 \times f^2m^2 = af^1m^3f^2m^2 = af^1f^2m^3m^2 = afffmmmmm$ $= af^{1+2}m^{3+2} = af^3m^5$. Così $ag^2 \times cg \times a^2g^2 = ag^2cga^2g^2$ $= a^1a^2g^2g^1g^2c = aaagggggc = a^3g^5c$.

Si segna dunque una sola volta nel prodotto ciascuna lettera, che si trovi replicata ne' suoi diversi fattori con un esponente, che sia la somma de-

gli esponenti, che appartengono alla lettera stessa ne' fattori in cui trovasi.

Nel caso poi, in cui gli esponenti stessi sono quantità indeterminate espresse da lettere, la loro somma non può essere che indicata, poichè se $a^2 \times a^3 = a^{2+3}$, può esprimersi per a^5, avendosi in vece $a^m \times a^r$, il prodotto non può esprimersi, che per a^{m+r}.

231. Mettendo in prattica le regole ora stabilite pei 4 elementi, di cui i monomii risultano, noi otteniamo il prodotto di qualunque termine per qualunque altro, e quindi siamo in grado di eseguire la moltiplicazione in tutti i 4 casi distinti, come ne' seguenti esempii additiamo.

I. Monomii per Monomii.

Esempii.	$5ac^2 \times 3c^3m$	$-2cf^2 \times 4c^2f^2$.
Moltiplicando	$5ac^2$	$-2cf^2$
Moltiplicatore	$3c^3m$	$4c^2f^2$
Prodotto	$15ac^5m$	$-8c^3f^4$

Esempii.	$chm^2 \times -2c$	$-3a^2m^3 \times -2a^2$
Moltiplicando	chm^2	$-3a^2m^3$
Moltiplicatore	$-2c$	$-2a^2$
Prodotto	$-2c^2hm^2$	$6a^4m^3$

II. Polinomii per Monomi.

Esempio $(2a^2 - 4a^3c + c^2) \times -3ac^2m$

Moltiplicando $2a^2 - 4a^3c + c^2$

Moltiplicatore $-3ac^2m$

Prodotto $-6a^3c^2m + 12a^4c^3m - 3ac^4m$

III. Monomii per Polinomii.

Esempio	$3m^3p^2\ (2m^2p^3r^2 - 5m)$	
Moltiplicando	$3m^3p^2$	
Moltiplicatore	$2m^2p^3r^2 - 5m$	
Prodotto	$6m^5p^5r^2 - 15m^4p^2$	

IV. Polinomii per Polinomii.

In questo caso, se si ottengono nella esecuzione del processo dei termini simili, giova porli gli uni sotto gli altri, onde facilitarne le opportune riduzioni.

I. Esempio senza riduzione $(3ac^2 - 2f^2g^3 + h)\ (2h - f)$

Moltiplicando $3ac^2 - 2f^2g^3 + h$

Moltiplicatore $2h - f$.

1.° *Prod. parz.* $6ac^2h - 4f^2g^3h + 2h^2$

2.° *Prodotto parziale* $-3ac^2f + 2f^3g^3 - fh$

Prodotto totale $6ac^2h - 4f^2g^3h + 2h^2 - 3ac^2f + 2f^3g^3 - fh$



II. Esempio con riduzione $(2a^3 + a^2c + 3ac^2 + c^3)\ (a - 2c)$

Moltiplicando $2a^3 + a^2c + 3ac^2 + c^3$

Moltiplicatore $a - 2c$

1.° *Prodotto parziale* $2a^4 + a^3c + 3a^2c^2 + ac^3$

2.° *Prodotto parziale* $-4a^3c - 2a^2c^2 - 6ac^3 - 2c^4$

Risultato ridotto $2a^4 - 3a^3c + a^2c^2 - 5ac^3 - 2c^4$

III. Esempio con riduzione $(4mo+7np-2a^2)(4mo-7np+2a^2)$

Moltiplicando	$4mo+7np-2a^2$
Moltiplicatore	$4mo-7np+2a^2$

1.° *Pr.* $16m^2o^2+28mnop-8a^2mo$

2.° *Prod. parz.* $-28mnop \quad -49n^2p^2+14a^2np$

3.° *Prodotto parziale* $+8a^2mo \quad +14a^2np-4a^4$

Risultato ridotto $16m^2o^2 \quad -49n^2p^2+28a^2np-4a^4$

232. *Osservazioni*. Nel I. caso non v' è nulla a notarsi.

Nel II. il prodotto è composto di tanti termini, quanti son quelli del Moltiplicando.

Nel III. il prodotto risulta di tanti termini, quanti ne ha il moltiplicatore.

Nel IV. 1.° Il prodotto totale è composto sempre di tanti prodotti parziali, quanti sono i termini del moltiplicatore: 2.° tanti sono i termini d' ogni prodotto parziale, quanti son quelli del moltiplicando: 3.°, perciò, se non vi è stata riduzione, il numero de' termini del prodotto totale è lo stesso numero de' termini del moltiplicando ripetuto tante volte quanti sono i termini del moltiplicatore, vien cioè precisato dal prodotto del numero de' termini del moltiplicando pel numero de' termini del moltiplicatore, e viceversa; quindi è sempre un *Multiplo* di ciascuno de' suoi fattori: 3.° Ne' prodotti poi, in cui ha luogo la riduzione, se v' è termine, in cui una lettera abbia un esponente maggiore di quello, che ha negli altri, come nel 2.° esempio del IV. caso è il primo monomio $2a^4$, ove a ha un esponente maggiore, che ne' seguenti termini,

in tal circostanza siamo certi, che questo termine, ove la lettera ha l'esponente massimo è stato esente da riduzione, perchè non può risultare, che dal solo termine del moltiplicando, e moltiplicatore, ove la stessa lettera abbia il maggior esponente.

233. Finalmente se noi osservammo in genere (154), che le operazioni algebriche lasciando sempre vedere come le diverse parti concorrono alla formazione de' risultati, per esser le lettere da cui sono espresse non suscettibili di trasformarsi in altre, al par delle cifre, spesso conoscer ci fanno delle proprietà generali de' numeri indipendenti da qual siasi sistema di numerazione, ora la moltiplicazione ce ne dà qualche esempio speciale. Infatti in grazia di essa troviamo che
$(a+c)(a-c) = a^2-c^2$, cioè *che la somma di due numeri moltiplicata per la differenza dà per prodotto la differenza de' quadrati di questi numeri.*

$(a+c)(a+c) = a^2+2ac+c^2$, *cioè che il quadrato di un numero composto di due parti* a, *e* c *contiene il quadrato della prima parte, più il doppio del prodotto della prima nella seconda, più il quadrato della seconda.*

$(a^3+a^2c+ac^2+c^3)(a-c) = a^4-c^4$, cioè *che la somma de' cubi di due numeri più i quadrati di ciascun d'essi moltiplicati pell' altro numero, se venga moltiplicata per la differenza de' due dati numeri dà un prodotto, che è la differenza delle quarte potenze de' due numeri stessi; ec. ec.*

E queste verità, che chiamar possiamo teoremi algebrici sono assai interessanti, e soggette in seguito a frequenti applicazioni.

ARTICOLO IV.

DIVISIONE

234. Occorrono nella divisione gli stessi 4 casi da noi nella moltiplicazione distinti (213), e per ciascun di essi i segni indicanti la divisione sono o due punti un sotto l'altro così : , o una linea —. Il primo si adopera ponendogli a sinistra il dividendo e a destra il divisore, i quali deggiono esser chiusi tra parentesi, o sopralineati allorchè sono polinomii: il secondo si usa scrivendovi sopra il dividendo, e sotto il divisore. Così $a : c$, ovvero $\frac{a}{c}$ significa *a diviso per c*. Così $(a+m):(c-n)$, ovvero $\overline{a+m} : \overline{c-n}$, ovvero $\frac{a+m}{c-n}$ sono tutte espressioni equivalenti, le quali ci indicano, che tutto il binomio $a+m$ va diviso per tutto il binomio $c-n$.

235. Qualunque sieno i Problemi, che ci obbligano ricorrere alla divisione, già si è veduto (98) esser essa quell'operazione per di cui mezzo ricercasi quel fattore incognito detto quoto, che moltiplicato pel divisore dà per prodotto il dato dividendo. Quindi se il dividendo non risulta realmente dalla moltiplicazione d'un fattor per un altro, la divisione non può effettuarsi, come appunto negli esposti esempii di $a : c$, di $(a+m) : (c-n)$ ne' quali siamo obbligati a rimanerci alla semplice indicazione. A differenza dunque della moltiplicazione che lo è sempre, la divisione è ese-

guibile allora solo che il divisore è un fattore algebrico del Dividendo, mentre in tal caso unicamente per mezzo di operazioni contrarie a quelle, che si fanno nella moltiplicazione, decomponendo cioè quello che la moltiplicazione ha composto, facciamo regresso dal prodotto a quello de' suoi fattori, che non si conosce, e che è appunto il quoto della divisione, come ci mostrano i 4 casi seguenti.

I. Divisione di Monomii per Monomii.

236. Può questa effettuarsi allora soltanto, che il divisore monomio abbia 1.° il coefficiente eguale, o summultiplo del coefficiente del dividendo: 2.° tali le sue lettere, che niuna ve n' abbia che non esista nel dividendo: 3.° e i loro esponenti non maggiori di quelli, che le stesse lettere hanno nel dividendo, poichè ha d'uopo di tali condizioni il divisore, onde esser possa fattore del dividendo come si esige affinchè sia eseguibile la divisione (235). E per effettuarla, vi sono 4 regole relative ai 4 noti elementi, di cui ogni monomio risulta.

Regola pei segni

237. Quando il dividendo, e divisore hanno il segno +, debbe averlo anche il quoto, poichè per dare un prodotto affetto dal +, qual' è in questo caso il dividendo, se un fattore qual' è il divisore ha il segno +, debbe averlo anche l' altro cioè il quoto. E ciò si esprime laconicamente così » Nella divisione + *per* + *dà* +. »

Quando il dividendo ha il segno —, e il divisore ha il +, il quoto debbe avere il segno — ; poichè per dare un prodotto affetto dal —, qual'è il dividendo, se un fattore, qual' è il divisore, ha il segno +, fa d' uopo che l' altro, cioè il quoto abbia il segno — (227). Dunque — *per* +*dà* —.

Quando il dividendo ha il segno +, e il divisore ha il segno —, il quoto aver debbe il segno —, perchè per avere un prodotto affetto dal + qual'è il dividendo, se un fattore qual' è il divisore ha il segno —, tal convien che l'abbia anche l' altro, cioè il quoto (227). Dunque + *per* — *dà* —.

Quando dividendo, e divisore hanno il segno —, il quoto debbe avere il segno +; giacchè per dare un prodotto affetto dal — qual' è il dividendo, se un fattore, qual' è il divisore ha il segno —, fa d' uopo che l' altro, cioè il quoto abbia il segno + (227). Dunque — *per* — *dà* +.

Da ciò rilevasi, che il quoto ha lo stesso segno del dividendo quando il divisore ha il segno +; e l' ha opposto quando il divisore ha il segno —; e possono poi le 4 enunziate regole in una sola frase comprendersi, come si fece per la moltiplicazione dicendo che » *Compete al quoto il + se i segni del dividendo e divisore son conformi, il segno — se son contrarii.* »

Regole pelle lettere.

238. Poichè la moltiplicazione algebrica si fa colla unione delle lettere esprimenti i fattori, è chiaro che il dividendo per essere il prodotto del divisore pel quoto risultar dovrà delle lettere indicanti il divisore unite a quelle esprimenti il quoto; sicchè togliendo dal di-

videndo le lettere appartenenti al divisore, le altre residue deggiono esprimere il quoto. Così in *ac* : *c* togliendo dal dividendo *ac* la lettera *c*, che esprime il divisore, la residuale *a* debbe esser il quoto; ed infatti moltiplicando il divisore *c* pel quoto *a*, si riottiene il dividendo *ac*.

Così in *acmpr* : *cp*, tolte dal dividendo le lettere *c*, *p* costituenti il divisore, resta *amr* per quoto. Ed infatti moltiplicando il divisore *cp* per *amr* riotteniamo il dividendo *acmpr*. Dunque *onde avere il quoto si scrivono i soli fattori del dividendo non comuni al divisore*. Questa è la regola generale di cui non sono che un' applicazione le altre pei coefficienti, ed esponenti.

Regola per i Coefficienti.

239. Se i monomii a dividersi sono affetti da coefficienti, p. e. $36ac : 9a$, in tal caso poichè il coefficiente 36 debbe esser prodotto dal 9 coefficiente del divisore moltiplicato pel coefficiente incognito del quoto (229), questo si otterrà colla real divisione di 36 per 9; e perciò sarà 4 poichè $36 = 4 \times 9$. Essendo infatti $36ac : 9a$ lo stesso che $4.9ac : 9a$, tralasciando nel dividendo a tenor della regola (238) tutti i fattori sì numerici, che algebrici comuni al divisore, risulta per quoto $4c$. *Si pone dunque per coefficiente del quoto il numero che risulta dal dividere il coefficiente del dividendo per quello del divisore.*

240. A tenor di questa regola se si ha $4ac : 4a$, essendo $4 : 4 = 1$, il quoto sarà $1c$; ed in tal caso si può tralasciare nel quoto il coefficiente 1, che abbiamo ottenuto, poichè $1c = c$. Ma se si avesse $4ac : 4ac$, il coefficiente 1, che in tal caso otteniamo per coeffi-

ciente del quoto non può trascurarsi ; poichè se è indifferente scrivere, o non scrivere l' unità innanzi ad una lettera , non così quando l' unità non è seguita da lettera alcuna , come nel caso citato, in cui tolte dal dividendo le lettere comuni al divisore, nulla vi resta, e zero si avrebbe per risultato in vece di uno, se 1 in tal caso non si segnasse . Così quando abbiasi $a : a$, $cmp : cmp$, ec. non si creda, che in forza della regola (238) il quoto sia zero, poichè rammentar conviene, che ogni monomio è affetto da coefficiente (180), e quindi che $a : a = 1a : 1a$; e perciò a tenor della regola de' coefficienti il quoto di $1a : 1a$ è 1, e non zero, risultato, che corrisponde alla massima (103) che qualunque quantità divisa per se stessa è uguale ad 1.

Regola per gli esponenti .

241. Nei due termini della divisione possono essere delle lettere uguali affette da diversi esponenti , per e. $a^5 : a^3$. In tal caso poichè $a^5 : a^3 = aaaaa : aaa$ (183) , operando a tenor della regola (238) abbiamo per quoto $aa = a^{5-3} = a^2$.

Così $m^2p^4r^3 : mp^2r^2 = mmpppprrr : mpprr = mp^2r$ (238).
Così $a^8m^nr : a^3m^4 = a^5m^{n-4}r$; ed in genere conchiuder possiamo , che *le lettere comuni ai termini della Divisione si scrivono nel quoto con un esponente , che sia quello che hanno nel dividendo diminuito di quello , che hanno nel divisore .*

242. Applicando questa regola al caso in cui una lettera abbia lo stesso esponente nel dividendo , e nel divisore , otteniamo nel quoto quantità coll' esponente zero . Così $c^4 : c^4 = c^{4-4} = c^0$, e questa espressione

cui siamo condotti dalla convenzione fatta sul modo di scrviere con gli esponenti le potenze delle quantità allor solo, che una potenza è divisa per se stessa, è chiaro, che equivale all' unità, poichè sempre 1 è il quoto d' una quantità qualunque, che venga divisa per se medesima. Ogni lettera perciò, che sia affetta dall' esponente zero, essendo un simbolo equivalente all' unità può invece esser rappresentata da 1, e può anche trascurarsi quando nel quoto esista qualche altro fattore. Così $a^5c^2m^3 : a^3c^2m^3 = a^2c^0m^0 = a \times 1 \times 1 = a$.

243. Per eseguir dunque la divisione di monomii per monomii conviene 1.° *apporre al quoto il segno* $+$ o $-$ *secondo che i segni del dividendo, e divisore sono conformi, o contrarii*: 2.° *dividere il coefficiente del dividendo per quello del divisore, e scrivere il risultato per coefficiente del quoto*: 3.° *scrivere le lettere del dividendo che non sono comuni al divisore*: 4.° *e scrivere le comuni con un esponente che sia il residuo dell' esponente che hanno nel dividendo diminuito di quel, che hanno nel divisore*. Ecco l' applicazione di queste regole a varii esempii.

Dividendo		*Divisore*		*Quoto*
$12a^2cx^5$	:	$12ax^3$	=	acx^2
$-28a^4c^3f$	:	$-7a^4f$	=	$4c^3$
$-21m^3q^2$	:	$-3m^3q$	=	$7q$
$-30a^3d^2m$	:	$6a^3dm$	=	$-5d$
$-8a^2f^4m$	:	$4a^2f^2$	=	$-2f^2m$
$9mpr$	:	$-9mpr$	=	-1

II· *Divisione di Polinomi per Monomii*.

244. Sia p. e. a dividersi $af + cf + df$ per f.

Onde si effettui una tal divisione fa d' uopo, che il dividendo sia realmente il prodotto del divisore monomio f per un' altro fattore, che è appunto il quoto, che si ricerca (235); convien cioè che sia $f \times$ (quoto cercato) $= af + cf + df$. Ora affinchè abbia potuto il fattore f dare un prodotto di 3 termini qual' è $af + cf + df$, fa d' uopo che siasi moltiplicato per un fattore di 3 termini (232), convien cioè, che l' altro fattore, ossia il quoto risulti di tanti termini quanti son quelli del dividendo, e precisamente conviene, che tutti e singoli i termini del dividendo sieno il risultato del fattore f moltiplicato pei rispettivi termini del quoto, ossia che il divisore f esista come fattore in tutti i termini del dividendo; e per tale oggetto le 3 condizioni stabilite (236) conviene che si verifichino nel divisore relativamente ad un solo non già, ma a tutti e singoli i termini del dividendo, ed allora dividendoli realmente pel divisore f, risulteranno i rispettivi termini del quoto. Questo 2.° caso di divisione non è perciò che una ripetizione del 1.° fatta tante volte, quanti sono i termini del dividendo, e la divisione si dispone, e si eseguisce a guisa delle divisioni aritmetiche, come segue.

245. *Dividendo* $af + cf + df$ | *Divisore* f

$$\begin{array}{rl|l}
 & -af & \\
\hline
 & & \textit{Quoto } a + c + d \\
1.^{\circ}\ \textit{Resto} & +cf + df & \\
 & -cf & \\
\hline
2.^{\circ}\ \textit{Resto} & +df & \\
 & -df & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}$$

Cominciando a sinistra 1.° si divide il primo termine del dividendo pel divisore f; e si segna nel posto del quoto il quoto parziale a, che si ottiene. 2.° Questo moltiplicasi pel divisore f onde immediatamente verificare se l' ottenuto prodotto af è realmente il termine del dividendo su cui si è operato, e sotto al quale si scrive col segno cambiato per eseguire la sottrazione. 3.° Si fa poi la riduzione onde sopprimere nel dividendo quel termine, che ha già soddisfatto alla determinazione del corrispondente quoto parziale, e quindi sul primo resto $cf+df$ si opera in egual modo per ottenere il 2.° termin del quoto, e così successivamente, finchè si abbia zero per ultimo residuo, il qual ci contesta, che la quantità f essendo stata tolta $(a+c+d)$ volte dal dividendo, vi è contenuta esattamente, ovvero che $f \times (a+c+d)$ dà il dividendo $af+cf+df$, d' onde la immediata conseguenza che $(a+c+d)$ è il quoto, poichè è quel fattore che moltiplicato pel divisore dà il dividendo.
In simil guisa operando troviamo

Dividendo		*Divisore*		*Quoto*
$(4a^5m^4-12a^3m^2+2a^2m^3)$	:	$2a^2m$	$=$	$2a^3m^3-6am+m^2$
$(15f^2g^3-5fg^2-10f^2g^2)$	:	$5fg^2$	$=$	$3fg-1-2f$

III. Divisione di Monomii per Polinomii.

246. Non è questa giammai algebricamonte eseguibile in modo da far risultare un quoto esatto espresso da quantità intere. Non può infatti idearsi quantità alcuua nè monomia nè polinomia, che moltiplicata per un divisor polinomio dar possa un prodotto monomio, come in questo caso dar dovrebbe il quoziente. Queste sorte di divisioni come p. e. $a : (1-c)$ non possono

perciò che indicarsi, e se si tenta effettuarle, si ottiene al posto del quoto un seguito di termini senza fine che costituisce il così detto *sviluppo de' quoti in serie infinite convergenti*, o *divergenti*, la cui disamina non appartiene all' Algebra elementare.

IV. Divisione di Polinomii per Polinomii.

247. Perchè possa questa divisione eseguirsi necessita come negli altri casi, che il dividendo sia il risultato d' una reale moltiplicazione del divisore, che in questo caso è un polinomio per un'altra quantità monomia, o polinomia, che rappresenterà il quoto. Così veggendo che $(a+c)(n+p) = an+cn+ap+cp$, noi siamo certi che questo quadrinomio può benissimo riguardarsi per dividendo, quando per divisore si prenda un qualunque dei 2 fattori binomii, che lo formano, p. e. $a+c$; mentre in tal caso l' altro fattore $n+p$ rappresentar debbe il quoto, che ora ci figuriamo di non conoscere, e che perciò ci facciamo a ricercare.

Non essendo accaduta riduzione alcuna nell' indicato dividendo, ogni suo termine è il diretto risultato della moltiplicazione di un qualche termine del divisore per un qualche termine del quoto. Il 1.° termine an è dunque prodotto dal 1.° termine a del divisore per uno de' termini ignoti del quoto, che si rileverà tosto essere n, dividendo pel termine a del divisore il primo termine del dividendo.

Essendo n un termine del quoto, nel dividendo esister deggiono i termini, che nascono dal moltiplicare per n tutti i termini del divisore $a+c$ cioè $an+cn$, poichè essi formano uno de' parziali prodotti che costi-

tuiscono il prodotto totale cioè il dividendo. Togliendo perciò da lui questi due termini, il residuo $ap + cp$, che ne risulta esprimerà l' altro parzial prodotto, o l' assieme degli altri prodotti parziali, che costituiscono con quello, che si è sottratto il total dividendo. Or il 1.° termine ap di questo residuo non può altrimenti esser prodotto, che dal termine a del divisore moltiplicato per un' altro termine del quoto, che tosto per mezzo della divisione di ap per a apparisce esser p. Dunque p è un' altro termine del quoto; e perciò nel dividendo debbono esistere i termini costituenti il prodotto parziale di tutto il divisore $a+c$ per p, cioè $ap+ap$. Togliam dunque dal dividendo anche questi, e poichè dopo tolti nulla abbiam più di residuo, conchiudiamo, che $n+p$ è il quoto di $(an+cn+ap+cp) : (a+c)$. Tolto infatti dal dividendo il prodotto di $a+c$ per n, indi il prodotto di $a+c$ per p, ossia tolto dal dividendo il prodotto di $(a+c)$ per $(n+p)$, zero è stato il residuo. Dunque il dividendo è uguale al prodotto di $(a+c)$ in $(n+p)$, ossia $(n+p)$ è quel fattore, che mollipl̃icato pel divisore $a+c$ dà il dato dividendo, è cioè il quoto cercato.

248. Quando i dividendi sono come nel citato esempio dei prodotti, in cui non ha auto luogo la riduzione, senza altre avvertenze la divisione sempre riesce bene qualunque sia l' ordine de' termini del dividendo, e del divisore. Non così quando alcuni termini del dividendo sono stati il risultato d' una riduzione. Infatti se si avesse $(a^2+2ac+c^2) : (a+c)$, già sappiamo (233), che il dato dividendo è una quantità prodotta da $(a+c)(a+c)$, e che perciò il quoto della proposta divisione è $(a+c)$; ma se nella supposizione che il quo-

to fosse ignoto, noi tentassimo di ottenerlo, se i termini del dividendo, e divisore sono disposti come sopra, la divisione riesce a meraviglia: non così però se i termini fossero diversamente collocati; se p. e. si avesse $(2ac+a^2+c^2)$: $(a+c)$ poichè in tal caso cominciando a dividere il 1.° termine $2ac$ del dividendo pel 1.° termine a del divisore, otteniamo per primo termine del quoto $2c$, che sappiamo non appartenergli; e ciò nasce perchè il $2ac$, che troviamo nel dividendo non è un termine che sia immediatamente risultato dalla semplice moltiplicazione, ma dalla riduzione, che poi si è fatta. Dunque allor solo certi noi siamo, che si ottengono de' veri termini al quoto, quando si dividono per un qualche termine del divisore que' termini del dividendo su cui non è caduta riduzione, e che sono perciò il puro prodotto di un termine del divisore per un termine del quoto. *Convien dunque dar principio alla divisione da que' termini del dividendo su cui si abbia certezza che non sia caduta riduzione, per esser certi, che il risultato che si ottiene sia realmente un termine del quoto.*

Or se que' prodotti, che ci vengono dati per dividendi, e che realmente non han sofferta riduzione, ci offrissero caratteri per poterli distinguere da quelli che l'hanno subita, per essi almeno, da qualunque termine si cominciasse la divisione, certi saremmo di operar bene: ma criterii generici per tale esplorazione ci mancano; e ben possiamo aver certezza che la riduzione ha auto luogo in que' dividendi il numero de' cui termini non è multiplo del numero de' termini del divisore, che è uno de' suoi fattori, perchè ogni prodotte che non ha sofferto riduzione ha un numero di termini multiplo di quello di ciascun de' suoi fattori (232);

ma non possiamo viceversa aver la certezza che la riduzione non abbia auto luogo in que' dividendi il numero dè cui termini è multiplo esatto del divisore, poichè tale potrebbe anche rimanere se la riduzione avesse fatto sparire nel dividendo un numero di termini eguale a quelli del divisore, o il doppio, il triplo, ec. In mezzo però all' incertezza intorno al saper, se in genere i prodotti, che ci si propongono per dividendi, abbiano subita o no riduzione, si ha il vantaggio di conoscerne uno fra i termini del prodotto, che siamo certi esserne stato esente, e tale è quello, ove una data lettera ha il massimo esponente (232), e tanto ci basta. Questo infatti noi scieglieremo per primo a dividersi, e lo divideremo per quel termine del divisore, in cui parimente la stessa lettera abbia l' esponente più alto, sicuri di ottenere per risultato un vero termine del quoto, e precisamente quello, ove la stessa lettera ha il massimo esponente, poichè quel termine di un prodotto, ove una data lettera è elevata alla più alta potenza non può risultare, che dalla moltiplicazione di que' termini de' fattori, ove la stessa lettera ha il maggior esponente.

249. Di quì la necessità di un' *operazione preparatoria*, che si premette alla divisione detta *Ordinamento de' Polinomii*, e che consiste nel prender di mira ne' loro termini una lettera qualunque che dicesi la *dominante*, e quindi disporre i termini sì del dividendo, che del divisore in modo, che primi a sinistra un dopo l' altro (se ve n' è più d' uno) sieno i termini ove la lettera abbia l' esponente massimo, poi un dopo l' altro tutti quelli (se ve n' è più d' uno) ove la lettera ha un' esponente maggiore, che in tutti gli altri ter-

mini rimasti; e così successivamente, e in fine sien quelli, ove la data lettera non esiste.

250. A chiarire quanto si è detto valga il seguente esempio. Debba dividersi $14c^3m+4cm^2r-12c^2m^2-4c^4-2c^2mr$ per $mr+2c^2-3cm$.

Ordinati questi polinomii rispetto ad una lettera qualunque p. e. a c, si eseguisce la divisione come qui esponiamo

	Dividendo	*Divisore*
	$-4c^4+14c^3m-12c^2m^2-2c^2mr+4cm^2r$	$2c^2-3cm+mr$
(A)	$+4c^4-6c^3m \quad +2c^2mr$	*Quoto*
(B)	$8c^3m-12c^2m^2 \quad +4cm^2r$	$-2c^2+4cm$
(C)	$-8c^3m+12c^2m^2 \quad -4cm^2r$	
	$0 \quad 0 \quad 0$	

Si divide $-4c^4$ primo termine del dividendo ordinato, per $2c^2$ primo termine del divisore. Il quoto $-2c^2$ che si ottiene siamo certi dover essere il 1.° termine del quoto (248): e perciò si segna nel di lui posto. E poichè il dividendo per essere il prodotto del divisore polinomio pel quoto polinomio risultar debbe di tutti i prodotti parziali del divisor polinomio $2c^2-3cm+mr$ per ciascun termine del quoto, contener dee dunque il prodotto $-4c^4+6c^3m-2c^2mr$ che noi otteniamo moltiplicando il divisore pel 1.° termine ora scoperto del quoto, e perciò sottraendo questi termini dal dividendo, il che si ottiene collo scrivergli con i segni cambiati sotto i rispettivi termini simili del dividendo, come si è fatto in (A), è chiaro che il residuo (B) che otteniamo fatta la riduzione altro non contiene che que' prodotti, che risultano dalla moltiplicazione del divisore pel 2.°, 3.° ec. termine del quoto. E poichè atteso

l'ordinamento de' polinomii anche $8c^3m$ primo termine di questo residuo contiene c elevato al più alto esponente, e quindi è un puro prodotto senza riduzione. di quel termine del divisore ove c ha il più alto esponente cioè del 1.° termine $-2c^2$ moltiplicato per quello de' residuali termini del quoto ove c ha parimente l' esponente maggiore, è chiaro che quest' altro termine del quoto, che rimane a scuoprirsi, cioè il 2.° risulterà tosto che si divida $8c^3m$ primo termine del residual dividendo per $2c^2$ primo del divisore; e perciò il risultato di questa divisione che è $4cm$ si scrive accanto al 1.° termine del quoto. Quindi per questo nuovo termine $4cm$ si moltiplicano tutti i termini del divisore, e i prodotti $8c^3m-12c^2m^2+4cm^2r$ si sottraggono dal residual dividendo scrivendogli sotto i suoi rispettivi termini simili con i segni cambiati, come si è fatto in (C); e poichè dopo la riduzione si ha zero di resto, conchiudiamo che nulla rimane del dividendo dopo che gli si è pria tolto il prodotto di $(2c^2-3cm+mr)\times-2c^2$, e quindi il prodotto dello stesso $(2c^2-3cm+mr)\times4cm$, ossia dopo che gli si è tolto il prodotto totale di $(2c^2-3cm+mr)$ $(-2c^2+4cm)$: conchiudiamo cioè che il dividendo contiene $(2c^2-3cm+mr)$ per quanto indica $(-2c+4cm)$, ossia che $-2c+4cm$ è quel fattore, che moltiplicato pel divisore $2c^2-3cm+mr$ produce il dato dividendo, ed è perciò il cercato quoziente della divisione proposta.

251. *Dalle esposte riflessioni deducendo ora la nuda parte prattica dell'operazione, eccone le regole, ed il processo.*

1.° *Ordinati rapporto ad una stessa lettera il dividendo, e il divisore, si dispongono come nella divisione de' numeri il 2.° a destra del 1.°*

II. *Pel 1.° termine del divisore dividesi il 1.° del dividendo, e nel posto assegnato al quoto si scrive il risultato.*

III. *Per esso moltiplicasi tutto il divisore, e i termini del prodotto si scrivono coi segni cambiati sotto il dividendo, in modo che i termini simili, che vi sono si corrispondano.*

IV. *Si fa la riduzione; ed il resto che per di lei mezzo si ottiene riguardasi come un nuovo dividendo, il cui 1.° termine perciò dividesi pel 1.° del divisore; scrivesi il risultato per 2.° termine nel quoto e si proseguono le stesse or indicate operazioni, finchè giungasi ad aver zero di resto.*

252. Vi sono dei casi in cui le moltiplicazioni di differenti termini del quoto pel divisore producono dei termini, che non sono nel dividendo, e che dopo la riduzione facendo parte del residuo bisogna poi dividere pel primo termine del divisore onde proseguire l' operazione. Questi sono que' termini, che si distrussero quando si formò il dividendo colla moltiplicazione de' suoi fattori divisore, e quoto, e che non possono a meno di non riprodursi nella formazione de' prodotti parziali di un fattore quale è il divisore per ciascun termine dell' altro, quale è il quoto. Infatti se la moltiplicazione del divisore pel quoto si eseguisce realmente, si vede che si ottengono tutti que' parziali prodotti, che si sono sottratti dai successivi residui nel processo della divisione, osservazion che giova a farci meglio comprendere la sua struttura, e a rilevare, che tutti que' termini nuovi, che sono comparsi nei successivi parziali dividendi sono quelli appunto che la riduzione elide nel prodotto, come evidentemente dimostra il seguente esempio.

Divisione

$$8c^3m^3 \qquad\qquad -a^3 \;\big|\; 2cm-a$$

(A) $-8c^3m^3+4ac^2m^2$ $\quad\big|\quad 4c^2m^2+2acm+a^2$

I. *Resto* $4ac^2m^2 \qquad -a^3$

(B) $-4ac^2m^2+2a^2cm$

II. *Resto* $2a^2cm-a^3$

(C) $-2a^2cm+a^3$

$0 \quad 0$

Moltiplicazione

$2cm-a$ *Divisore*

$4c^2m^2+2acm+a^2$ *Quoto*

(A) $8c^3m^3-4ac^2m^2$

(B) $+4ac^2m^2-2a^2cm$

(C) $+2a^2cm-a^3$

$8c^3m^3 \qquad\qquad -a^3$

Simili osservazioni far si possono in quest' altro esempio $(16z^4-c^4)$: $(8z^3+4cz^2+2c^2z+c^3)$ che dà per quoto $2z-c$.

253. Se la divisione de' polinomii si intraprendesse senza avere ordinati i polinomii, potrebbe darsi o che fossimo obbligati ad arrestarci in mezzo al processo per la comparsa di termini non divisibili, o che ottenessimo un quoto suscettibile di riduzione, come può verificare ognuno eseguendo le divisioni seguenti. $(2mp+m^2+p^2)$: $(m+p)$, e (d^2+d^3) $(d+1)$.

254. Come la moltiplicazione (233) così pur la divisione ci offre esempii, che ci manifestano alcune proprietà generali de' numeri indipendenti da ogni sistema

di numerazione. Trovando infatti colla esecuziòne della divisione

che $(x^4 - z^4) : (x - z)$

dà per quoto $x^3 + x^2z + xz^2 + z^3$

che $(x^5 - z^5) : (x - z)$

dà per quoto $x^4 + x^3z + x^2z^2 + xz^3 + z^4$

ec., se analizziamo l' andamento de' termini dei quoti di queste divisioni rileviamo agevolmente la legge, che in essi regna, allorchè trattasi di dividere la differenza di qualsivoglia eguali potenze di due numeri qualunque pella differenza de' numeri stessi, sicchè in simili casi di divisioni risparmiandoci la fatica di eseguire le operazioni possiamo tosto in grazia dell' osservata legge scrivere il quoto.

Così pur trovando

Che $(a^3 + c^3) : (a + c)$

dà per quoto $a^2 - ac + c^2$

che $(a^5 + c^5) : (a + c)$

dà per quoto $a^4 - a^3c + a^2c^2 - ac^3 + c^4$

che $(a^7 + c^7) : (a + c)$

dà per quoto $a^6 - a^5c + a^4c^2 - a^3c^3 + a^2c^4 - ac^5 - c^6$

ec. ec. ec.

anche l' andamento di questi quoti ci mostra che dividendo le somme di eguali potenze dispari di due numeri qualunque per la somma de' numeri stessi si hanno gli stessi termini al quoto, che si sono ottenuti nella divisione delle differenze, sol che in vece di essere tutti positivi, sono alternativamente positivi, e negativi.

255. Per esercizio di calcolo ecco altri esempii di divisioni polinomie.

Dividendo *Divisore*

$$(2a^6+3a^6c+a^6m+a^6c^2+a^6cm) : (a^2+a^2c) =$$

Quoto

$$2a^4+a^4c+a^4m$$

Dividendo *Divisore*

$$(16c^4m^4-a^4p^8) : (2cm-ap^2) =$$

Quoto

$$8c^3m^3+4ac^2m^2p^2+2a^2cmp^4+a^3p^6$$

Dividendo

$$5a^7-22a^6c+12a^5c^2-6a^4c^3-4a^3c^4+8a^2c^5 :$$

Divisore *Quoto*

$$5a^4-2a^3c+4a^2c^2 = a^3-4a^2c+2c^3$$

E gli studiosi possono poi a piacimento formarsene col moltiplicare due polinomii dati a capriccio, e quindi per un di essi dividere il prodotto poichè dee, risultar per quoto l' altro fattore. Così ad un tempo si esercitano nella moltiplicazione, e divisione, e si avveggono, se hanno o no commesso errori nel calcolo perchè l' una delle due operazioni serve all' altra di prova.

ARTICOLO V.

Del regresso dai prodotti ai loro fattori per mezzo della separazione de' fattori comuni o a tutti, o ad alcuni termini de' prodotti.

256. Se può darsi il caso, che di un dato prodotto sia noto un solo fattore, e si cerchi l' altro il che è l' oggetto della divisione già contemplata, può darsi

anche il caso, che di un dato prodotto si ignorino ambedue i fattori, e la ricerca di questi costituisce l'oggetto dell' attual' operazione, che è diametralmente opposta alla moltiplicazione. In essa infatti *dati i fattori* cerchiamo il prodotto: quì invece *dato il prodotto* facciam regresso ai fattori, torniamo cioè ad indicare una moltiplicazione già eseguita, e 3 casi posson darsi in proposito.

257. I.° *Polinomii in cui esistono de' fattori monomii comuni generali estensivi cioè a tutti i lor termini*.

In questo caso esaminando ad uno ad uno i termini tutti del dato polinomio si offre naturalmente agli occhi, la quantità, che esiste come fattore in tutti; e il polinomio ci si mostra prodotto da questo fattor comune moltiplicato per un fattor composto di tanti termini quanti esso ne ha. Or dopo che per mezzo della semplice ispezione de' termini ritrovato abbiamo uno de' fattori del dato prodotto, cioè questo *fattor comune generale*, per trovar l' altro è chiaro che far uso dobbiamo della divisione, perchè siamo precisamente al caso della ricerca di un solo fattore, quando è noto il prodotto, e l' altro fattore. Dividendo perciò colla regola (244) il dato prodotto pel fattor monomio comune generale, il quoto che ne risulta esprimer dee l' altro fattore polinomio, che ricercavasi.

Così dato il polinomio $c^4+ac^3-c^2$ basta degnar d' un guardo i suoi termini, perchè salti agli occhi che c^2 è un fattore comune a tutti e tre; e quindi per c^2 dividendo il dato polinomio, risulterà per quoto l'altro fattore (c^2+ac-1), sicchè conchiuder possiamo che $c^4+ac^3-c^2=c^2\,(c^2+ac-1)$.

Troviamo col metodo stesso
che $4a^2cf - 8ac^2x = 4ac\ (af - 2cx)$,
che $6a^2cy - 12a^3c^3y + 6a^2c^2y = 6a^2cy\ (1 - 2ac^2 + c)$.

258. II. *Polinomii in cui esistono de' fattori comuni parziali, alcuni de' quali cioè si estendono ad alcuni termini, ed altri ad altri.*

In tal caso convien replicare la stessa operazione sovra indicata per ogni assieme di que' termini, in cui troviamo uno stesso fattore. Così osservando il polinomio $6c^2m + 3m - 3fm + 4cr - 8c^2$ presto rilevasi, che il fattore comune ai primi tre termini è $3m$, e negli ultimi due è $4c$, onde avremo in sua vece

$$3m\ (2c^2 + 1 - f) + 4c\ (r - 2c)$$

259. In questo 2.° caso può darsi, che nel raccogliere i diversi fattori comuni parziali, i fattori polinomii, che chiusi rimangono tra parentesi sieno identici, e allora si raccolgono anch' essi nel modo medesimo.

Ecco un esempio $2a^2 - ac + 2ag - cg^2$

Nei primi due termini il fattor comune è a; e g nei due ultimi, e perciò raccogliendoli si ha

$$a\ (2a - c) + g\ (2a - c),$$

espressione in cui veggiamo, che il fattor polinomio per cui è moltiplicato a è identico all' altro per cui è moltiplicato g. Quindi se provvisoriamente contrassegniamo per F questo fattor polinomio $2a - c$, l' espressione diventa

$$aF + gF = (a+g)F\ (257) = (a+g)\ (2a - c).$$

Ecco un' altro esempio

$$ac^2 - ac^2r + c^2d - c^2dr - a + ar - d + dr$$

Raccogliendo per fattor comune ne' primi due termini ac^2, ne' due seguenti c^2d, negli altri due $-a$, nei due ultimi $-d$, la superiore espressione diventa

$$ac^2\ (1 - r) + c^2d\ (1 - r) - a\ (1 - r) - d\ (1 - r);$$

e poichè in tutti questi 4 termini v' è il fattor comune $1-r$, raccogliendolo abbiamo.

$$(1-r)\ (ac^2+c^2d-a-d).$$

E di nuovo esaminando questa espressione troviamo riguardo al 2.° fattor quadrinomio, che per fattor comune nei suoi primi due termini v' è c^2, e ne due ultimi -1, sicchè raccogliendogli otteniamo

$$(1-r)\left[\ c^2\,(a+d)-1\ (a+d)\ \right]$$

e finalmente raccogliendo il nuovo fattor comune ottenuto $a+d$ si ha

$$(1-r)\ (a+d)\ (c^2-1).$$

Ecco un' altro esempio nel polinomio $24a^2m^4+8hm^4+36a^2fm+12fhm-6a^2fm^3-2fhm^3-9a^2f^2-3f^2h$

Raccogliendo per fattor comune ne' primi 4 termini il $4m$ e negli ultimi 4 il $-f$, il polinomio dato convertesi in

$$(\ 6a^2m^3+2hm^3+9a^2f+3fh\ )\ 4m+$$
$$(\ 6a^2m^3+2hm^3+9a^2f+3fh\ )\ -f$$

E poichè in tutti e due questi termini polinomii il fattor chiuso tra parentesi è identico, raccogliendolo abbiamo $(6a^2m^3+2hm^3+9a^2f+3fh)\ (4m-f)$.

Analizzando ora il primo fattor quadrinomio di questa espressione troviamo che ne' suoi due primi termini per fattor comune v' è $2m^3$, e ne' suoi due ultimi v' è $3f$, e perciò raccogliendo ambedue, invece dell' antecedente espressione otteniamo

$$\left(\ (3a^2+h)\ 2m^3+\ (3a^2+h)\ 3f\ \right)\ (4m-f),$$

e raccogliendo il fattor comune $3a^2+h$ che esiste in questa espressione si avrà finalmente invece delle antecedenti espressioni

$$(3a^2+h)\ (2m^3+3f)\ (4m-f).$$

E da tutti questi esempii rileviamo che quando accade di dover raccogliere de' comuni fattori polinomii,

che compariscono dopo che si sono raccolti de' fattori comuni monomii, il polinomio dato è sempre un prodotto di due polinomii tra loro.

260. III. *Polinomii in cui non appariscono fattori monomii comuni nè generali nè parziali.*

Questo è il caso de' prodotti di polinomii per polinomii, nei quali i fattori comuni spariscono in forza della riduzione, e per questi l' Algebra elementare non ci offre mezzi generici, onde dai prodotti far regresso ai fattori. Solo il molto esercizio del calcolo ci giova facendoci risovvenire quali sieno i fattori di alcuni dati prodotti, p. e. del binomio a^2-c^2, che sebbene non ci presenti fattori comuni nè generali nè parziali, pur rammentiamo (233), che si risolve ne' fattori $a+c$, ed $a-c$.

261. La decomposizione de' prodotti ne' suoi fattori riesce spesso utilissima nelle applicazioni del calcolo algebrico alla soluzione de' problemi, come vedremo, e nell' esecuzione ancora di varie divisioni polinomie, come ci contestano i due seguenti esempii.

Sia a dividersi $8a^6-4a^3c^2+4a^3+2a^3-c^2+1$ per $2a^3-c^2+1$

Piuttosto che eseguir subito la divisione, poichè si vede che gli ultimi tre termini del dividendo non sono che lo stesso divisore moltiplicato per 1, basta osservare se lo stesso divisore è ancor fattore dei 3 primi, e per tale oggetto giova qui ricavare il fattor comune $4a^3$ dai primi 3 termini del dividendo, sicchè diventi $4a^3\ (2a^3-c^2+1)\ +2a^3-c^2+1$,
ovvero $4a^3(\ 2a^3-c^2+1\ )\ +1(\ 2a^3-c^2+1\ )$,
ovvero $(4a^3+1)\ (2a^3-c^2+1)$;
e quando il dividendo ha presa questa forma è ben

chiaro, che essendo divisore il fattore $2a^3-c^2+1$, il quoto è l' altro fattore $(4a^3+1)$ senza che faccia d' uopo di operare per ottenerlo.

Così sia a dividersi $12m^4p-8m^3p^2+20m^2+12m^2p-8mp^2+20$ per $3m^2p-2mp^2+5$.

Ben facilmente si scorge che gli ultimi 3 termini di questo dividendo non sono che lo stesso divisore moltiplicato per 4. Giova perciò osservare se egli è anche fattor de' tre primi, e questa scoperta si fa agevolmente raccogliendo il fattore visibilmente comune ai primi tre termini, che è $4m^2$. Per questa osservazione il dividendo diventa

$$4m^2\ (3m^2p-2mp^2+5)\ +4\ (3m^2p-2mp^2+5),$$

ovvero

$$(4m^2+4)\ (3m^2p-2mp^2+5);$$

e quando il dividendo ha presa questa forma è ben chiaro, che essendo divisore il fattore $(3m^2p-2mp^2+5)$, il quoto è l' altro fattore $(4m^2+4)$ sicchè non occorre di operare per ottenerlo.

L' occhio algebrico, che coll' esercizio del calcolare si acquista ci fa risparmiare l' esecuzione di molte divisioni in altri casi di simil natura sebben più complicati,

EPILOGO

CAPO V. Primarie operazioni sugli interi algebrici.

Quasi tutte consistono in trasformare indicazioni di operazioni in altre men complicate (197).

Articolo I. Addizione. E' una materiale raccolta di quantità si positive, che negative, e perciò talvolta produce decremento (198, e seg.) Può darsi su *Monomii*, e *Polinomii*, e si eseguisce collo scrivere i termini ad unirsi col segno che hanno, o un dopo l' altro (201), o col porre un sotto l' altro in colonna i termini simili, se vi sono, e poi ridurli (202).

Articolo II. Sottrazione. Per suo mezzo da una data quantità si tolgono altre sì positive, che negative, e perciò produce talvolta incremento, perchè sottrarre sottrazioni è un' aggiungere (204, e seg.). Il sottraendo o *Monomio*, o *Polinomio* va scritto coi segni cambiati o dopo il minuendo, o sotto in modo, che i termini simili, se vi sono, si corrispondano per più facilmente ridurli (211); e perciò la sottrazione è un caso particolare d' addizione (212).

Articolo III. Moltiplicazione. Questa può darsi I. tra Monomio e Monomio: II. tra Polinomio, e Monomio: III. tra Monomio, e Polinomio: IV. tra Polinomio, e Polinomio (213), e merita in essi rimarco l' esistenza de' termini affetti dal segno − (218, e seg.); e poichè negli ultimi 3 casi il prodotto totale risulta dell' assieme dei prodotti di ciascun termine del moltiplicando per ciascun del moltiplicatore, in tutti e tre non accade che la ripetizione del primo caso, ossia della moltiplicazione di monomio per monomio (217) e si esigono le 4 seguenti avvertenze, cioè I. i *segni* conformi danno +, e i contrarii − (227). II. i *coefficienti* si moltiplicano (229). III le *lettere* si uniscono (228). IV. gli *esponenti* delle stesse lettere si sommano (230). =

Articolo IV. Divisione. Ammette i 4 casi stessi della moltiplicazione, e poichè per essa si trova un fattor di un prodotto, di cui l' altro è dato, è eseguibile sol quando il divisore è realmente fattore algebrico del dividendo (234, e seg.) Il caso primo esige per rapporto ai segni le stesse regole, e per rapporto alle lettere, lor coefficienti, ed esponenti regole opposte a quelle della moltiplicazione (237, e seg.) Il secondo è una ripetizione del primo (244): non è mai eseguibile il terzo (246): e il quarto è dipendente dal primo (247, e seg.)

Articolo V. Regresso dai prodotti ai fattori. Ha luogo quando vi sono *fattori monomii comuni* sì generali (257), che parziali (258), e non è eseguibile quando in grazia della riduzione questi fattori non sono più nel prodotto, come negli altri casi, visibili (260).

CAPO VI.

Teoria delle Frazioni .

Fin qui sugli interi sì numerici, che algebrici: passiamo ora alle frazioni sì aritmetiche, che letterali .

ARTICOLO I.

Natura delle frazioni , e principali loro proprietà .

Origine , indole , e nomenclatura delle frazioni

262. Sin dalle preliminari notizie l' idea dell' unità , e numeri frazionarii si è fatta nascere dalla misurazione (5) , mostrando come nel caso in cui la stabilita unità non misuri esattamente una grandezza, sia d'uopo ricorrere ad una parte dell' unità un dato numero di volte di essa più piccola , la quale sia contenuta esattamente nella quantità a misurarsi . La nuova unità misuratrice parte dell' unità principale si chiamò *unità frazionaria* : *numeri frazionarii* si dissero le quantità per di lei mezzo misurate , espresse cioè dal complesso delle unità frazionarie , che esattamente contengono , e l' una , e gli altri or comprendiamo sotto il generico nome di *frazioni* , *o rotti* .

263. Se l'unità frazionaria è solo 2 volte più piccola della misura principale chiamasi *mezzo* , *terzo* se 3, *quarto* se 4, *quinto* se 5, *sesto* se 6, *settimo* se 7, *ottavo* se 8, *nono* se 9, *decimo* se 10 volte ; e se il numero , che indica quanto l' unità frazionaria è più piccola della principale supera il 10, l' unità fra-

zionaria viene enunciata dal numero stesso, cui siasi aggiunta la desinenza in *esimo*, dicendosi undic*esimo*, se 11, vent*esimo* se venti, centododic*esimo* se 112 volte più piccola dell' unità principale, ec.

264. I numeri frazionarii poi altro non esigono per esser espressi, se non che venga premesso al nome dell' unità frazionaria il nome indicante il loro numero. Così volendo valutare in tese l' altezza d' un granatiere stabilita a modello del suo reggimento, se presa per misura la tesa la troviamo eccedente, e se dopo varie prove con altre sue parti, troviam finalmente che il sesto di tesa, che è il piede, è contenuto esattamente, e p. e. 5 volte nell' altezza del granatiere, conchiudiamo che essa è 5 *sesti* di tesa, è cioè il complesso di 5 di quelle parti, ciascuna delle quali è 6 volte più piccola dell' unità, o di cui se ne esigono 6 per formarla.

265. E da ciò apparisce che l' enunciato d' una frazione contiene due numeri interi. Il 1°. esprimendoci il complesso delle unità frazionarie, ci addita il rapporto della quantità misurata all' unità frazionaria: il 2.° mostrandoci di quanto questa è più piccola della principale, indica il rapporto dell' unità frazionaria alla principale. Così nel *cinque sesti* di tesa v' è il numero 5, il quale esprime, che la quantità misurata è 5 volte maggiore dell' unità frazionaria *sesto di tesa*, ossia è un complesso di 5 di queste unità, e questo 5, che indica il numero delle parti, che ci *numera* le unità frazionarie *sesti*, che nella frazione stanno accolte, ed in genere *quel numero, che mostra quante sono le parti che formano la data frazione, chiamasi Numeratore*. Nel *cinque sesti* v' è pure il numero

6 indicato dalla parola *sesti* il quale ci appalesa, che quante sono le sue unità e in tante parti è stata divisa l' unità principale, in 6 cioè nel nostro esempio, e ehe una di queste è stata presa per secondaria unità misuratrice: ci appalesa cioè, che ciascuna delle unità frazionarie componenti la frazione è 6 volte più piccola dell' unità principale tesa, cui si riferisce. E questo numero 6, ed in genere quel numero, che nelle frazioni è stato stabilito per dimostrarci essere l' unità frazionaria tanto più piccola dell' unità di quanto esso è di lei maggiore, che concilia perciò un valore tanto più piccolo all' unità frazionaria, e quindi ai suoi complessi, quanto esso è più grande, *quel numero che ci precisa soltanto il valore, la specie, il nome delle parti, o unità frazionarie, che costituiscono la frazione, se cioè si tratti di sesti, di decimi, di ventesimi, ec., senza avere influenza alcuna sul loro numero*, è stato chiamato *Denominatore*.

266. Al numeratore, e denominatore poi si dà il comun nome di *termini della frazione*; ed entrambi sono indispensabili per intenderne il valore. Ed infatti se nell' altezza di cinque sesti di tesa non conoscessimo che il solo numeratore 5, noi sapremmo che la altezza è un complesso di 5 parti tutte eguali, e più piccole della tesa, ma non sapremmo poi precisarne il valore, perchè ignoriamo il rapporto, che queste parti hanno alla tesa, e quindi non sappiamo se sieno 5 piedi o pollici, o linee, che sono tutte frazioni più, o meno grandi della tesa stessa. Egualmente se conoscessimo il solo denominatore 6, noi sapremmo, che è una parte 6 volte più piccola della tesa quella, che misura la data altezza, che perciò essa è un complesso di sesti, ma non sapremmo precisarne il valore, per-

chè non ci è noto quanti poi sieno questi sesti, che la misurano. Non può in somma determinarsi una quantità frazionaria, se conoscendo il numero delle parti, ossia il numeratore, ne ignoriamo la grandezza, cioè il denominatore, o viceversa.

Scrittura delle frazioni, e loro analogia colla divisione.

267. Si è convenuto di indicar le frazioni scrivendo il numeratore al di sopra, e il denominatore al di sotto d'una linea orizzontale, ovvero il primo a sinistra e il secondo a destra d'una linea obbliqua. Così tanto $\frac{5}{6}$, che $5/6$ indicano la stessa frazione *cinque sesti*. Questa indicazione è la stessa di quella usata per la divisione, e ciò non a caso, ma per denotare coll'uniformità de' segni l'identità delle idee, cui vengono applicati, essendo cose identiche *quoto*, *e frazione*.

268. Ed infatti sotto qualunque aspetto venga presa la divisione, il quoto come fattore del dividendo vi debbe esser sempre contenuto tante volte quante ne indica l'altro fattore, che è il divisore, debbe esser cioè il quarto, il quinto, ec. se il divisore è il 4, il 5, ec. Ciò posto se p. e. dopo avere spezzato un frutto in 4 parti eguali per distribuirlo in 4 persone, ne diamo un quarto a ciascuna, il quarto, che ha ognuna riceuto è il *quoto di 1 diviso per 4*. Se due sono i frutti a dividersi nelle stesse 4 persone, anche del 2.° diamo un quarto a ciascuna, e così 2 *quarti* sarà il quoto di 2 diviso per 4, come chiaro risulta ancor dal riflesso, che essendosi raddoppiato il dividendo, mentre lo stesso è rimasto il divisore, si debbe raddoppiare anche il quoto (104). Se tre sono i frutti a dividersi, anche del

terzo frutto daremo un quarto ad ognuno, e ognuno ne avrà così riceuti 3 quarti, e 3 *quarti sarà perciò il quoto di* 3 *diviso per* 4, come 4 quarti, 5 quarti ec. il quoto di 4, di 5, ec. diviso per 4. E tal verità chiara pur apparisce anche in astratto, sol che si concepisca il dividendo decomposto nelle sue unità. Considerando p. e. il 3 come sciolto nelle sue parti, esso non è che 1+1+1, e perciò 3 diviso per 5, ossia la quinta parte di 3 è il quiuto di tutte e singole le sue unità, è cioè *un quinto* più *un quinto*, più *un quinto*, ossia 3 *quinti*. Così egualmente 36 diviso per 12 ossia la dodicesima parte di 36 è la dodicesima parte di tutte le 36 unità di cui costa, ossia è un dodicesimo ripetuto 36 volte, ossia è 36 dodicesimi. Ed in genere a diviso per n, ossia la ennesima parte del numero a è la ennesima parte di tutte e singole le unità, che lo formano, è cioè un' *ennesimo* ripetuto tante volte quante unità sono in a, è cioè un numero a di ennesimi. Dunque *in tutte le divisioni i quoti possono riguardarsi sempre come frazioni, che hanno per numeratore il dividendo, e per denominatore il divisore, e viceversa le frazioni si possono riguardar come quoti d' una divisione indicata dal numeratore dividendo, e dal denominatore divisore*. E' dunque giusto che lo stesso segno sia destinato ad esprimere sì le divisioni, che le frazioni, che $^3/_5$ tanto significhi 3 diviso per 5, che 3 quinti, subitochè queste due espressioni sono identiche. E' poi a notarsi che allorquando trattasi di frazioni numeriche, come $^{11}/_{24}$, esse possono enunciarsi tanto sotto aspetto di frazione, dicendo 11 *ventiquattresimi*, che sotto aspetto di divisione dicendo 11 *diviso per* 24; ma quando trattasi di divisioni algebriche

ineseguibili, quando cioè i loro quoti non possono essere espressi da quantità intere, come $\frac{c}{n}$, queste si riguardano come frazioni, ma si enunciano sotto aspetto di divisioni unicamente dicendo *c diviso per n*, e non già sotto aspetto frazionario, dicendo *c ennesimi*.

Distinzione delle frazioni vere, e spurie.

269. Potendo l' unità frazionaria misurare qualunque quantità sia pure grandissima, non vi è limite alla sua ripetizione, e perciò i suoi complessi, ossia i numeri frazionari possono esser tali da eguagliare, e superare qualunque numero intero. Per altro siccome nel suo primitivo valore *frazione significa una parte dell' unità, perciò i numeri frazionarii, quand' hanno il numeratore minore del denominatore, diconsi frazioni proprie, genuine, vere*, perchè realmente minori dell' unità. Tali sono $^4/_5$, $^{10}/_{11}$, $\frac{a}{ac}$. Rilevasi infatti che sono minori dell' unità le frazioni, che hanno il numeratore più piccolo del denominatore tanto se si riguardino sotto aspetto frazionario, perchè sono un complesso di parti minor di quello, che si esige per formar l' unità, tanto se riguardinsi come quoti, perchè son quoti di divisioni, in cui il dividendo essendo minor del divisore, dee ripartirsi in un numero di parti maggiore delle sue unità, sicchè ciascuna di queste parti ossia il quoto dee dell' unità esser più piccola.

E qui osserviamo che come tutte le *frazioni vere* sono quoti di divisioni, in cui il dividendo è minore del divisore, e viceversa i quoti di divisioni in cui il

dividendo è minor del divisore sono tutti frazioni vere, così questi non possono essere altrimenti espressi che per frazioni. Se vogliamo infatti realizzar la divisione indicata da 4 diviso per 15, ossia passar dal quoto *indicato* all' *effettivo*, altra idea non possiamo formarci che quella di 4 *quindicesimi*.

Quando i numeri frazionarii hanno il numeratore non minore del denominatore, si chiamano frazioni improprie, o *spurie*, perchè risultando di un numero di parti non minore di quello che si esige per formar l' unità, hanno un valore o eguale all' unità, o di essa maggiore.

270. Quelle frazioni improprie poi, che hanno il numeratore eguale al denominatore, o multiplo di esso si chiamano *apparenti*, perchè frazionaria non hanno che la pura apparenza, essendo eguali all' unità, o ai numeri interi. Tali son p. e. $4/4 = 1$; $15/5 = 3$; $\frac{a}{a} = 1$; $\frac{ac}{c} = a$. Infatti tutte le frazioni, che hanno il numeratore eguale al denominatore, son sempre uguali all' unità, perchè ci offrono tante parti, quante se ne esigono per formar l' unità; ed anche perchè sono il quoto d' una quantità divisa per se stessa (103). Così $4/4 = 1$, o si consideri per frazione, cioè per 4 di quelle parti delle quali 4 se ne esigono per formar l' unità, o si consideri come 4 *diviso per* 4. Tutte le frazioni, che hanno il numeratore multiplo del denominatore sono eguali a un' intero, o si considerino sotto aspetto di frazioni, o di quoti: come frazioni, poichè quante volte il numero delle parti che costituisce l' unità ossia il denominatore è contenuto esattamente nel numero delle parti componenti la frazione, cioè nel

numeratore, e a tante unità il numero frazionario equivale; o si riguardino come quoti, perchè di tante unità appunto il quoto risulta, quante sono le volte, che esattamente il divisore è contenuto nel dividendo. Così $^{15}/_{5} = 3$ tanto se si consideri per frazione, ossia per 15 *quinti*, che equivale a *tre volte cinque quinti*, ossia a 3 volte 1, ossia a 3, tanto se si consideri come 15 *triplo di* 5 *diviso per* 5; ond' è che con l' effettiva divisione le frazioni apparenti si convertono in interi.

271. Quelle frazioni improprie, che hanno il numeratore maggiore ma non multiplo del denominatore diconsi *miste*, perchè equivalgono a un misto complesso di interi, e frazioni. Tal' è $^{11}/_{4} = {}^{8}/_{4} + {}^{3}/_{4} = 2 + {}^{3}/_{4}$: tal' è pure $^{100}/_{3} = {}^{99}/_{3} + {}^{1}/_{3} = 33 + {}^{1}/_{3}$. Tal' è pure $\frac{ac+m}{c} = \frac{ac}{c} + \frac{m}{c} = a + \frac{m}{c}$.

A questo risultato infatti d' un intero più una frazione giungiamo, o si riguardino le frazioni miste come frazioni, o come quoti. Riguardando un rotto misto sotto il primo aspetto, possiamo concepirlo come formato dalla somma di due frazioni l' una apparente, il cui numeratore sia il maggior multiplo del denominatore contenuto nel rotto dato, la quale perciò riducesi a intero (270), e l' altra vera, che esprime il numero delle parti, che manca alla prima per completare il dato rotto, come i citati esempii ci mostrano. Riguardandolo come indicazione di divisione, noi possiamo eseguirla, ma poichè per ipotesi il dividendo è maggiore ma non è multiplo del divisore, si avrà in tutte un residuo. Perciò il numero intero, che coi noti metodi di divisione otteniamo non è il quoto appartenente al dividendo intero, ma è il quoto soltanto

del maggior multiplo del divisor contenuto nel dividendo (110). E finchè si è parlato di numeri interi ci siamo contentati di quest' unica osservazione, che cioè il numero ottenuto non è il quoto di tutto il dividendo, e non ci siamo occupati poi del come possa il vero completo quoto ottenersi, per non introdurre nell' espressione di esso delle frazioni di cui non ben sapevamo apprezzare allora il valore. Or che queste conosconsi, conviene occuparsene, osservando che l' ultimo residuo fa parte anch' esso dell' intero dividendo, e va perciò anch' esso trascurato non già, ma diviso pel divisore dato, ed il quoto che ne risulta va aggiunto al quoto ottenuto, onde avere il completo quoto di tutto il dividendo. Ma poichè l' ultimo residuo dividendo è sempre minore del divisore (115), il quoto che ne risulta è espresso da una frazione *vera*, perchè il suo numeratore è minore del denominatore, ed è perciò una quantità, che non può essere altrimenti espressa che per frazione (269). Dunque l' *esatto valore delle frazioni miste, ossia l' esatto quoto nelle divisioni sì numeriche, che algebriche, che danno un residuo risulta di due termini, dell' intero che si ottiene coi noti metodi di divisione, e di una frazione vera, il cui numeratore è il residuo, e il denominatore è il divisore.*

Principali proprietà delle frazioni.

Dalle idee, che ci siamo formati del numeratore, e denominatore scendono le seguenti proprietà delle frazioni sia che si riguardino o per *collezioni d' unità frazionarie*, o per *quoti*.

272. I. Il valor d' una frazione cresce, o diminuisce, se rimanendo intatto il denominatore, si accresca o diminuisca il solo numeratore; poichè così rimanendo la stessa la grandezza delle parti indicata dal denominatore, cresce, o diminuisce il loro numero. Perciò $^5/_7 > {}^3/_7$, $\frac{a+m}{c} > \frac{a}{c}$, e viceversa.

E se il solo numeratore ossia il numero delle parti sarà ripetuto 2, 3, molte volte, dupla, tripla, multipla diverrà ancor la frazione: se in vece sarà reso 2, 3, molte volte più piccolo, la frazione ancora diverrà altrettante volte minore; poichè quandò le parti rimangono della stessa specie, la grandezza della frazione non dipende che dal lor numero. Così moltiplicando per 3 il solo numeratore della frazione $^2/_7$ otteniamo $^6/_7$, che ne è il triplo, e all' opposto dividendo per 3 il solo numeratore della frazione $^{12}/_{15}$ si ha $^4/_{15}$, che ne è il suttriplo. Così $\frac{am}{c}$ è m volte maggiore di $\frac{a}{c}$, perchè nato dalla moltiplicazione per m del solo numeratore di questa frazione $\frac{a}{c}$; e $\frac{h}{n}$ è f volte più piccolo di $\frac{fh}{n}$, perchè risulta dalla divisione per f del solo numeratore di quest' ultima frazione. Dunque *ogni frazione vien moltiplicata, o divisa per quel numero, che moltiplica, o divide il suo solo numeratore*.

273. II. All' opposto il valor d' una frazione diminuisce a tenor che si aumenta, cresce a tenor che diminuisce il suo denominatore, quando resta intatto

il numeratore, poichè in tal caso rimanendo lo stesso il numero delle parti indicato dal numeratore, questo numero di parti formerà una grandezza tanto più piccola, o grande, quanto più piccolo, o grande è il loro valore; e questo abbiam già veduto (265), che scema coll' ingrandirsi, e ingrandisce coll' impiccolirsi del denominatore. Perciò $^2/_{15} < {^2/_5}$, e $\frac{a}{cf} < \frac{a}{c}$, e viceversa.

E precisamente osserviamo, che col rendere doppio il denominatore d' una frazione, formiamo nuove unità frazionarie tali, che di esse se ne esige un numero doppio delle antecedenti per comporre l' unità, cosicchè di queste nuove unità frazionarie debbono due esisterne in ciascuna delle anteriori, e debbono perciò essere due volte di esse più piccole. Così col duplicare il 4 denominatore della frazione $^3/_4$ risulta $^3/_8$; e ciascun di questi ottavi è due volte più piccolo di un quarto, poichè fa d' uopo che ogni quarto ne contenga due, onde colla unione di 4 quarti, di cui l' unità risulta, si venga ad aver fatta ancora la collezione di 8 ottavi, da cui parimente la stessa unità è costituita. Se rendiamo triplo il denominatore d' una frazione, ciò equivale a dire che formiamo nuove unità frazionarie tali, che di esse se ne esige un numero triplo delle antecedenti per formar l' unità principale, sicchè tre di queste nuove unità frazionarie deggion esistere in ciascuna delle antecedenti, e debbono perciò essere tre volte più piccole. Così col triplicare il 5 denominatore della frazione $^2/_5$ otteniamo $^2/_{15}$; e ciascuno di questi quindicesimi è 3 volte più piccolo di un quinto, giac-

chè occorre, che ogni quinto ne contenga 3, onde colla collezione di 5 quinti, che formano l'unità si sieno adunati ancora 3 volte 5, ossia 15 quindicesimi, quanti appunto per formar la stessa unità se ne chieggono. E simili ragionamenti ci portano a conchiudere, che quando il denominatore si rende 4, 5, e un qualunque numero di volte maggiore, le unità frazionarie divengono un' egual numero di volte più piccole, sicchè se si moltiplica per un qualsiasi numero il denominatore d' una frazione lasciando intatto il numeratore, la frazione resta impiccolita, ossia divisa per lo stesso numero, perchè la frazione riman composta di tante parti, quante prima ne avea, ed essendo ciascuna di esse divenuta un dato numero di volte più piccola, egual numero di volte più piccolo debbe esserne divenuto il complesso. Perciò $^3/_8$ nato dall' aver moltiplicato per 2 il denominatore di $^3/_4$ è 2 volte più piccolo di $^3/_4$: il $^2/_{15}$, nato dell' aver per 3 moltiplicato il denominatore di $^2/_5$, è 3 volte più piccolo di $^3/_5$; e $\frac{a}{cn}$ è n volte più piccolo di $\frac{a}{c}$, da cui è nato per la moltiplicazione del denominatore c per n.

All' opposto se il denominatore d' una frazione vien diviso per 2, 3, ec, le nuove unità frazionarie son tali, che se ne esige di esse per formar l' unità un numero 2, 3, ec, volte più piccolo delle antecedenti, sicchè di queste dee ciascuna nuova unità frazionaria contenerne 2, 3, ec, ed esser perciò di esse 2, 3, ec, volte maggiore. Così col dividere il 12 denominatore della frazione $^2/_{12}$ per 4 otteniamo $^2/_3$, e ciascuno di questi

terzi è 4 volte più grande di un dodicesimo, mentre debbe ogni terzo contenerne 4 perchè possa la somma di 3 terzi eguale all' unità racchiudere la somma di 12 dodicesimi quanti appunto si esigono per parimenti formar l'unità. Quindi è che se si divide per un numero qualunque il denominatore d' una frazione, inalterato lasciando il numeratore, la frazione resta ingrandita, o moltiplicata per lo stesso numero, perchè la frazione resta come prima costituita da uno stesso numero di parti, ma essendo ciascuna di esse ingrandita per quanto indica il numero, che ha diviso il denominatore, anche il complesso delle parti, ossia la frazione debbe essersi ingrandita egualmente. Perciò dividendo per 3 il solo denominatore della frazione $^2/_9$ risulta $^2/_3$ triplo di $^3/_9$; e quadruplo di $^5/_{28}$ è $^5/_7$ nato dal dividere per 4 il solo denominatore 28; ed n volte maggiore di $\frac{m}{an}$ è la frazione $\frac{m}{a}$ nata dal dividere per n il denominatore. Possiamo dunque conchiudere, che *ogni frazione vien divisa, o moltiplicata per quel numero che moltiplica, o divide il suo solo denominatore*.

274. Le citate proprietà delle frazioni possono raccogliersi nello specchio seguente.

Ogni frazione	*si moltiplica* *si divide*	*moltiplicando* *dividendo*	*il numeratore*
Ogni frazione	*si divide* *si moltiplica*	*moltiplicando* *dividendo*	*il denominatore*

E a questi stessi risultati giungiamo, se le frazioni si considerino come *quoti*, poichè rimanendo costante il divisore, ossia il denominatore, il quoto ingrandisce o impiccolisce di quanto è ingrandito, o impiccolito il

dividendo, ossia il numeratore (104); e rimanendo costante il dividendo, ossia il numeratore, il quoto impiccolisce, o ingrandisce di quanto viene ingrandito, o impiccolito il divisore, ossia il denominatore (105).

275. Da tutto ciò risulta, che le operazioni fatte sul numeratore producono sulla frazione gli stessi effetti che in lui si sono operati; mentre le operazioni eseguite sul denominatore producono sulla frazione effetti opposti. Dal che deriva, che se si moltiplichi, ovvero si divida ad un tempo numeratore, e denominatore d' una frazione per un numero stesso, la frazione cangia d'aspetto, ma non già di valore. Ed in vero se moltiplicando il denominatore per 2, per 3, ec, la frazione diventa 2, 3, ec, volte più piccola, moltiplicando poi per lo stesso numero anche il numeratore, la frazione già divenuta 2, 3, ec, volte più piccola per la prima operazione, diventa lo stesso numero di volte più grande, e perciò il suo valore torna sott' altro aspetto ad essere quello di prima. Così se moltiplicando per 2 il solo denominatore della frazione $^3/_4$ otteniamo $^3/_8$, essendo questi ottavi parti due volte più piccole dei quarti, sicchè ad ogni quarto equivalgono due ottavi, converrà di questi duplicare il numero, onde avere la stessa quantità di prima, converrà cioè moltiplicar per 2 anche il numeratore, ed avremo allora $^3/_4 = {^6/_8}$. Egualmente se dividendo il denominatore della frazione $^8/_{28}$ per 4 otteniamo $^8/_7$, essendo questi settimi parti 4 volte più grandi dei ventottesimi, onde formino una quantità eguale alla data frazione $^8/_{28}$, converrà prenderne un numero 4 volte più piccolo, converrà cioè dividere per 4 anche il numeratore, ed avremo allora $^8/_{28} = {^2/_7}$. Ed in ogni frazione debbe la stessa proprietà verificarsi, poichè quanto essa perde, o guadagna nella gran-

dezza delle parti per la moltiplicazione, o divisione del denominatore, altrettanto al tempo stesso guadagna o perde nel numero delle parti pella moltiplicazione, o divisione del numeratore: oppure quanto perde, o guadagna la frazione considerata come quoto per l' incremento, o decremento del divisore, altrettanto guadagna o perde per l' eguale incremento, o decremento del dividendo (106). Perciò si hanno le seguenti eguaglianze moltiplicando, o dividendo ambedue i termini di ciascuna frazione per una stessa quantità.

Moltiplicando i termini	*Dividendo i termini*
della prima per $3ad$ della seconda per $-2am$ della terza per ac della quarta per a^2+m^2, si ha	della prima per $5m^2pr$ della seconda per p. della terza per $p+d$ della quarta per m^2-2c si ha
1. $\frac{d^3+2am}{4dm^2}=\frac{3ad^4+6a^2dm}{12ad^2m^2}$	$\frac{15m^2p^3qr}{25m^4prs}=\frac{3p^2q}{5m^2s}$
2. $\frac{-a^2m}{2c^2-3m^2}=\frac{2a^3m^2}{-4ac^2m+6am^3}$	$\frac{p^2-3ap-p}{mp}=\frac{p-3a-1}{m}$
3. $\frac{a^2+ac}{a^2-c^2}=\frac{a^3c+a^2c^2}{a^3c-ac^3}$	$\frac{p^2+dp}{p^2-d^2}=\frac{p}{p-d}$
4. $\frac{a^2-m^2}{a^2+m^2}=\frac{a^4-m^4}{a^4+2a^2m^2+m^4}$	$\frac{m^4-4c^2}{cm^2-2c^2}=\frac{m^2+2c}{c}$

EPILOGO

Natura, e proprietà delle frazioni.

Nella *nomenclatura* delle frazioni, le quali hanno origine dalla misurazione, occorrono due numeri, il numeratore cioè, che

numera le parti, e il denominatore, che ne precisa la specie, e il *nome* (262, e seg); ed entrambi necessitano per determinarne il valore (266).

Nella *Scrittura delle frazioni*, si usa lo stesso segno, che per le divisioni, perchè ogni quoto può riguardarsi per frazione, il cui nnmeratore è il dividendo, e il cui denominatore è il divisore. (267, e seg.).

Si distinguono le frazioni in vere, e spurie, le quali sono o *apparenti*, o *miste* (269, e seg.).

Hanno le seguenti proprietà I. Si *moltiplicano* per quel numero, che moltiplica il numeratore, o divide il denominatore: II. Si *dividono* per quel numero, che divide il numeratore, o moltiplica il denominatore (272, e seg.): III. *non si alterano*, se ambo i loro termini si moltiplichino, o dividano per una stessa quantità (275).

ARTICOLO II.

Delle operazioni, che alterano l' aspetto delle frazioni senza alterarne il valore.

276. Tutte le operazioni già pratticate sugli interi possono anche eseguirsi sulle quantità frazionarie. Per tale oggetto però talvolta giova, talvolta necessita, che le frazioni senza cambiar di valore prendano altra forma, ed aspetto in grazia di alcune particolari operazioni esclusivamente lor proprie. E queste operazioni preliminari, che senza alterare il valore delle frazioni, ne modificano il solo aspetto onde disporle a subire quelle altre operazioni della stessa indole di quelle, che si son già sugli interi eseguite, e che perciò ne alterano la grandezza, s' appoggiano tutte ad un unico già osservato principio » *Che una frazione non si altera se ambo i suoi termini vengano moltiplicati, o divisi per una medesima quantità* », e son tutte conosciute sotto il comun nome di *riduzioni*.

I. Riduzione delle frazioni a interi

277. Le frazioni suscettibili di questa operazione non sono che le spurie sì apparenti, che miste; e già osservato abbiamo (270, 271) come si ottengano gli interi in esse contenuti dividendo il numeratore pel denominatore della stessa frazione,

Questa riduzione di frazioni a interi può dirsi che è praticata tutte le volte, che eseguiamo una divisione qualunque, giacchè quando otteniamo un quoto senza residuo abbiamo ridotta a interi una frazione apparente; quando ha luogo un residuo, abbiamo ricavato gli interi da una frazione mista. Così se si ha a dividere 72 per 9, la sola *enunciazione* della divisione ci mostra, che il quoto è uguale alla frazione $^{72}/_{9}$ (268); e l' *esecuzione* ci mostra che 8 è l' intero equivalente alla frazione $^{72}/_{9}$. Se si ha a dividere 60 per 7, l' indicazione della divisione, ci da la frazione $^{60}/_{7}$; e la esecuzione ci appalesa, che la frazione $^{60}/_{7}$ è equivalente ad $8 + {}^{4}/_{7}$ (271). Colla esecuzione della divisione riducendo ad interi le seguenti frazioni algebriche sì apparenti, che miste, troviamo

$$\frac{8a^2c^3q}{4ac^2} = 2acq; \quad \frac{15a^2c^2-5c^2}{5c^2} = 3a^2-1$$

$$\frac{3ac+ac^2m+c^2h}{ac} = 3+cm+\frac{c^2h}{ac}$$

$$\frac{2a^2q-6c^2q+2d-f}{a^2-3c^2} = 2q+\frac{2d-f}{a^2-3c^2}$$

$$\frac{4c^2m^2-4cm^3+a+m^4}{2cm-m^2}=2cm-m^2+\frac{a}{2cm-m^2}$$

II. Riduzione degli interi a frazioni

Questa è un' operazione inversa all' antecedente, che si prattica quando interessa dare agli interi un' aspetto frazionario.

278. Talvolta pel fine che ci proponiamo basta dare all' intero un' aspetto frazionario comunque, ed allora si ottiene l' intento coll' *apporre l' unità per denominatore* al dato intero scritto come numeratore. E chiaro infatti, che $4={}^4/_1$, $a={}^a/_1$, poichè il quoto di qualunque quantità divisa per 1 è sempre eguale al dividendo (103).

279. Occorre talvolta convertir l' intero in frazione di un determinato denominatore, e in tal caso, poichè il denominatore esprime il numero delle parti, nelle quali ciascuna unità si concepisce divisa, il numero delle parti contenute nel dato intero sarà espresso dal denominatore ripetuto tante volte quante unità ha l' intero, ossia dal denominatore moltiplicato per l' intero. Così volendo convertire il 4 in settimi, siccome in ogni unità esistono 7 settimi, il numero de' settimi contenuti in 4 sarà 7 ripetuto 4 volte, ossia moltiplicato per 4, e perciò sarà $4={}^{28}/_7$. Così se a si vuò convertire in una frazione che abbia per denominatore d ovvero $d+c$ avremo

$$a=\frac{ad}{d}\text{, ovvero } a=\frac{a(d+c)}{d+c}=\frac{ad+ac}{d+c}$$

Si converte dunque un intero in una frazione

di un dato denominatore collo scrivere per numeratore il prodotto dell' intero pel dato denominatore.

280. Che così debbasi operare si sarebbe potuto dimostrare ancora col dare all' intero l' aspetto di frazione ponendovi per denominator l' unità, e quindi col moltiplicare ambo i termini della frazione pel voluto denominatore. Così

$$4 = \frac{4}{1} = \frac{4.7}{1.7} = \frac{28}{7}; \text{ ed } a = \frac{a}{1} = \frac{ac}{1.c} = \frac{ac}{c}$$

III. Riduzione delle frazioni ai menomi termini

281. Se i numeri interi possono tutti prender l' aspetto de' frazionarii, e viceversa i frazionarii spurii quello di interi, come le due esposte operazioni ci hanno addimostrato, non per questo si creda, che rimarchevole discrepanza non siavi fra i primi, e i secondi. Notiamo infatti, che mentre nei numeri interi una data grandezza non è suscettibile che di una sola espressione, mentre un peso di 5 libre finchè è riferito a libre non può esser espresso che da 5, nelle frazioni al contrario una stessa grandezza può esser enunciata in mille modi diversi. Così un quarto di libra può esser indicato da 2 ottavi, da 4 dodicesimi, ec. Possono infatti i termini d' una frazione cambiare in mille modi di aspetto senza che ella cambii di valore, purchè sieno entrambi moltiplicati o divisi per una medesima quantità (275). Così $^1/_3$, $^2/_6$, $^4/_{12}$, $^8/_{24}$, $^{16}/_{48}$, $^{32}/_{96}$, $^{64}/_{192}$, $^{128}/_{384}$, ec. sono tutte identiche espressioni d'una stessa frazione, perchè tutte nate dal moltiplicar ripetutamente i termini della prima frazione $^1/_3$, ovvero dal dividere ripetutamente i termini dell' ultima frazione $^{128}/_{384}$ per 2. Osservando però questa serie di frazioni

rileviamo che tanto più il nostro spirito dura fatica nel formarsi un' idea precisa del loro valore quanto più sono grandi i lor termini. Noi acquistiamo un' idea assai più chiara della frazione $^1/_3$, che dell' equivalente $^{128}/_{384}$, poichè tanto più facilmente rileviamo i rapporti, quanto men complicate sono le idee su cui si istituiscono. Giova perciò saper esprimere con numeri i più piccoli possibili le frazioni, che sono espresse da numeri forti, e per poter rilevarne con più prontezza il valore, e per poter con più facilità, e brevità operare sulle medesime.

282. E noi riesciamo nell' intento tutte le volte che i termini della frazione abbiano qualche comun divisore. perchè dividendo entrambi per questo, semplicizziamo la frazione senza alterarne il valore (275). Si abbia p. e. la frazione $^{84}/_{96}$. Per semplicizzarla tentiamo se ambo i suoi termini sieno divisibili per i più semplici divisori primi, cioè o per 2, o per 3, o per 5, ec, Applicando ai due termini il criterio (135) vediamo che sono entrambo divisibili per 2; e con questa divisione otteniamo $^{42}/_{48}$ equivalente, ma più semplice della prima. Anche i termini di questa son per 2 divisibili, sicchè si converte senza alterarsi in $^{21}/_{24}$. Esaminando i termini di $^{21}/_{24}$ troviamo che per 2 è divisibile il solo denominatore, sicchè conchiudiamo, che il 2 non è più comun divisore: passiamo perciò ad osservare se esser lo possa il 3; e poichè applicando ai termini dell' ultima ottenuta frazione il criterio (138) rileviamo, che sono entrambi per 3 divisibili, con questa divisione otteniamo per frazione equivalente a $^{21}/_{24}$ l' altra $^7/_8$; e proseguendo anche su questa le nostre esplorazioni, veggiamo che i suoi termini non possono esser più impiccoliti senza che ne sia il suo valore al-

terato, perchè non v' è alcun divisore comune ad entrambi; sicchè conchiudiamo che la quantità indicata dalla frazione $^7/_8$ può esprimersi in numeri quanto piaccia più grandi, ma non già con numeri più piccoli di quelli, che la frazione $^7/_8$ ci presenta. Ogni frazione dunque, che senza cambiar di valore viene trasformata in un'altra, i cui termini sono i più piccoli possibili come la $^{84}/_{96}$, che abbiam convertita in $^7/_8$, dicesi *ridotta ai menomi termini*, *ed irreducibile* si chiama la nuova frazione ottenuta; e chiaro pur dall' esposto risulta, che frazioni *irriducibili* a più semplice espressione son tutte quelle, i di cui termini non hanno alcun comun divisore, son cioè numeri primi tra loro (133).

283. Col tentar la divisione d'ambo i termini prima della data frazione, e poi di quelle, che successivamente in grazia della divisione risultano per i successivi numeri primi 2, 3, 5, 7, ec., proseguendo la divisione per lo stesso numero quanto si può prima di passare agli altri, si giunge finalmente ad una frazione espressa da numeri primi tra loro, ossia irriducibile; ma questo metodo specialmente in casi complicati è assai lungo, perchè esige un gran numero di esplorazioni, e di operazioni.

284. Dal citato esempio rileviamo frattanto, che per essere i quoti moltiplicati pei rispettivi divisori eguali ai dividendi, si ha

$$\frac{84}{96}=\frac{2.42}{2.48}=\frac{2.2.21}{2.2.24}=\frac{2.2.3.7}{2.2.3.8}=\frac{12.7}{12.8};$$

e quest' ultima espressione di $^{84}/_{96}$ ci mostra, che $^{84}/_{96}$ non è che $^7/_8$, i di cui termini sono moltiplicati pel fattore comune 12, che è il massimo, perchè risultante

dal prodotto totale di tutti i fattori semplici comuni ad 84, e 96; cosicchè se questo massimo lor comune divisore 12 si fosse sin dal principio conosciuto, dividendo entrambo i termini per 12, sarebbe tosto risultato il $^7/_8$ senza passare pella lunga trafila delle successive divisioni.

285. E merita osservazione, che non solo nel citato esempio, ma in genere due numeri divisi pel massimo lor comune divisore diventano numeri primi tra loro, non divisibili cioè ulteriormente per altra comune quantità intera maggiore di 1; poichè se lo fossero, avrebbero la suscettibilità di divenire in grazia di un' altra divisione esatti numeri interi o due, o tre, ec. volte più piccoli ancora di quello che sono divenuti; ed allora tali gli avrebbe potuto rendere immediatamente la lor divisione per un divisor doppio, triplo ec. di quello per cui sono stati la prima volta divisi (105), il che ripugna all' ipotesi. che suppone *massimo*, il primo lor divisore. Se dunque due numeri divisi pel massimo lor comun divisore divengono *numeri primi tra loro*, è chiaro, che dividere i termini di una frazione pel massimo lor comune divisore è un vero ridurre la frazione alla sua menoma espressione. Così dividendo pel massimo lor comun divisore 15 i termini di $^{105}/_{180}$ otteniamo la frazione irreducibile $^7/_{12}$.

286. Ma come trovasi questo *massimo comun divisore*? Darci il carico di rinvenire col metodo (132) tutti i possibili divisori dell' uno, e dell' altro numero per poi sceglierlo tra questi, sarebbe impresa assai lunga, e perciò giungiamo all' intento coll' intraprendere un tentativo, che ha il vantaggio di sempre più avvicinarsi allo scopo a ciascun saggio, che ne facciamo. Onde ben intenderlo premettiamo questi tre Lemmi.

287. I. *Qualunque numero, che divida esattamente un altro dee dividere esattamente qualunque di lui multiplo*: poichè il dividendo col moltiplicarsi non perde la proprietà di contenere esattamente il divisore, acquista anzi quella di contenerlo esattamente un numero di volte multiplo di prima (104). Se 2 è contenuto esattamente in 6, non può a meno di non esser contenuto esattamente anche in 3 volte 6, in 4 volte 6, ec.

288. II. *Qualunque numero, che divida esattamente ciascuna delle parti, in cui un tutto è diviso, dee esattamente dividere anche il tutto*, poichè il numero delle volte, che un divisore è contenuto in un dividendo risulta della somma de' numeri esprimenti le volte, che lo stesso divisore è contenuto nelle sue parti, e se non v'è frazione in ninno di questi quoti parziali, nemmeno vi può essere nella lor somma. Se 3 divide esattamente 6, e 9, dee dividere esattamente anche la loro somma 15.

289. III. *Qualunque numero, che divida esattamente un tutto, se esattamente divide anche una delle due parti nelle quali il tutto è diviso, dee esattamente dividere l'altra ancora*; poichè il numero intero di volte, che il divisore è contenuto nel dividendo è dato dalla somma del numero delle volte, che è contenuto nella prima, e nella seconda parte. Or se nella prima il divisore sta esattamente un numero intero di volte, il numero delle volte che è contenuto nell'altra esser debbe un numero intero anch'esso onde unito al primo numero intero dar possa un quoto totale intero. Se il quoto della seconda parte contenesse una frazione, essendo per ipotesi intero il quoto della prima, il quoto totale sarebbe un' intero accompagnato da una frazione, il che è impossibile, perchè

per ipotesi è intero anche il quoto totale. Così se 3 divide esattamente e l'intero 24, ed una sua parte 18, dee dividere esattamente anche l' altra sua parte 6.

290. Cio premesso si cerchi il *massimo comun divisore* de' termini di una frazione, p. e. di $^{91}/_{325}$. E' evidente, che il massimo divisor comune non può esser maggiore del più piccolo de' due numeri. Tentiamo perciò se sia desso. Ora il 91 divide esattamente se stesso dando 1 di quoto, ma non divide esattamente il 325, mentre dà 3 di quoto, e 52 di residúo. Dunque 91 non è il cercato massimo comun divisore. Da questa osservazione però rileviamo intanto, che per essere il quoto moltiplicato pel divisore più il residuo eguale al dividendo (110), si ha

$$\frac{91}{325} = \frac{91}{3.91+52}$$

Or I dovendo il massimo comun divisore dividere esattamente il numeratore 91, conchiudiamo che dee dividere esattamente anche il primo termine 3.91 del denominatore (287), poichè non è che un multiplo di 91. Dovendo il massimo comun divisore dividere esattamente anche il denominatore 325 espresso dal binomio 3.91+52; ed essendo dimostrato, che il massimo comun divisore divide esattamente anche la prima sua parte 3.91, ne segue (289) che il massimo comun divisore debba esattamente dividere anche la seconda parte, ossia il residuo 52.

II. Ogni divisor comune al residuo 52, e al divisor 91 dee dividere esattamente anche il dividendo 325, poichè ogni divisor comune di 91, e 52, lo è anche di 3.91, e 52 (287), e perciò lo è di ambo le parti, che

costituiscono l'intero dividendo 325, e perciò lo debbe essere anche di tutto il 325 (288).

Questi due ragionamenti, che applicati abbiamo al particolare esempio preso in mira, si estendono a qualunque caso, e prendono l' aspetto di due interessanti massime generali se gli ripetiamo in algebrico linguaggio. Infatti

I. Se dividendo una quantità maggiore a per una minore c si ha q per quoto, ed r di resto, avremo $a = cq + r$ (110); e dividendo queste due quantità eguali per d massimo comun divisore di a, e c avremo

$$\frac{a}{d} = \frac{cq+r}{d},$$

Ma per ipotesi $\frac{a}{d}$ ossia $\frac{cq+r}{d}$ è un intero; $\frac{cq}{d}$ è un' intero, perchè essendo intero per ipotesi $\frac{c}{d}$ debbe esserlo anche $\frac{cq}{d}$ (287): dunque anche $\frac{r}{d}$ debbe essere intero (289); ossia « *ogni divisor comun a due quantità debbe dividere il resto della lor divisione* ».

II. Se d è un divisor comune alla quantità minore c, e al residuo r, ossia se $\frac{c}{d}$, $\frac{r}{d}$ sono interi, anche $\frac{cq}{d}$ è intero (287), ed essendo interi tanto $\frac{cq}{d}$ che $\frac{r}{d}$, il debbe essere ancora $\frac{cq+r}{d}$, ossia $\frac{a}{d}$ (288); cioè »

» *Ogni divisor comune al resto, ed al divisore divide esattamente anche il dividendo* ».

Fissate queste massime nella loro generalità, torniamo al nostro esempio. Il massimo comun divisore di 325, e 91 dee dividere esattamente anche il resto della loro divisione, che è 52. Non può dunque eccedere il 52; e sol con ciò ecco ristretto il campo delle nostre ricerche, poichè mentre prima sapevasi soltanto che non potea eccedere il 91, ora sappiamo che non può esser più ricercato che tra i soli numeri interi inclusi tra 1, e 52; e non già fra tutti, ma fra i soli divisori esatti del 52; e non gia fra tutti i divisori esatti del 52, ma sol fra quelli, che sono comuni anche al 91; e finalmente, poichè qualunque divisor comune al divisore 91, e al resto 52 divide esattamente anche il dividendo 325, il massimo comun divisore di 325, e 91 non potrà nemmeno essere qualunque dei divisori comuni di 52, e 91, ma dovrà essere il massimo.

Ecco dunque ridotta la ricerca del massimo comun divisore di 325, e 91 alla determinazione del massimo comun divisore di 91, e 52. Convien dunque a questa rivolgere ora i nostri tentativi. E poichè non può il 52 esser diviso per un numero maggiore di se, l'esplorazione va cominciata dall'esame, se lo stesso 52 fosse il massimo comun divisore di 91, e 52. Esso sta una volta esattamente in se, ma non divide esattamente il 91, perchè dà 1 di quoto, e 39 di resto. Dunque il massimo comun divisore di 91, e 52 non è 52; e ragionamenti simili ai giá fatti ci portano a conoscere che il massimo comun divisore di 91 e 52 debbe esserlo pure di 52, e 39; ed ecco la ricerca del massimo comun divisore di 325, e 91 ridotta ad un tentativo tanto più-

facile, perchè cade sovra numeri meno forti quali sono il 52; e 39. Con simili raziocinii rileviamo, che il massimo comun divisore di 52, e 39 debbe pur esserlo di 39, e 13 residuo che nasce dal dividere 52 per 39; sicchè convien ora secondo il solito tentare se il 13 divida esattamente 39, il che accade, avendosi 3 per quoto, e zero di resto. Dunque 13 è il *massimo comune divisore cercato*. E' divisore *comune* ai primi numeri 325, e 91, perchè come divisore di se, e di 39 il debbe pur essere di 52, che non è che 39+13 (288): come divisor comune di 39, e 52, il debbe essere ancora di 52, e 91, perchè 91 non è che 52+39; ed essendolo di 52, e 91, il debbe essere anco di 91, e 325, perchè 325 non è che un multiplo di 91 più 52: è poi il *massimo*, perchè il massimo divisore di 325, e 91 dee dividere esattamente il 52, quindi il 39, e poi il 13; sicchè di 13 non può esser maggiore.

Un' analitica indicazione di tutte le operazioni, che abbiamo fatte per giungere a trovare il comun divisore ce l' offre la serie delle seguenti espressioni tutte eguali, perchè l' una non offre, che la sostituzione, ovunque ha luogo, del prodotto del quoto pel divisore più il residuo, quantità eguale al dividendo, in vece del dividendo, che trovasi nell' antecedente.

$$\frac{325}{91} = \frac{3.91+52}{91} = \frac{3\,(52+39)+52}{52+39} = \frac{3\,(39+13+39)+39+13}{39+13+39}.$$

291. E il filo riandando di tutte le operazioni nel citato esempio eseguite per ottenere l' intento, in seguito de' generici ragionamenti indipendenti affatto dal

293. Le divisioni, che si sono eseguite per trovar il massimo comun divisore di 325, e 91 si sogliono in prattica comodamente disporre in fila le une dopo le altre, dando a tutto il calcolo la forma, che il presente specchio ci offre.

325	91	52	39	13	*Dividendi, e divisori*
	3	1	1	3	*Quoti*
52	39	13	00		*Residui*

294. Trovato il massimo comun divisore di due numeri qalunque per mezzo dell'ora esposto processo, siamo in grado di ridurre alla menoma espressione qualsiasi frazione ci venga proposta, dividendo per esso ambo i suoi termini.

Così trovasi $^{144}/_{180} = {}^{4}/_{5}$; $^{3760}/_{9024} = {}^{5}/_{12}$; $^{77}/_{143} = {}^{7}/_{13}$; $^{1134}/_{1512} = {}^{3}/_{4}$; $^{756}/_{1134} = {}^{2}/_{3}$; $^{90}/_{360} = {}^{1}/_{4}$; $^{47}/_{937} = {}^{47}/_{937}$, essendo 36, 752, 11, 378, 378, 90, 1 i rispettivi divisori.

295. Come tra le frazioni numeriche così pur tra le algebriche ve ne sono delle suscettibili di esser ridotte alla menoma espressione, e quando ambedue i termini son monomii, o l'un monomio, e polinomio l'altro, basta la semplice ispezione di essi per rilevare qual sia il massimo lor comune divisore, quello cioè fra i divisori comuni, che risulta di più fattori, e pel quale entrambi i termini della frazione si deggion dividere onde semplificarli senza alterar il valore della frazione, che essi esprimono.

Così $\dfrac{32a^4c^3d}{56a^4c^2dm} = \dfrac{4.8a^4c^3d}{7.8a^4c^2dm}$ diventa $\dfrac{4c}{7m}$ dividendo numeratore, e denominatore pel massimo comun divisore, che facilmente si scorge essere $8a^4c^2d$, ossia

elidendo in ambedue i termini i fattori sì numerici, che algebrici comuni ad entrambi, il che semplicizza la frazione senza alterarne il valore.

296. Da questa regola pratica convien però escludere il caso, in cui tutti i fattori del numeratore sien contenuti nel denominatore, poichè in tal circostanza il numeratore sparirebbe affatto, quando che invece esser debbe l'unità, perchè il massimo comun divisore è il numeratore stesso, che dividendo se medesimo dà uno per quoto (103), mentre dividendo il denominatore, in lui lascia illesi quc' fattori, che non gli sono comuni.

$$\text{Così}\ \frac{a}{ac} = \frac{1}{c}\ ;\ \frac{4m^3h^2p}{8m^4h^2p^2} = \frac{1}{2mp}$$

297. Egualmente se ci si offrono le frazioni $\frac{ac}{am+aq}$, $\frac{2cm+c^2m-cm}{cm^2}$, tosto scorgesi, che il massimo divisor comune di entrambi i termini della prima è a, della seconda è cm; e quindi dividendo per a sì il numeratore monomio, che il denominator polinomio della prima, e per cm il numeratore polinomio e il denominatore monomio della seconda, abbiamo

$$\frac{ac}{am+aq} = \frac{c}{m+q};\text{e}\ \frac{2cm^2+c^2m-cm}{cm^2} = \frac{2m+c-1}{m}$$

Ed anche nelle frazioni risultanti di qualche termine polinomio nascer possono delle divisioni d'una quantità per se stessa.

$$\text{Così}\ \frac{3ac^2}{6a^2c^2+3ac_2} = \frac{1}{2a+1}$$

298. E' pur facile la riduzione delle frazioni quan-

do entrambi i termini son polinomii, allorchè ciascun di essi risulta dalla moltiplicazione di un polinomio per un monomio. Così agevolmente rilevasi che

$$\frac{2a^2c-3a^2m}{5a^2m+3a^2}=\frac{(2c-3m)\,a^2}{(5m+3)\,a^2}=\frac{2c-3m}{5m+3},$$

$$\frac{2c^2+3c}{2ac+3a}=\frac{(2c+3)\,c}{(2c+3)\,a}=\frac{c}{a}.$$

Ma quando i termini della frazione risultano dalla moltiplicazione di polinomii per polinomii, non può a colpo d'occhio rilevarsi il massimo comun divisore, e conviene allora trovarlo mettendo in prattica un processo simile a quello, che si è praticato pei numeri (291).

299. Finalmente è a notarsi, che il massimo comun divisore algebrico riduce le frazioni alla menoma espressione *algebrica*, e non *assoluta*, come fa il massimo divisore aritmetico, sicchè può darsi benissimo, che quando si applicano i valori numerici alle lettere, la frazione che in algebra era ridotta alla menoma espressione, divenuta aritmetica, tal più non sia, e che per conseguenza il massimo comun divisore algebrico ridotto in numeri sia minore del massimo divisore aritmetico della stessa frazione; e ciò accade tutte le volte, che ai termini della frazione algebricamente irreducibile si dieno valori che non sieno *numeri primi tra se*.

Così la frazione $\frac{a^2cm}{a^3m}$ riducesi a $\frac{c}{a}$ per mezzo del comun divisore a^2m. Or nell'ipotesi di $a=3$, $c=2$, $m=6$, la data frazione diventa $^{108}/_{162}$, il comun di-

visore de' suoi termini a^2m diventa 54, la frazione ridotta $\frac{c}{a}$ è $^2/_3$, frazione che è assolutamente irreducibile, perchè i suoi termini sono numeri primi tra se: e gli stessi risultati in tal caso si ottengono, se cerchiamo il massimo divisore comune aritmetico della frazione $^{108}/_{162}$; ma se nella stessa frazione algebrica in vece di 3 fosse stato 6 il valore di a, in tal caso la frazione convertita in numeri sarebbe $^{432}/_{1296}$, il massimo comun divisore a^2m sarebbe 216, e la frazione algebricamente ridotta ai menomi termini, convertita in numeri più nol sarebbe perchè uguale a $^2/_6$, frazione i di cui termini sono ancor divisibili. In questo caso il massimo comun divisore aritmetico differisce dall' algebrico mentre non è 216, ma 432, che riduce la data frazione ad $^1/_3$.

IV. Riduzione delle frazioni al numeratore 1, ossia trasformazione de' numeri in unità frazionarie.

300. Per meglio intendere il valore delle frazioni, che sono espresse da termini assai composti si è ora osservato, che giova ridurle alla più semplice indicazione. Ve ne sono però di quelle, che ancor dopo la riduzione ci presentano numeri assai alti, e tale è p. e. la frazione $^{699}/_{2099}$. In tal caso non potendosi acquistare un' idea più chiara di queste frazioni per mezzo d' un *esatta* ulterior riduzione, di cui non sono suscettibili, convien contentarsi d' una riduzione *approssimativa*; e poichè le unità frazionarie siccome esprimenti un solo rapporto si concepiscono dalla mente assai meglio, che i numeri frazionarii, i quali indicano due rapporti di-

stinti (I, 265), così giova approssimativamente trasformare il numero frazionario in una sola unità frazionaria. Or per ridurre il numeratore d' una frazione ad 1, convien dividere il numeratore per se stesso; ed affinchè poi il valor della frazione non si alteri convien dividere pello stesso numeratore anche il denominatore. Quindi è che dividendo per 699 ambo i termini della frazione $699/2099$, otteniamo 1 pel quoto del numeratore, e $3+2/699$ pel quoto del denominatore; cosicchè se in questo ultimo quoto compreso fra 3, e 4 trascuriamo la parte frazionaria, dir possiamo che $699/2099$ è prossimamente eguale ad $1/3$, quantità di cui ci formiamo idea assai più chiara che di $699/2099$. Il vero valore della frazione è però un poco minore di $1/3$ perchè è 1 diviso per $3+2/699$, il che scrivesi in questo modo $\frac{1}{3+2/699}$; e frazioni così espresse sono il germe delle così dette *frazioni continue, il cui denominatore è composto di un' intero più una frazione, la quale ha ancora per denominatore un' intero più una frazione, e così di seguito*, frazioni, delle cui interessanti proprietà lo sviluppo appartiene all' algebra superiore.

V. Riduzione delle frazioni a un comun denominatore.

301. Se in molte circostanze giova aver le frazioni espresse dai più piccoli termini possibili, in alcune altre, e precisamente allorchè si tratti o di confrontarle, o di aggrupparle insieme, o di toglier l' una dall' altra, fa d' uopo averle, non già ridotte alla menoma espressione, ma tutte della medesima specie, tut-

te cioè formate da parti della stessa grandezza, fa d'uopo che abbian tutte il medesimo denominatore, o come dicesi, sieno *frazioni del medesimo nome*, sicchè se hanno un denominatore diverso, giova trasformarle in altre frazioni, che abbiano un comune denominatore, conservando lo stesso primitivo valore. Così se p. e. giudicar vogliamo qual di due date frazioni sia la maggiore, se le frazioni hanno entrambe o lo stesso numeratore, o lo stesso denominatore, non v' è difficoltà alcuna, poichè dalla stessa natura delle frazioni risulta, che $^5/_9 > ^5/_{10}$; e $^5/_9 > ^4/_9$; ma se hanno numeratore, e denominatore diverso, come nel caso che si cercasse qual sia maggiore, se $^2/_3$ o $^5/_8$, noi non sappiamo a colpo d' occhio decidere, e solo allor conchiudiamo, che $^2/_3$ supera $^5/_8$ di $^1/_{24}$, quando abbiamo appreso, che $^2/_3 = ^{16}/_{24}$, e $^5/_8 = ^{15}/_{24}$; cosicchè chiaro risulta, che per lo scopo propostoci giova più aver le frazioni espresse in ventiquattresimi, che averle ridotte alla menoma espressione.

392. Ma e con qual mezzo due frazioni possono senza cambiar valore trasformarsi in altre, che abbiano un denominatore comune? Ecco come la cognizione delle proprietà delle frazioni ce ne suggerisce l'artificio: sieno p. e. $^2/_3$ e $^3/_5$. Se il denominator di ciascuna si moltiplica pel denominator dell'altra, esse acquistano uno stesso denominatore, poichè lo stesso prodotto 15 si ottiene o si moltiplichi 3 per 5, o 5 per 3 (49). Perchè poi conservi ciascuna il suo valore, per quella stessa quantità per cui si è moltiplicato il denominatore va moltiplicato anche il numeratore; dunque due frazioni riduconsi allo stesso denominatore moltiplicando i ter-

mini di ciascuna pel denominatore dell' altra. Perciò $^2/_3$, e $^3/_5$ si convertono in $^{10}/_{15}$, e $^9/_{15}$.

Perciò $\frac{a}{c}$, $\frac{f}{d}$ si convertono in $\frac{ad}{cd}$, $\frac{cf}{cd}$

303. Come poi riduconsi le frazioni ad un comun denominatore quando son più di due? Moltiplicando il denominator di ciascuna pel prodotto di tutti i denominatori delle altre acquista ognuna uno stesso denominatore, poichè il prodotto, che per ciascuna risulta è il prodotto di tutti i dati denominatori, il quale è sempre lo stesso, qualunqne sia l' ordine con cui si sono moltiplicati i suoi fattori (56). Perchè poi ciascuna frazione ridotta con questo mezzo ad avere un denominatore comune alle altre conservi lo stesso valore, che avea, fa d' uopo che per la medesima quantità per cui si è moltiplicato il denominatore, si moltiplichi anche il numeratore; d' onde la regola generale, *che più frazioni riduconsi allo stesso denominatore moltiplicando i termini di ciascuna pel prodotto dei denominatori di tutte le altre*. Così operando

sulle frazioni $^1/_2$, $^1/_5$, $^2/_3$, $^3/_4$

si avranno le corrispondenti $\frac{1.5.3.4}{2.5.3.4}$, $\frac{1.2.3.4}{5.2.3.4}$, $\frac{2.2.5.4}{3.2.5.4}$, $\frac{3.2.5.3}{4.2.5.3}$

ovvero $^{60}/_{120}$, $^{24}/_{120}$, $^{80}/_{120}$, $^{90}/_{120}$

Così $\frac{a}{c}$, $\frac{d}{f}$, $\frac{g}{h}$ diverranno $\frac{afh}{cfh}$, $\frac{dch}{fch}$, $\frac{gcf}{hcf}$

Così $\frac{a^2-c^2}{a+c}$, $\frac{a-c}{c}$, $\frac{a+c}{a}$

diverranno $\frac{a^3c-ac^3}{a^2c+ac^2}$, $\frac{a^3-ac^2}{a^2c+ac^2}$, $\frac{a^2c+2ac^2+c^3}{a^2c+ac^2}$

304. Coll' indicato metodo generale otteniamo in tutti i casi l' intento. Questo può anche ottenersi con un metodo, che dà risultati più semplici, ma solo ne' casi in cui i denominatori delle frazioni non sien tutti *numeri primi tra se*, come p. e. nelle frazioni

$\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}$, ossia $\frac{1}{2^2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{2.3}$

Ed infatti partendo dal riflesso, che le frazioni non possono senza alterarsi acquistare un denominatore più grande, che per mezzo della moltiplicazione d' ambo i lor termini per una quantità stessa, è chiaro che il nuovo maggior denominatore, comune anche ad altre, che una frazione ha acquistato, debbe essere il risultato d' una moltiplicazione, che ha subìto il suo denominator primitivo insieme col numeratore, dal che ne scende, che qualunque numero per poter essere scelto *a denominator comune di più frazioni* dee aver la proprietà di poter esser prodotto da ciascuno de' denominatori delle frazioni, convien cioè, che sia *multiplo o divisibile* per ciascun denominatore. Or poichè un numero possegga tale caratteristica, quando i denominatori delle frazioni a ridursi hanno de' fattori primi comuni come osserviamo nell' esempio, non occorre che esso risulti del prodotto di tutti i denominatori, a tenor del metodo generale (303), nel qual caso il denominator comune delle proposte frazioni sarebbe 360: basta che esso costi di tutti i soli fattori diversi, che si trovano in ciascun denominatore elevati alla più alta potenza, che vi abbiano, e che nel nostro caso sono

$2^2 \times 3 \times 5 = 60$; poichè non esistendo fattore in qualsiasi denominatore, che non sia nel citato prodotto, questo è per qualsiasi denominatore necessariamente divisibile, e perciò può sciegliersi per *denominatore comune*. E desso è poi il *denominatore comune il più piccolo*, poichè qualunque di lui più piccol prodotto, che si formasse trascurando nella sua formazione anche un solo dei *diversi fattori al massimo grado*, che si trovano ne' denominatori, per questo fattore, che non esisterebbe tra i suoi componenti non potrebbe quest'ottenuto prodotto dividersi, e quindi nemmeno per quel denominatore in cui il fattor trascurato esistesse; e perciò esser non potrebbe un denominatore comune. Quindi dopo che col citato mezzo abbiam trovato esser 60 il più piccolo comun denominatore, che dar si possa alle 4 date frazioni, per ridurvele conviene poi che moltiplichiamo il numerator di ciascuna per quel numero stesso per cui conviene, che sia moltiplicato il rispettivo denominatore, onde produca 60, pel quoto cioè di 60 diviso pel rispettivo denominatore. Così operando, $^1/_4$, $^2/_3$, $^3/_5$, $^5/_6$ divengono $^{15}/_{60}$, $^{40}/_{60}$, $^{36}/_{60}$, $^{50}/_{60}$.

305. Il più piccolo comun denominatore di più frazioni dovendo esser multiplo di ciascun denominatore, può anche trovarsi con un tentativo sui successivi multipli del maggior denominatore, che abbiano le frazioni, sciegliendo tra questi multipli, tra i quali debbe necessariamente esservi, quel più piccolo, che abbia la proprietà d' esser multiplo di tutti gli altri. Così nel citato esempio noi cominciamo dell' esplorare se il denominator massimo, che è il 6, sia multiplo degli altri tre, possa cioè esser prodotto dagli altri tre deno-

minatori, che sono 4, 3, 5. Veggendo che può esser prodotto dal 3, ma non dal 4 e dal 5, conchiudiamo che il 6 non è multiplo di tutti, e perciò non può essere il comun denominatore cercato. Il doppio di 6, cioè 12 può esser prodotto dal 3, e dal 4; ma non lo è dal 5. dunque nemmeno esso fa al caso: non 3.6 = 18 perchè è prodotto dal 3, ma non dal 4, e dal 5: non 4.6 = 24, perchè prodotto dal 3 e 4, ma non dal 5: non gli altri multipli di 6 finchè non giungiamo al 10.6 = 60, poichè veggiamo che questo è il primo, che può esser prodotto da tutti e tre gli altri denominatori 4, 3, 5, e perciò desso è il più piccolo comun denominatore, cui posson ridursi le date frazioni, ed è infatti identico a quello, che coll' altro metodo abbiam ritrovato.

Se le frazioni a ridursi allo stesso denominatore fossero $^2/_3$, $^3/_4$, $^5/_8$, facendo simili tentativi sul maggior denominatore 8, e suoi multipli, troviam tosto per comun denominatore il triplo di 8, cioè 24; e le frazioni si convertono in $^{16}/_{24}$, $^{18}/_{24}$, $^{15}/_{24}$; e così $^1/_2$, $^3/_4$, $^7/_{20}$ trasformansi in $^{10}/_{20}$, $^{15}/_{20}$, $^7/_{20}$, osservando che lo stesso maggior denominatore 20 è prodotto dagli altri denominatori 2, e 4.

306. Dall' esposte cose conchiudasi, che *per ridurre più frazioni, i cui denominatori abbiano de' fattori primi comuni, al più piccolo comun denominatore, questo primieramente si ottiene* o *facendo il prodotto di tutti i diversi fattori, che al più alto grado elevati trovansi ne' denominatori, oppure prendendo o il maggior denominatore, se esso stesso sia divisibile, o altrimenti quel primo suo multiplo, che sia esattamente divisibile per tutti gli altri denominatori. Ottenuto che siasi o coll' uno, o coll' al-*

tro metodo il comun denominatore, si moltiplica il numeratore di ciascuna frazione pel quoto del comun denominatore diviso pel proprio.

307. L'applicazione dell' or dettagliato metodo alle frazioni algebriche aventi fattori comuni nei loro denominatori riesce anche più facile, che alle aritmetiche. Infatti se si hanno le frazioni.

$$\frac{2a}{c^2g}, \frac{d}{2cg^2}, \frac{4f}{g^3}$$

il più piccolo comun divisore, cui possono queste frazioni ridursi dovendo risultare di tutti i soli fattori differenti presi alla più alta potenza, in cui trovansi nei denominatori, tosto risulta essere nel nostro caso $2c^2g^3$; e dovendosi moltiplicare il numeratore di ciascuna frazione pel quoto del denominator comune diviso pel proprio (306), questo quoto salta tosto agli occhi in algebra, essendo formato da que' soli fattori del denominator comune, che mancano al proprio (238) e si vede essere $2g^2$ pella prima, cg pella seconda, $2c^2$ pella terza frazione, e così operando in vece di

$$\frac{2a}{c^2g}, \frac{d}{2cg^2}, \frac{4f}{g^3} \text{ si ha } \frac{4ag^2}{2c^2g^3}, \frac{cdg}{2c^2g^3}, \frac{8c^2f}{2c^2g^3},$$

e queste ultime frazioni hanno un denominator comun più semplice di $2c^3g^6$, a cui si sarieno ridotte col metodo generale (303).

Formasi dunque il più semplice comun denominatore di più frazioni algebriche col prodotto di tutti i fattori differenti, che si trovino ne' loro denominatori alla più alta potenza elevati, e quindi vi si riduce ciascuna frazione col moltiplicare il suo numeratore per que' fattori del comun denominatore, che mancano al proprio.

VI. Riduzione delle frazioni ad un determinato denominatore.

308. Nel dare a più frazioni un comun denominatore nostro scopo è ridurle tutte a parti della stessa grandezza, qualunque poi questa sia. Talvolta però interssa ridurre le frazioni a parti di un determinato valore ossia di un determinato denominatore, come se p. e. conoscer volessimo quanti pollici, ossia quanti dodicesimi di un piede sia $^3/_4$ di piede. Egli è questo un voler convertire i quarti in dodicesimi, e per tale oggetto, affinchè possa il denominatore della data frazione divenir 12, cominciamo dall' introdurre in esso il 12 come fattore; e perchè il valor della frazione non si alteri, moltiplichiamo per 12 anche il numeratore, ed avremo $\frac{3.12}{4.12} = \frac{36}{4.12}$. Ora affinchè nel denominatore non vi resti che il solo 12, e la frazione non si alteri, dividiamo per 4 primitivo denominatore della frazione il numeratore, e il denominatore, ed avremo $^9/_{12}$ per frazione equivalente a $^3/_4$.

309. *Per ridurre dunque una frazione ad un denominatore determinato, conviene che il numeratore della nuova frazione equivalente sia formato dal numeratore della frazione data moltiplicato pel denominatore, cui vuò la frazione ridursi, e diviso pel denominatore, che avea.*

310. Quindi è che può spesso accadere, come p. e. nel ridurre a sesti la frazion $^3/_8$, che il prodotto del numeratore 3 pel denominatore 6, cui vuò la frazione ridursi, ossia 18 non sia divisibile esattamente pel denominatore 7 della data frazione, e in tal caso il numeratore della nuova frazione è composto d' un intero

più una frazione, è cioè $^{18}/_{8} = 2 + {^2}/_{8} = 2 + {^1}/_{4}$, e perciò la nuova frazione si esprime per $\frac{2+{^1}/_{4}}{6}$, il che significa, che $^3/_8$ equivale a $^2/_6$ più la sesta parte di $^1/_4$, ossia più $^1/_{4\cdot6}$ (273), ossia più $^1/_{24}$.

EPILOGO

Operazioni, che alterano il solo aspetto delle frazioni.

Queste han base sul principio che una frazione non cangia valore se ambo i suoi termini si moltiplichino, o dividano per una stessa quantità (276), e sono.

I *Riduzione delle frazioni a interi*, che si eseguisce sulle frazioni apparenti, e miste coll' effettiva divisione del numeratore pel denominatore (277).

II. *Riduzione degli interi a frazioni*, che si esegue collo scrivere sotto l' intero l' unità per denominatore quand' esso non è determinato (278), o collo scrivere per numeratore il prodotto dell' intero pel determinato denominatore (279).

III *Riduzione delle frazioni alla menoma espressione*, che si effettua col dividere ambo i termini della frazione o pei successivi numeri primi (281, e seg,); o pel massimo comun divisore, che trovasi dividendo il numero maggiore pel minore, il minor pel *primo* residuo, il *primo* residuo pel *secondo*. il *secondo* pel *terzo*; finchè si giunge ad un resto, che divide l' antecedente esattamente, e che è il divisor cercato (284, e seg.).

IV. *Riduzione delle frazioni al numeratore* 1, che si eseguisce col dividere ambo i termini della frazione pel numeratore (300).

V. *Riduzione delle frazioni al comun denominatore*, che si fa colla regola generale moltiplicando i termini di ciascuna frazione pel prodotto dei denominatori delle altre (302, e seg.), ovvero quando ne' denominatori vi sono de' fattori comuni, sciegliendo per comun denominatore o il prodotto de' soli fattori differenti elevati al più alto grado, che trovansi ne' denominatori (304), o quel primo multiplo del maggior de' denominatori, che esattamente è divisibile per tutti gli altri, se trattisi di frazioni nu-

meriche (305); mentre solo il primo metodo è praticabile pelle frazioni algebriche (306, e seg.).

VI. *Riduzione delle frazioni ad un determinato denominatore*, che si ottiene col moltiplicare il numeratore pel denominatore, cui vuolsi ridurre, e dividerlo pel denominatore, che ha (308, e seg.).

ARTICOLO III.

Operazioni, che alterano il valor delle frazioni.

311. Le operazioni, cui abbiamo fin qui assoggettate le frazioni sono tutte derivate dalla considerazione della particolar loro indole frazionaria, ne hanno alterato il semplice aspetto senza attaccarne il valore, e sono perciò esclusivamente lor proprie, mentre gli interi offrirci non possono alterazione alcuna nell' aspetto, che anche il lor valor non modifichi (281). Considerando ora le frazioni come grandezze in genere, le troveremo suscettibili di ricevere alterazione nel loro valore per mezzo di tutte quelle operazioni, che abbiam già sugli interi eseguite.

Addizione, e Sottrazione

312. Poichè scopo di queste operazioni è il determinare o l' assieme delle parti che si aggruppano, o il residuo che nasce dal toglierne alcune da altre, è ben chiaro che una tal determinazione non potrà aversi mai se non si tratta di unità, sien assolute sien relative, tutte della stessa grandezza; e perciò l' addizione, e sottrazione non può eseguirsi, che sovra frazioni del medesimo nome. Così come è ben chiaro che $^2/_7 + ^4/_7$

$= {}^{6}/_{7}$, è pur chiaro che non possono unirsi insieme ${}^{2}/_{5}$, e ${}^{4}/_{7}$, poichè avrebbesi dalla loro unione 6 parti, che non sarieno nè 6 *quinti*, nè 6 *settimi*. Dicasi il simile della sottrazione, e rammentando poi, che il denominatore non è che il *nome* delle parti, che si vogliono separare, od unire (265), e riflettendo che l'addizione, e sottrazione debbe eseguirsi sul *quantitativo*, o *numero*, e non sul *nome* delle parti, si conchiuda che *per aggiungere o sottrarre frazioni dello stesso nome, convien prendere la somma, o differenza dè loro numeratori dando al risultato il comun denominatore*.

313. Dopo tali notizie niuna difficoltà ci offrono i tre casi, che si distinguono nell' addizione, e sottrazione delle frazioni. Infatti i termini dell' addizione, o sottrazione

I. *O sono tutte frazioni dello stesso nome, e si opera come si è ora indicato*.

II. *O son tutte frazioni, ma di nome diverso, e convien ridurle al nome stesso, ed operar come sopra.*

III. *O son un misto di interi e frazioni, e in tal caso se il risultato si vuò espresso in un sol termine, si riducono gli interi a frazioni* (279), *e così trasformasi questo* 3.° *nel* 2.° *caso*: se poi ci piaccia averlo nella più chiara, e semplice espressione, allora se trattasi di somma, *convien prima eseguirla sulle vere frazioni, estrarre indi gli interi dal risultato frazionario se spurio per unirli alla somma, che poi convien fare degli altri, e quindi ridurre la frazione se è suscettibile alla menoma espressione, e l' assieme de' due aggregati intero, e frazionario costituisce la total somma richiesta*. Se trattasi di sottrazione, convien prima *sottrarre frazion da frazione*,

poi intero da intero, e la somma de' residui costituisce il residuo totale.

Che se il rotto minuendo sia zero, o minore almeno del rotto sottraendo, fa d' uopo togliere un' unità dagli interi del minuendo, e ridurla in frazione dello stesso nome del rotto sottraendo, perchè possa la sottrazione effettuarsi. Ed ecco di queste regole l' applicazione.

Addizione di frazioni dello stesso nome.

314. *Applicazioni aritmetiche. Operaii 14 al fin d' ogni mese si sono ripartiti il dono d' un rubbio di grano. Tre di questi al fin del 1.° mese, sette al fin del 2.°, undici al fin del 3.° hanno donata la lor porzione ad un povero. Quanto grano il povero ha percepito?* — Risultato. Rubbia $1\ {}^1/_2$.

La porzione d' ogni operajo è ${}^1/_{14}$ di Rubbio, e perciò il grano donato al povero è ${}^3/_{14} + {}^7/_{14} + {}^{11}/_{14} = {}^{21}/_{14}$ (312) $= 1 + {}^7/_{14}$ (271) $= 1 + {}^1/_2$ (294).

Applicazioni Algebriche. $\frac{a}{c} + \frac{2m}{c} + \frac{a^2}{c} = \frac{a+2m+a^2}{c}$

Addizione di frazioni di diverso nome.

315. *Applicazioni aritmetiche. Tizio ha perduto al giuoco ${}^3/_{10}$ poi ${}^1/_2$, poi ${}^3/_4$, poi ${}^4/_5$ di lira. A quanto monta la perdita totale?* — Risultato. Lire $2 + {}^7/_{20}$.

La perdita totale infatti è ${}^3/_{10} + {}^1/_2 + {}^3/_4 + {}^4/_5 = {}^6/_{20} + {}^{10}/_{20} + {}^{15}/_{20} + {}^{16}/_{20}$ (304) $= {}^{47}/_{20} = 2 + {}^7/_{20}$.

Quant' oro ha impiegato un orefice per formar cinque anelli, i cui pesi sono i seguenti $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{3}{14}$, $\frac{5}{18}$ di dramma? — Risultato: Dramme $1\ \frac{1}{2}$.

Applicazioni algebriche $\frac{a}{c} + \frac{2m}{p} + \frac{c^2h}{p^2} = \frac{ap^2+2mcp+c^3h}{cp^2}$ (307, 312).

Addizione d' interi, e frazioni.

316. *Applicazioni aritmetiche. Un librajo ha ritratto lire* $12\ \frac{9}{10}$, *più* $16\ \frac{19}{20}$, *più* $24\ \frac{3}{4}$ *dalla vendita di 3 opere. Che somma ha incassato?* — Risultato: lire $54\ \frac{3}{5}$.

Questa somma infatti è $12 + \frac{9}{10} + 16 + \frac{19}{20} + 24 + \frac{3}{4} = 52 + \frac{9}{10} + \frac{19}{20} + \frac{3}{4} = 52 + \frac{52}{20} = 54 + \frac{3}{5}$.

Quanto è alto un palazzo, di cui la distanza dal suolo al 1.° piano è piedi par. $15\ \frac{1}{3}$, *dal 1.° piano al 2.° è* $20\ \frac{1}{6}$, *dal 2.° al 3.° è* $18\ \frac{1}{5}$, *dal 3.° al 4.° è* $12\ \frac{3}{10}$? — Risultato: piedi par. 66.

317. *Applicazioni algebriche*. Per giungere ad espressioni più semplici giova talvolta in algebra ridurre a frazioni anche gli interi. Così se al binomio $m-c$ debba aggiungersi la frazione $\frac{c^2}{m+c}$ avremo $m - c + \frac{c^2}{m+c} = \frac{(m-c)\ (m+c)}{m+c} + \frac{c^2}{m+c} = \frac{m^2-c^2+c^2}{m+c} = \frac{m^2}{m+c}$.

Sottrazione di frazioni dello stesso nome

318. *Applicazioni aritmetiche*. *Di* $^9/_{10}$ *di scudo, che avea prestati sono stati resi a Marco* $^3/_{10}$. *Di quanto riman creditore?* — Risultato. $^3/_5$ di scudo. Infatti $^9/_{10} - ^3/_{10} = ^6/_{10} = ^3/_5$.

Applicazioni Algebriche. Sia a sottrarsi la frazione $\frac{c}{f}$ dalla $\frac{a}{f}$. Si avrà $\frac{a}{f} - \frac{c}{f} = \frac{a-c}{f}$

Sottrazione delle frazioni di nome diverso.

319. *Applicazioni aritmetiche*. *Che differenza passa fra il peso di un dado di oro che è* $^{76}/_{81}$ *di libra, e un' egual dado d' altro metallo pesante* $^{25}/_{32}$ *di libra?* — Risultato. Il dado d' oro supera l'altro di $^{407}/_{2592}$ di libra, ossia di circa $^1/_6$ di libra. Infatti l' eccesso del 1.° sul 2.° è

$$\frac{76}{81} - \frac{25}{32} = \frac{407}{2592} = \frac{1}{6 + ^{150}/_{407}} \ (300)$$

320. *Applicazioni algebriche*. Sia a sottrarsi da $\frac{2a^2}{3c}$ la frazione $\frac{a^2+c-a}{2c}$, e si avrà $\frac{2a^2}{3c} - \frac{a^2+c-a}{2c}$

$$= \frac{4a^2-3a^2-3c+3a}{6c} = \frac{a^2-3c+3a}{6c}.$$

Sottrazione o I. di frazioni da interi, o II di interi da frazioni spurie, o III. di interi, e frazioni da interi, e frazioni.

321. *Applicazioni aritmetiche*. *I. Da 4 canne di stoffa si sono tolti* $^3/_8$. Quanta stoffa rimane? — Risultato: 3 $^5/_8$.

Infatti il residuo è $4 - {}^3/_8 = 3 + {}^8/_8 - {}^3/_8 = 3 + {}^5/_8$.

2.° *Di quanto la pioggia caduta in Febbrajo per 12 giorni a ragione di* $^4/_5$ *di linea al giorno ecceде la pioggia caduta in Gennajo nella quantità di 4 linee?* Risultato: l'eccesso è di linee $5 + {}^3/_5$

Infatti la pioggia caduta in Febbrajo è $^4/_5$ ripetuto 12 volte ossia $^{48}/_5 = 9 + {}^3/_5$; la pioggia caduta in Gennajo è 4: dunque l'eccesso della prima sulla seconda è $9 + {}^3/_5 - 4 = 5 + {}^3/_5$, sicchè a rigore la sottrazione d'un intero da una frazione spuria, riducesi a sottrazione d'intero da intero.

3.° *In grammi* 100 *d'una materia vegetale composta di ossigeno idrogeno, e carbonio si sono trovati* gr. $34\ {}^3/_4$ di ossigeno, e gr. $45\ {}^1/_3$ *di carbonio. Quant' idrogeno contiene?* Risultato: gr. $19\ {}^{11}/_{12}$.

Infatti la quantità dell'idrogeno è $100 - 34 - {}^3/_4 - 45 - {}^1/_3 = 100 - 79 - {}^9/_{12} - {}^4/_{12} = 100 - 80 - {}^1/_{12} = 20 - {}^1/_{12} = 19 + {}^{12}/_{12} - {}^1/_{12} = 19 + {}^{11}/_{12}$.

Quant' olio si è ottenuto da libre $12\ {}^5/_{12}$ *di semi, che son rimasti del peso di libre* $8\ {}^1/_2$ *dopo l'estrazione?* Risultato. Libre $3 + {}^{11}/_{12}$.

Infatti l'olio è $12 + {}^5/_{12} - 8 - {}^1/_2 = 4 + {}^5/_{12} - {}^6/_{12} = 3 + {}^{17}/_{12} - {}^6/_{12} = 3 + {}^{11}/_{12}$.

Si son riceute in prestito Rubbia di grano $2\ {}^1/_{24}$ *indi* $5\ {}^1/_2$. *Se ne sono restituite* $4\ {}^2/_3$, *indi* $1\ {}^7/_8$. *Quanto grano rimane a darsi?* — Risultato: un Rubbio.

322. *Applicazioni algebriche*. 1.° Dall' intero $a - p$ si abbia a sottrarre la frazione $\frac{p^2}{a+p}$. Si avrà

$$a - p - \frac{p^2}{a+p} = \frac{(a-p)\ (a+p)}{a+p} - \frac{p^2}{a+p} =$$

$$= \frac{a^2-p^2-p^2}{a+p} = \frac{a^2-2p^2}{a+p}$$

2.° Dalla frazione $\frac{m^2}{m-c}$ si abbia a sottrarre l' intero m. Il residuo è $\frac{cm}{m-c}$.

3.° Dalla somma dell' intero e frazione $3g^2 + \frac{16n^2}{3g^2+4n}$ si abbia a sottrarre l' intero $4n$. Il residuo è $\frac{9g^4}{3g^2+4n}$

MOLTIPLICAZIONE

323. A rigore in tutte le moltiplicazioni il moltiplicatore è, come vedremo, un numero intero, ma poichè esso in alcuni casi è il numeratore d' una frazione, essendo invalso l' uso di chiamar col nome di moltiplicatore la stessa frazione, cui appartiene quel numerator che moltiplica, così è che distinguiamo 4 casi di moltiplicazione nelle frazioni, cioè 1.° *di frazione per intero*: 2.° *d' intero per frazione*: 3.° *di frazione per frazione*: 4.° *di interi, e frazioni, per interi, e frazioni*.

I. Moltiplicazione di frazione per intero.

324. Spesso accade la circostanza di dover più volte ripetere un numero frazionario. Se p. e. cercasi il

valor di 5 libre di pane, posto che il valor d' una libra sia $^7/_{20}$ di lira, è chiaro che convien prender 5 volte il $^7/_{20}$, ossia moltiplicare il $^7/_{20}$ per 5, e il prodotto è $^{35}/_{20}$; poichè l' indole della moltiplicazione è sempre la stessa, e 5 volte il numero 7 è sempre 35 o le unità, che formano il 7 sieno assolute, o sien relative, e di qualunque specie esse sieno. E in genere moltiplicare per d la frazione $\frac{a}{n}$ significa rendere $\frac{a}{n}$ d volte maggiore, il che già sappiamo (272) potersi ottenere col moltiplicare per d il solo numeratore; e perciò $\frac{a}{n} \times d = \frac{ad}{n}$.

Si moltiplica cioè una frazione per un intero moltiplicando il numerator per l' intero, e dividendo il prodotto pel denominator della stessa frazione.

325. Una frazione però non solo resta moltiplicata per una data quantità moltiplicando per essa il di lei solo numeratore, ma anche dividendo per essa il suo solo denominatore (273); e perciò nei casi, in cui il denominatore è esattamente divisibile per l' intero, resta moltiplicata la frazione per l' intero anche *dividendo per l' intero il suo denominatore*. Così

Col 1.° *metodo* $\frac{3}{16} \times 4 = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$; ed $\frac{a}{cm} \times c = \frac{ac}{cm} = \frac{a}{m}$

Col 2.° *metodo* $\frac{3}{16} \times 4 = \frac{3}{4}$; ed $\frac{a}{cm} \times c = \frac{a}{m}$

Dal che rilevasi, che il primo di questi metodi può porsi in prattica in tutti i casi a differenza del secondo; ma quando questo può usarsi è preferibile al primo, perchè ci reca direttamente a più semplici risultati.

326. Prima di passare agli altri 3 citati casi di moltiplicazione, che suppongono il moltiplicator frazionario è cosa di sommo interesse acquistare idee esatte intorno al valore di questa espressione » *Moltiplicar per una frazione* ».

Non sempre l' enunciato del Problema ci precisa la quantità frazionaria, che debbe un dato numero di volte ripetersi, come nel trascorso esempio era il $^7/_{20}$ di lira. In alcuni casi l' enunciazione del quesito ci addita una quantità intera o frazionaria che sia, prescrivendoci di prima prendere di questa una parte determinata, e poi ripeterla un dato numero di volte. Così p. e. se conoscer vogliamo il valore di 7 oncie, ossia di $^7/_{12}$ di libra d' argento del prezzo di paoli 96 la libra, è chiaro, che l' enunciato del problema ci offre un numero intero qual' è 96 paoli prezzo di una libra, e ci prescrive di prima rilevarne la dodicesima parte prezzo di un' oncia, che troviamo essere $^{96}/_{12} = 8$; e quindi *ripetere 7 volte questo* 8 *paoli* prezzo d' un' oncia, il che dà 56, onde il prezzo avere delle oncie 7. Così se a beneficio de' poveri prender dovessimo $^3/_{10}$ di scudi 360 introito d' una tombola, convien prima d' ogni altro trovare il decimo di 360, che è 36, e quindi *ripetere questo* 36 per 3 *volte*, il che dà scudi 108 per i $^3/_{10}$ di scudi 360. Or perchè in questo *ripeter più volte una stessa quantità* tutta consiste la natura della moltiplicazione, non vi ha dubbio che la soluzione dei 2 citati problemi diretta a trovare i $^7/_{12}$ di 96, e

i $^3/_{10}$ di 360 esiga questa operazione, e quindi non v' ha dubbio, che prender $^7/_{12}$ di 96, $^3/_{10}$ di 360, e in genere prendere una frazione qualunque di qualunque quantità sia un vero moltiplicare.

327. Ma se prender $^7/_{12}$ di 96, e $^3/_{10}$ di 360 è un vero moltiplicare, non è già un moltiplicare 96 per $^7/_{12}$, e 360 per $^3/_{10}$, come comunemente si crede. Da questo errore dobbiamo ben guardarci col tener dietro all' esposta analisi de' due citati quesiti. Da esse risulta che prender $^7/_{12}$ di 96, e $^3/_{10}$ di 360 equivale a quest' altra espressione prender 7 volte il *dodicesimo* di 96, e 3 volte il *decimo* di 360, espressione la quale ci fa ben rilevare la duplice operazione, che le condizioni de' problemi richieggono, mostrandoci che non 96, ma il dodicesimo di 96, non 360, ma il decimo di 360 è il moltiplicando, che noi dobbiamo con una *prima* operazione trovare, per poi con una *seconda* operazione ripeterlo 7 volte nel 1.° e 3 volte nel 2.° caso, cosicchè non $^7/_{12}$ ma 7, non $^3/_{10}$ ma 3 è il vero moltiplicatore. Nei problemi in somma, in cui ci proponiamo di prendere una frazione d' una data quantità, questa non è il moltiplicando come comunemente si opina: il moltiplicando non è fra i *dati* del problema, esso è un, *incognita*, che dobbiam trovare per prima, dividendo la quantitá data pel denominatore della frazione; e poichè il quoto, che ne risulta è la quantità, che ripetiamo tante volte, quante sono le unità del numeratore della frazione, così non la frazione, ma il di lei solo numeratore è il vero moltiplicatore.

Ed infatti è impossibile poter immaginare un moltiplicator frazionario, essendo esso un numero essenzialmente non concreto, perche indicante la ripetizione d' una quantità, ripetizione, che non può esser suscet-

tibile di spezzamento. Possiamo infatti ben concepire $^{7}/_{12}$, e $^{3}/_{10}$ di libra, di scudo, ma non già di *volte*, che possa essere una quantità ripetuta. Ed in vero se noi in vece di prendere una quantità data 1, 2, 3 ... o un numero qualunque di volte, di essa prendiamo in vece $^{1}/_{2}$, $^{2}/_{3}$, $^{3}/_{4}$, ec, ci esprimeremmo inesattamente se dicessimo, che la quantità data è stata presa per $^{1}/_{2}$, $^{2}/_{3}$, $^{3}/_{4}$, ec, *di volta*, o di *se*, poichè così esprimendoci riferiremmo al moltiplicatore quel cambiamento, che ha subito il moltiplicando. Dobbiam dire in vece, che non più la data quantità di prima ma è un suo *mezzo*, *o terzo*, *o quarto*, che è preso 1, 2, 3 ... o un qualunque numero, ma *sempre intero* di volte, poichè il prendere una quantità è un atto individuo è un unità di quel genere, che può replicarsi quanto ci piaccia, ma non già in frammenti dividersi, essendo assurde le sue frazioni (9). Non possiamo dunque formarci idea alcuna di moltiplicazione, che non sia eseguita per un moltiplicatore intero; ed anche allorquando prendiamo una frazione di una data quantità, ci hanno i citati esempii mostrato che l' idea della moltiplicazione che in tali casi occorre, rimane identica a quella che avevamo acquistata parlando degli interi, sempre essa consistendo nella *ripetizione di un dato numero di unità* sieno esse assolute o relative, intere cioè o frazionarie. Quindi la produzione di un' aumento è per noi un' effetto indispensabile della moltiplicazione: e se quando abbiam trovato esser 56 paoli il $^{7}/_{12}$ di 96, e 108 scudi il $^{3}/_{10}$ di 360, ci si opponesse, che questi prodotti sono minori il primo di 96 paoli, il secondo di 360 scudi, noi soggiungeremo, che non già 96 paoli, ma il suo dodicesimo, cioè 8 paoli è il moltiplicando, cui dobbiamo paragonare il 56 che è precisamente 7 volte mag-

giore di lui ; e non 360, ma il suo decimo 36 è il moltiplicando, di cui 3 volte maggiore è appunto il prodotto 108, come l' indole della moltiplicazione richiede. Noi perciò non conveniamo nell' opinione de' Matematici, che con Euclide, e Newton ci dicono, che la moltiplicazione estesa alle frazioni non produce aumento ma diminuzione, e merita perciò una definizione più generica di quella, che le abbiam data. Noi dicemmo, non conveniamo in questa opinione in quanto che attribuisce a parer nostro alla moltiplicazione ciò che è proprio della divisione che sempre la precede in que' problemi in cui ci proponiamo di trovare una frazione di quantità ; ed è una opinione derivata da una inesattezza di espressione, la quale fa credere, che sia realmente una sola unica moltiplicazione il complesso di una divisione, e moltiplicazione, perchè espresso dal semplice nome di *moltiplicazione per frazione*, frase che presa a rigore è anzi vuota di senso, perchè formarci non sappiamo idea alcuna di moltiplicator frazionario. Questa inesatta espressione è però sanzionata dall' uso, ed a titolo di brevità di analogia, e per comodo delle classificazioni l' adotteremo anche noi, dopo però di aver ben rettificate le idee, e stabilito a scanso d' ogni equivoco, che *moltiplicare per una frazione* non esprime un' unica operazione individua, come la frase indurrebbe a credere, ma altro non significa, che *dividere una quantità pel denominatore*, e *moltiplicarla pel numeratore della data frazione*, *onde prendere della data quantità quella parte*, *che la frazione ci indica*.

328. E qui si noti che se il numeratore è l' unità, se cioè la frazione invece di essere un numero è un unità frazionaria, in tal caso siccome 1 non molti-

plica, e non divide, così allora delle 2 operazioni, che comprendiamo sotto la parola moltiplicazione per frazioni non rimane a rigore, che la semplice divisione, sicchè più che mai improprio diventa allora il nome di *moltiplicazione* che pur per analogia prosegue ad usarsi. La così detta *moltiplicazione per un' unità frazionaria è dunque una vera divisione*. Così moltiplicar 12 per $^1/_3$ è un prendere il terzo di 12 non già più volte, ma una volta sola, e perciò non è che un vero dividere il 12 per 3.

329. Queste analitiche investigazioni ci procurano due vantaggi, lasciano nella sua originaria semplicità la definizione della moltiplicazione, e ci suggeriscono esse stesse i processi, che dobbiam porre in prattica per eseguire la così detta *moltiplicazione per frazione*, facendoci conoscere, che dessa non è un unica ed individua, ma una *duplice* operazione. E dopo queste premesse passiamo agli altri 3 casi, che nella moltiplicazione abbiamo distinto.

II. *Moltiplicazione di Interi per frazioni*.

330. Questo caso ha luogo quando la quantità di cui dobbiam prender una frazione è un intero. Se si avesse a prender $^5/_8$ di una eredità di scudi 4960, ecco il caso di moltiplicare un *intero*, il 4960 cioè per una frazione qual' è $^5/_8$; e sapendo, che ciò si ottiene dividendo per 8, e moltiplicando per 5 (327), avremo

$$4960 \times \frac{5}{8} = \frac{4960}{8} \times 5 = \frac{4960.5}{8} = 3100.$$

E in genere $d \times \frac{a}{n} = \frac{ad}{n}$, poichè $d \times \frac{a}{n}$ significa

prendere la parte eunesima di d, ossia dividere d per n, e quindi ripetere il quoto tante volte quante unità sono in a, ossia moltiplicare il quoto $\frac{d}{n}$ per a, il che dà $\frac{ad}{n}$ (272).

331. E qui è a notarsi, che quantunque sieno due ben distinte operazioni, pur ci danno lo stesso identico prodotto $\frac{ad}{n}$ tanto $d \times \frac{a}{n}$, quanto $\frac{a}{n} \times d$ (324); sicchè possiamo conchiudere per rapporto ai risultati che anche nelle moltiplicazioni di interi per frazioni si può inverter l' ordine de' fattori impunemente, e quindi riguardando come fusi in un solo i due casi fin qui contemplati, possiamo conchiudere, che per *moltiplicare un intero per un frazione, o una frazione per un intero fa d' uopo moltiplicar l' intero pel numeratore e dividere il prodotto risultante pel denominatore della frazione*.

332. E' pure a notarsi, che l' ottenuto prodotto è maggiore della frazione, e minor dell' intero, che hanno contribuito a formarlo, è cioè un multiplo della frazione per quanto indica l'intero, ed è quella parte dell' intero che è indicata dalla frazione. Il $^6/_5$ considerato come prodotto di $^2/_5 \times 3$ è 3 volte maggiore della frazione, come prodotto di $3 \times {}^2/_5$ non è che due soli dei $^5/_5$, che formano il 3.

333. *Metodi più compendiosi di moltiplicazione*. Quando nel numeratore, e denominatore del prodotto vi sono de' fattori comuni, siccome questi fattori si elidono, così l' operazione può eseguirsi più presto. E infatti.

1.° *Se l' intero è summultiplo del denominatore* il prodotto si ottiene dividendo il denominatore pel proposto intero. Così $3 \times {}^2/_{15} = {}^2/_5$. Infatti $3 \times {}^2/_{15} = {}^{3.2}/_{3.5} = {}^2/_5$.

2.° *Se l' intero è uguale al denominatore*, il prodotto non è che il numeratore della frazione. Così $10 \times {}^3/_{10} = 3$; poichè $10 \times {}^3/_{10} = {}^{10.3}/_{10} = {}^3/_1 = 3$.

3.° *Se l' intero è multiplo del denominatore*, il prodotto si ottiene moltiplicando il solo numeratore della frazione pel quoto, che nasce dal dividere l' intero pel denominatore. Così $28 \times {}^5/_{14} = 10$. Infatti $28 \times {}^5/_{14} = {}^{28.5}/_{14} = {}^{2.14.5}/_{14} = {}^{2.5}/_1 = 10$.

4.° *Se l' intero ha col denominatore un fattore comune*, questo si elide in ambedue. Così $8 \times {}^5/_{12} = {}^{10}/_3$, poichè $8 \times {}^5/_{12} = 4.2 \times {}^5/_{4.3} = {}^{4.2.5}/_{4.3} = {}^{10}/_3$.

III. *Moltiplicazione di frazione per frazione*.

334. Questo caso ha luogo quando la quantità di cui dobbiamo prendere una frazione è frazionaria, onde chiaro apparisce che *moltiplicare frazione per frazione* altro non significa che *prendere una frazione di frazione*. Se p. e. un orefice onde dorare una scatola impiega soli ${}^2/_3$ di tutto l' oro che avea preparato, e che era ${}^5/_8$ d' oncia, è chiaro che l' oro impiegato è ${}^2/_3$ di ${}^5/_8$, e perciò qui trattasi di prender 2 volte il terzo di ${}^5/_8$ ossia di moltiplicar ${}^5/_8$ per ${}^2/_3$. Per ottener l' intento prendiamo prima il terzo di ${}^5/_8$ col moltiplicar per 3 il suo denominatore 8, quindi moltiplichiamo questo terzo per 2, onde avere i richiesti 2 terzi, moltiplicando per 2 il numeratore. Così otterremo ${}^5/_8 \times {}^2/_3 = {}^{10}/_{24}$ d' oncia.

E in genere $\frac{a}{c} \times \frac{m}{n} = \frac{am}{cn}$, poichè $\frac{a}{c} \times \frac{m}{n}$ significa 1.° prendere la parte ennesima della frazione moltiplicando, il che si ottiene col moltiplicare per n il suo denominatore (273), e quindi ripetere questa parte ennessima della frazione un numero m di volte, il che si ottiene moltiplicando per m il numeratore (272), scrivendo cioè $\frac{am}{cn}$. *Dunque per moltiplicare una frazione per frazione, si moltiplicano i numeratori, e denominatori tra loro, e la frazion, che risulta col dividere il primo pel 2.° prodotto costituisce il prodotto richiesto.*

335. Da questa regola segue, che lo stesso prodotto si ottiene quand' anche s' inverta l' ordine de' fattori; poichè in questa inversione il prodotto si de' numeratori, che de' denominatori è il medesimo (49). Si ottiene egualmente $^{10}/_{24}$ da $^{2}/_{3} \times {}^{5}/_{8}$, che da $^{5}/_{8} \times {}^{2}/_{3}$.

336. Ed è pur evidente, che quando sono frazioni proprie quelle, da cui nasce il prodotto, il prodotto è sempre minore di ciascuna di esse. Così $^{10}/_{24}$ considerato come prodotto da $^{5}/_{8} \times {}^{2}/_{3}$ è minore di $^{5}/_{8}$, perchè non è che *due dei tre terzi*, che formano il $^{5}/_{8}$. Considerato come $^{2}/_{3} \times {}^{5}/_{8}$ è minor di $^{2}/_{3}$, perchè non è che 5 *degli otto ottavi*, che costituiscono il $^{2}/_{3}$.

337. *Metodi più compendiosi di moltiplicazione*. Anche in questo 3.° caso si danno dei metodi più compendiosi del generale già indicato, quando vi sono de' fattori comuni nel numerator di una, e denominator

dell' altra frazione, poichè questi vanno nel prodotto ad elidersi, e dai prodotti ridotti si possono trarre le regole per ottenerli direttamente. Così se il numerator d' una frazione è uguale al denominator dell' altra, come nel caso di $^5/_8 \times {}^8/_7$, i due termini eguali si sopprimono, e il prodotto è $^5/_7$, poichè a tenor del metodo generale il prodotto è $^{5.8}/_{8.7} = {}^5/_7$. Così $^{15}/_8 \times {}^2/_5 = {}^3/_4$; poichè $^{15}/_8 \times {}^2/_5 = {}^{3.5.2}/_{2.4.5} = {}^3/_4$. Così $^9/_{15} \times {}^5/_9 = {}^1/_3$; poichè $^9/_{15} \times {}^5/_9 = {}^{9.5}/_{3.5.9} = {}^1/_3$.

E ai medesimi risultati noi pur giungiamo quasi sempre se riflettasi, che lo stesso intento si ottiene, se per quella quantità per cui si moltiplica il numeratore o denominatore, si divida invece il denominatore, o il numeratore, la qual' ultima operazione è sempre preferibile all' altra, quando possa eseguirsi, perchè immediatamente ci reca a risultati più semplici.

IV. *Moltiplicazione di interi e frazioni per interi e frazioni.*

338. Quando fosse a moltiplicarsi un numero misto, composto cioè di intero, e frazione o per un intero o per una frazione, o per un altro numero misto, il caso risolvesi in qualcuno degli accennati col convertire i numeri misti in una sola frazione.

Così $(5+{}^3/_7) \times 6 = {}^{38}/_7 \times 6 = {}^{228}/_7 = 32+{}^4/_7$.
Così $(3+{}^2/_5) \times {}^4/_9 = {}^{17}/_5 \times {}^4/_9 = {}^{68}/_{45} = 1+{}^{23}/_{45}$.
Così $(2+{}^1/_3)(3+{}^2/_5) = {}^7/_3 \times {}^{17}/_5 = {}^{119}/_{15} = 7+{}^{14}/_{15}$.

Ma quando specialmente il moltiplicando misto contiene un numero piuttosto forte di interi, giova moltiplicar separatamente le due parti colle regole stabilite nella moltiplicazione de' polinomii (217). E così $(24+{}^3/_4)$ $(4+{}^2/_3)$ si può moltiplicare come l' annesso esempio dimostra.

Moltiplicando $24 + {}^{3}/_{4}$
Moltiplicatore $4 + {}^{2}/_{3}$
Prodotto $96 + 3 + 16 + {}^{1}/_{2} = 115\ {}^{1}/_{2}$.

Così $x\ (1 + {}^{1}/_{3} + {}^{1}/_{5}) = x + {}^{x}/_{3} + {}^{x}/_{5}$ e quindi se occorra (come spesso accade nella risoluzione delle equazioni) di trarre fuori il fattor comune ai termini dell' ottenuto prodotto, è ben chiaro che si avrà $x + {}^{x}/_{3} + {}^{x}/_{5} = x\ (1 + {}^{1}/_{3} + {}^{1}/_{5})$.

Così $({}^{a}/_{c} - 1) \times z = {}^{az}/_{c} - z$; e quindi ${}^{az}/_{c} - z = z\ ({}^{a}/_{c} - 1)$.

Così $(a + {}^{c}/_{m})\ ({}^{m}/_{n} - 1) = {}^{am}/_{n} + {}^{c}/_{n} - a - {}^{c}/_{m} = \dfrac{am^2 + cm - amn - cn}{mn}$

339. Finalmente a comodo della memoria notiamo che tutte le regole relative ai differenti casi della moltiplicazione delle frazioni possono ad una sola ridursi, trasformando questi nell' unico caso della moltiplicazione di *frazion per frazione*, col ridurre i numeri misti, se vi sono, a una sola frazione, e coll' apporre per denominator l' unità (278) al fattore intero se vi esiste; e con ciò *ogni caso di moltiplicazione si eseguisce moltiplicando tra loro numeratori, e denominatori*.

Frazioni di frazioni.

340. Ciò che si è detto circa il modo di moltiplicar frazioni per frazioni può estendersi a 3, a 4, e a qualsiasi altro numero; poichè un prodotto di 3, 4 ec. frazioni si ottiene, moltiplicando il prodotto delle due prime per la terza, questo per la quarta, ec; e a questi prodotti corrispondono le così dette frazioni di frazioni. Se Oddo p. e. dopo aver disposto di ${}^{1}/_{10}$ del suo patrimonio a favore de' poveri, lascia ${}^{3}/_{4}$ del rimanente

al figlio maggiore col peso di assegnare in dote alla sorella $^2/_5$ della sua parte, è ben chiaro che l'eredità del figlio è $^3/_4$ dei $^9/_{10}$ del patrimonio intero; e la dote di sua sorella è $^2/_5$ di $^3/_4$ di $^9/_{10}$, sicchè la parte del figlio è una frazion di frazione, la dote della sorella è una frazion di frazion di frazione.

Ora il calcolo di queste frazioni di frazioni, che sembra a primo aspetto intricatissimo è ben facile, poichè altre avvertenze non esige oltre quelle già stabilite per la moltiplicazione delle frazioni semplici, essendo una proprietà fondamentale delle frazioni di frazioni, sien pur complicatissime, il convertirsi in frazioni semplici, ed entrar subito in immediata, e diretta relazione coll' unità assoluta piuttosto che dipendere da una catena di rapporti, e ciò per mezzo della semplice moltiplicazione delle une per le altre.

341. Ed infatti se la parte del figlio maggiore risulta dal prender $^3/_4$ di $^9/_{10}$, già sappiamo (327), che ciò chiamasi moltiplicar $^9/_{10}$ per $^3/_4$; e quindi $^3/_4$ di $^9/_{10} = {^9/_{10}} \times {^3/_4} = {^{27}/_{40}}$, sicchè conchiudiamo, che la parte del figlio è $^{27}/_{40}$ dell' intero patrimonio.

Se la dote della sorella è $^2/_5$ di ($^3/_4$ di $^9/_{10}$), è $^2/_5$ di $^{27}/_{40}$, è $^{27}/_{40} \times {^2/_5} = {^{27}/_{100}}$; sicchè conchiudiamo, che la dote della sorella è $^{27}/_{100}$ dell'intero patrimonio.

Così $^1/_{10}$ di $^1/_{10} = {^1/_{10}} \times {^1/_{10}} = {^1/_{100}}$; e $^1/_{10}$ di $^1/_{100} = {^1/_{100}} \times {^1/_{10}} = {^1/_{1000}}$, ec. Così $^2/_3$ di $^3/_5$ di $^4/_7$ di $^5/_8 = {^2/_3}$ di $^3/_5$ di $\frac{4 \cdot 5}{7 \cdot 8} = {^2/_3}$ di $\frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{5 \cdot 7 \cdot 8} =$

$$\frac{2.3 \cdot 4 \cdot 5}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{1}{7}.$$

Dal che apparisce, che le più complicate *frazio-*

ni di frazioni si riducono a frazione semplice, formando il prodotto de' numeratori di tutte le successive frazioni che entrano nell' espressione, e dividendo questo prodotto per quello de' rispettivi denominatori, ed elidendo i fattori comuni ad entrambi i prodotti.

Applicazione della moltiplicazione ai Problemi.

342. *Quanto importano* Libre $4\frac{1}{2}$ *zuccaro a soldi* $7\frac{1}{2}$ *la libra?* Risultato: soldi $33+{}^3/_4$; poichè $(7+{}^1/_2)(4+{}^1/_2) = 33+{}^3/_4$. *Quanto importano* Libre $13\frac{1}{2}$ *di Lino a soldi* $12\ {}^2/_3$ *la libra?* — Risultato: soldi 171.

343. *Quanti scudi formano* lire 250? — Risultato: scudi 46; poichè un pezzo da 5 lire è ${}^{92}/_{100}$ di scudo, una lira è ${}^{92}/_{500} = {}^{23}/_{125}$ di scudo (294); e perciò lire 250 sono ${}^{23}/_{125} \times 250 = 46$ scudi.

344. *Di scudi* 6600 *ritrovati in un fondo ne va per convenzione* ${}^1/_3$ *al Governo,* ${}^1/_6$ *al Ritrovatore,* ${}^1/_5$ *agli Operaii, e* ${}^3/_{10}$ *al Padrone. Quanto tocca a ciascuno?* — Risultato: al Governo Scudi 2200, al Ritrovatore 1100, agli Operaii 1320, al Padrone 1980.

345. *Di quanti piedi cubici risulta un legno parallelepipedo lungo piedi* $14\frac{1}{2}$, *largo piedi* $1\ {}^1/_3$, *alto piedi* $1\ {}^1/_2$? — Risultato: piedi 29; poichè risultando il numero de' piedi cubici, come si vedrà in Geometria, dalla moltiplicazione delle 3 dimensioni tra loro, avremo $(14+{}^1/_2)(1+{}^1/_3)(1+{}^1/_2) = 29$.

346. *Della somma di scudi* $236\ {}^3/_5$ *vanno* ${}^5/_8$ *a Tizio,* ${}^3/_7$ *del resto a Marco, e gli altri* ${}^4/_7$ *a Cajo. Quanto tocca a ciascuno?*

Risultato: parte di Tizio $(236+{}^3/_5)\ {}^5/_8 = 147+{}^7/_8$
Parte di Marco ${}^3/_7$ di ${}^3/_8$ di $(236+{}^3/_5) = 38+{}^1/_{40}$.

Parte di Cajo $^4/_7$ di $^3/_8$ di $(236+^3/_5) = 50+^7/_{10}$.

Ed infatti la somma di queste 3 parti è $236+^3/_5$.

347. *Tizio diretto a Roma ha fatto nel* 1.° *giorno* $^1/_5$ *di strada nel* 2.° *soli* $^2/_3$ *del cammino percorso nel* 1.°, *nel* 3.° *soli* $^3/_4$ *del sentiero corso nel* 2.° *nel* 4.° *la sola metà de' passi fatti nel* 3.°, *e nel* 5.° $^1/_3$ *de' passi fatti nel* 4.° *giorno*. *Quanto dista ancora da Roma*? — Risultato: è alla metà dell' intera strada a percorrersi.

Poichè $^1/_5 + ^2/_3$ di $^1/_5 + ^3/_4$ di $^2/_3$ di $^1/_5 + ^1/_2$ di $^3/_4$ di $^2/_3$ di $^1/_5 + ^1/_3$ di $^1/_2$ di $^3/_4$ di $^2/_3$ di $^1/_5 = ^1/_2$.

E quest' addizione di diverse frazioni di frazioni è ciò che gli aritmetici chiamano *Infilzamento de' rotti*.

DIVISIONE

348. Nella divisione o cerchiamo il *numero* delle parti, ossia osserviamo quante volte una quantità concreta è contenuta in un' altra, e in tal caso il divisor concreto può essere una frazione, ma frazione a rigore non può essere il quoto, perchè indicandoci esso quante volte il divisore è contenuto nel dividendo, ossia quante volte va *ripetuto* per formare il dividendo, è desso che fa ufficio di *moltiplicatore* (96); ed è perciò un numero essenzialmente non concreto, e necessariamente intero (327): O cerchiamo il *valore*, quella parte cioè del dividendo, che di lui sia tanto più piccola quanto lo indica il divisore; ed in tal caso è *moltiplicatore* il divisore, poichè desso è allor che ci esprime quante volte è del dividendo più piccola la parte espressa dal quoto, ossia quante volte *va ripetuto* il quoto per formare il dividendo; e perciò è desso che

a rigor non può essere nè concreto, nè frazionario, mentre frazionaria può esser benissimo la parte concreta omogenea al dividendo espressa dal quoto. Conviene aver mira a tutti questi riflessi, se giuste idee annettere vogliansi alle operazioni, ed ai risultati a tenor del duplice scopo, che proporre ci possiamo in tutti i 5 casi, che la divisione delle frazioni contempla, e che sono.

1.° Dividendo, e divisore interi, ma il 2.° maggior del primo, onde frazionario sia il quoto.

2.° Dividendo frazionario, e divisore intero.

3.° Dividendo intero, e divisore frazionario.

4.° Ambedue i termini frazionarii.

5.° Termini misti di interi, e frazioni.

I. *Dividendo intero minor del divisore* } *Divisore intero*
II. *Dividendo frazionario* }

349. Nel 1.° di questi due casi contempliamo primieramente la ricerca del *numero* delle parti, cioè del quante volte il divisore è contenuto nel dividendo, ed eccone un'esempio. *Quante libre, o parti di libra può di cioccolate acquistarsi con paoli* 3, *posto che* 4 *paoli sia il valor di una libra*? Ciò deducesi dal quante volte il valor d'una libra è contenuto nella somma determinata alla compra (122); sicchè la cosa cercata dipende da un quoto essenzialmente non concreto, che perciò non può essere frazionario. Or nel nostro caso la ricerca del quante volte 4 paoli prezzo di una libra stia ne' 3 paoli che vogliamo spendere, è a rigore assurda, e d'esser tale sol cessa, quando veggendo, che nel 3 paoli non può essere contenuto il 4, passiamo in vece a trovare una qualche parte del 4 divisore, che pos-

sa esservi contenuta esattamente. Or poichè tale è al certo la comun misura del 3, e del 4, cioè l'unità paolo, che è la quarta parte del divisore 4, che sta tante volte nel dividendo 3 quante sono appunto le di lui unità, così conchiudiamo che non più il 4 divisore dato, ma sol la quarta sua parte è contenuta 3 volte nel dividendo 3; ed è precisamente ciò che intender dobbiamo per quel $^3/_4$, che si dice essere il quoto di 3 diviso per 4, quando il quoto esprimer dee il *quante volte*. Dall'aver poi veduto, che non il 4 paoli valor della libra intera, ma solo il suo quarto è 3 volte contenuto in 3 paoli, conchiudiamo, che egualmente non una libra, ma $^1/_4$ di libra sia contenuto 3 volte nella quantità di cioccolate acquistabile per 3 paoli, ossia che $^3/_4$ di libra è il cioccolate, che possiamo per 3 paoli comprare.

Frattanto rileviamo dall' esposto, che l' ottenuto $^3/_4$ di libra non è a rigore il quoto, ma è una quantità, che per le condizioni del problema si deduce dal quoto, il quale ci indica sol quante volte la quarta parte del divisor 4 paoli è contenuta nel dividendo 3. Quindi è che in questo genere di ricerche non potendo il quoto essere un numero frazionario non solo dir non possiamo, che il 4 stia in 3 per $^3/_4$ di volta, ma useremmo una espressione a rigore contraddittoria, se anche dicessimo colla comune degli aritmetici, che il 4 è contenuto in 3 per $^3/_4$ di se medesimo; poichè dir che *vi è contenuto*, e poi aggiungere *per una sola parte di se*, è a rigore un dir *che vi è, e che non vi è contenuto*: ed in fatti non è il 4, ma una sola parte di 4, che in 3 è contenuta esattamente. Più preciso sarà perciò il nostro linguaggio, se diremo, che veggendo assurda la ricerca del quante volte il 4 stia

in 3, siam passati alla ricerca del quante volte stia in 3 esattamente una qualche parte del 4, e che avendo trovato, che la sua quarta parte sta esattamente 3 volte in 3, abbiam conchiuso che a rigore il quoto è il solo numeratore 3 della frazione $^3/_4$; ed il denominatore 4 serve a precisarci la parte del divisore, che è contenuta esattamente nel dividendo 3. Ne' casi dunque, in cui il quoto è destinato ad esprimere quante volte una quantità è contenuta in un' altra, se mai il dividendo è minor del divisore, per ottenere il quoto dobbiamo *far una frazione di cui sia numeratore il dividendo, e denominatore il divisore*, ma in tal caso se per comodo, e brevità ci si permette di dare il nome di quoto all' ottenuta frazione, avvertir ben dobbiamo che il vero quoto è il semplice numeratore, il qual ci indica quante volte è contenuto nel dividendo non giá il proposto divisore, ma quella parte di esso, che vien dal denominator della frazione indicato, come chiaramente ce lo ha mostrato l' esempio.

350. Nello stesso 1.° caso di divisione in vece del *numero* ricerchisi ora il *valor* delle parti; p. e. *Quanto tocca a ciascun dei 12 figli, in cui voglionsi ripartire libre 5 di confetti?* E' chiaro (269) che tocca a ciascuno il dodicesimo di ogni libra, e che perciò il quoto è la vera frazione $^5/_{12}$ di libra, ossia oncie 5, sicchè in quest' altro genere di ricerche il quoto è una vera frazione concreta omogenea al dividendo, che viene espressa dalla semplice indicazione della divisione di un termine per l' altro.

351. Dagli esposti due esempii deduciamo che qualunque delle due sia la mira che nella divisione ci possiamo proporre, *si converte l' intero dividendo in quo-*

17

to considerandolo per numeratore , e dandogli per denominatore l' intero divisore .

352. Anche nel II. caso, quando cioè frazionario è il dividendo, e intero è il divisore prendiam di mira per prima la ricerca del *numero* delle parti, cioè il quante volte il divisore è contenuto nel dividendo. P. e. *Quanto cioccolate può comprarsi con $^3/_5$ di paolo, posto che paoli 4 sia il valore d' una libra ?* Si ottiene l' intento, si deduce cioè quante libre o parti di libra possono con $^3/_5$ di paolo comprarsi dal quante volte il 4 paoli, o qualche sua parte è contenuta in $^3/_5$ di paolo. Ora per osservar quante volte il 4 sta in $^3/_5$, riflettiamo che se per 4 fosse a dividersi il 3, il quoto sarebbe $^3/_4$ (349), il qual ci mostra, che in 3 è contenuto 3 volte $^1/_4$ del divisore 4: or dunque in una quantità 5 volte più piccola di 3, cioè in $^3/_5$ non può esser contenuta 3 volte che una quantità 5 volte più piccola di quella che stava 3 volte in 3, poichè non può rimanere inalterato il quoto 3, se col divenir 5 volte più piccolo il dividendo, tale anche il divisor non divenga (106). Dunque non più $^1/_4$ del divisore, ma $^1/_{4\cdot5}$, ossia $^1/_{20}$ del divisore 4 è contenuto 3 volte nel dividendo $^3/_5$, e quindi conchiudiamo che se $^1/_{20}$ di 4 paoli valor d' una libra è contenuto 3 volte in $^3/_5$ di paolo, $^3/_{20}$ è il quoto, e $^3/_{20}$ di libra potremo con questi $^3/_5$ di paolo comprare. Applicando però anche a questo 2.° caso i riflessi stessi fatti nel 1.°, notiamo, che quando dicesi, che $^3/_{20}$ è il quoto di $^3/_5$: 4, intender dobbiamo che abbandonata l' impossibil ricerca del quante volte il 4 è contenuto in $^3/_5$, abbiam trovato che in $^3/_5$ è contenuta 3 volte la ventesima parte di 4.

353. Or nello stesso II. caso di divisione cerchisi ora invece del numero *il valor* delle parti, p. e. *Quanto tocca a ciascuno dei 12 figli, in cui vogliansi dividere non più 5 libre, ma $^5/_6$ di libra di confetti?* Per ottener l'intento prender dobbiamo il dodicesimo di $^5/_6$, dobbiamo cioè render 12 volte più piccolo il $^5/_6$, il che ottiensi moltiplicando pel divisore 12 il denominatore 6, e così otteniamo $^5/_{72}$ di libra per quoto, che è una real frazione concreta omogenea al dividendo.

354. Dai due esposti esempii deduciamo, che qualunque de' due oggetti, che possiamo prefiggerci sia lo scopo della ricerca, in questo 2.° caso di divisione *si converte il dividendo in quoto moltiplicando pel divisore intero il denominatore della frazione*.

355. Dal primo caso di divisione si ha

$$a : m = \frac{a}{m};\ \text{e d'altronde}\ a \times \frac{1}{m} = \frac{a}{m}\ (330).$$

Dal secondo caso di divisione si ha

$$\frac{a}{c} : m = \frac{a}{cm};\ \text{e d' altronde}\ \frac{a}{c} \times \frac{1}{m} = \frac{a}{cm}\ (334).$$

Dunque la divisione per un divisore intero *m* si eseguisce ancora col dare al divisore l' aspetto frazionario (278) e poi moltiplicare il dividendo pel rotto divisore rovesciato, cosicchè tanto è dividere per 3 per 4, ec, che moltiplicare per $^1/_3$ per $^1/_4$, ec., il che corrisponde alla veritá già dimostrata (328), che moltiplicare per una unità frazionaria è un vero dividere.

III. *Dividendo intero* } *Divisor frazionario*.
IV. *Dividendo frazionario* }

356. Anche in questo 3.° e 4.° caso sieno le nostre prime mire rivolte sulla ricerca del *numero* delle parti, cioè dal quante volte il divisore è contenuto nel dividendo. P. e. *quanto cioccolate può comprarsi con scudi* 3, *o* $^3/_4$ *posto che il valor d' una libra sia* $^7/_{10}$ *di scudo*? E' chiaro che quante volte il $^7/_{10}$ è contenuto in 3, o in $^3/_4$ di scudo, e tante libre possiamo comprarne. Convien dunque osservare quante volte il $^7/_{10}$ è contenuto in 3, o in $^3/_4$.

Ora il numero delle volte che $^7/_{10}$ è contenuto in una quantità qualunque è lo stesso numero di volte, che il solo numeratore 7, che è 10 volte maggiore di $^7/_{10}$, è contenuto in un dividendo parimente 10 volte maggiore (106). Dunque cercar quante volte $^7/_{10}$ sta p. e. in 3 è un cercar quante volte 7 sta in 10 volte 3, o in 30: così cercar quante volte $^7/_{10}$ sta in $^3/_4$ è un osservar quante volte il 7 sta in $^3/_4 \times 10$, ossia in $^{3.10}/_4$, il che si ottiene dividendo per l' intero 7 la frazione (354); ed ecco per mezzo della moltiplicazione del dividendo pel denominator del divisore ridotto questo, 3.°, e 4.° caso al 1.°, e 2.°, in cui il divisore è un' intero.

Così $3 : {}^7/_{10} = {}^{3.10}/_7 = {}^{30}/_7 = 4 + {}^2/_7$

Così $^3/_4 : {}^7/_{10} = {}^{3.10}/_{4.7} = {}^{30}/_{28} = 1 + {}^1/_{14}$

Dal che conchiudiamo che il $^7/_{10}$ in 3 è contenuto 4 volte più 2 volte la sua settima parte, sicchè libre $4\,^2/_7$ è il cioccolate, che può con 3 scudi acquistarsi; ed in $^3/_4$ lo stesso $^7/_{10}$ è contenuto una volta più una volta la sua quattordicesima parte, sicchè libre $1\,^1/_{14}$ è il cioccolate corrispondente a $^3/_4$ di scudo.

In somma, qualunque sia la natura de' problemi che ci inducono a cercare quante volte una frazione è contenuta in una data quantità, ciò è lo stesso che cercar quante volte il suo solo numeratore è contenuto nel dividendo già moltiplicato pel denominatore; e si *ottiene perciò il quoto col dividere pel numeratore della frazione il dividendo dopo di averlo moltiplicato pel di lei denominatore*.

357. Applicando questa regola al caso in cui il divisore abbia 1 per numeratore, p. e. allorchè cerchisi quante volte $^1/_{10}$ sta in 4, siccome ciò è lo stesso che cercar quante volte 1 sta in 10 volte 4, otteniamo l' intento moltiplicando 4 per 10, e poi dividendo il prodotto per 1 (il che non l' altera affatto); sicchè il quoto è $^{4 \cdot 10}/_1 = 40$: dal che risulta, che quando il divisore non è un numero, ma un' unità frazionaria, si ottiene il quoto per mezzo della semplice moltiplicazione del dividendo pel denominator del divisore, essendo inutile la susseguente divisione del prodotto per 1, giacchè 1 non vale nè a moltiplicar, nè a dividere. *Divider dunque per un unità frazionaria non è che un moltiplicare pel suo denominatore*; ed infatti se 1 è contenuto in una data quantità per quanto lo indica la quantità stessa, un' unità frazionaria, che è 2, 3, ec, volte più piccola di 1, vi dovrà esser contenuta un numero 2, 3, ec. volte maggiore, ossia un numero di volte che è la quantità stessa moltiplicata pel denominatore.

Si avverta che val lo stesso ragionamento anche quando il dividendo è frazionario.

358. Poichè nel terzo, e quarto caso di divisione abbiamo già esaminato ciò che riguarda la ricerca del *numero* delle parti, passiamo ora a considerarvi la ri-

cerca del lor *valore*, e notiamo di primo slancio, che questa ricerca senza una qualche modificazione non può a rigore aver luogo, poichè dessa esige un divisor non concreto (131), e tale non può essere un divisor frazionazio (348), qual' è appunto il divisore nel terzo, e quarto caso, che ora consideriamo. V' è però un genere di problemi, che aggirasi sulla ricerca del valore delle parti, in cui sebbene il divisore sia essenzialmente non concreto, e perciò intero, pur mentisce l' aspetto di frazionario, ed eccone un' esempio. Cerchisi il valor d' una libra, posto che $^5/_6$ di libra abbiano costato p. e. 3 paoli, o $^3/_4$ di paolo. In questo problema trattasi di dedurre il valor d' una libra dal noto valore di $^5/_6$ di libra, e perciò è della stessa indole di quello in cui trattasi di dedurre il valor d' una cosa da un certo numero di esse (128), poichè sì nell' un che nell' altro si vuò dedurre il valore dell' unità da un numero sia poi intero sia frazionario. Or poichè l' operazione con cui si giunge all' intento quando la quantità è intera, è la divisione (128), così per analogia si è chiamata *divisione* anche l' operazione per la quale si giugne al medesimo intento, quando la quantità è frazionaria, sebben l' operazione non consista in una sola divisione. Infatti per dedurre dal valor di $^5/_6$ di libra il valor d' una libra occorrono due distinte operazioni. E primieramente apprezzato il riflesso, che se una data somma è stata il valor di $^5/_6$ di libra, il valor di 5 libre, ossia d' un peso 6 volte maggiore esser dee 6 volte maggiore pur esso, noi prima d' ogni altro deduciamo dal valore di $^5/_6$ di libra il valor di 5 libre moltiplicando il 3 paoli, o il $^3/_4$ di paolo valore del $^5/_6$ di libra pel denominator 6, e con questa prima operazione facciamo sì, che il problema riducasi a ricavare il

valore dell' unità non più dal valore di un numero frazionario, ma dal valore di un numero intero di esse. Passando poi a dividere l' ottenuto prodotto per 5, ossia prendendo la quinta parte del prezzo di libre 5, è ben chiaro che risultar dovrà il cercato valore d' una libra soltanto. Ora il complesso di queste due operazioni della moltiplicazione cioè di 3, o di $^3/_4$ pel denominatore 6, e poi della divisione pel numeratore 5, siccome diretto ad ottenere il valor d' una libra dal prezzo di $^5/_6$ di libra, è ciò che dicesi *dividere per* $^5/_6$, come diciamo di divider p. e. per 20, quando deduciamo il valor d' una libra dal valore di 20 libre. Ognun vede però, che in questo 2.° caso in realtà dividiamo semplicemente, non così nel 'primo; ond' è che il così detto dividere per $^5/_6$ è un' espressione inesatta, alla quale per non cadere in errori convien ben annetter l' idea delle due distinte operazioni, che vi sono comprese, riflettendo cioè, che dividere una quantità per $^5/_6$ altro non significa che dividerla per 5 dopo che si è moltiplicata per 6, ossia prender la quinta parte del di lei sestuplo, sicchè a rigore quando nelle *ricerche del valore* diciamo di dividere una quantità per una frazione, il vero dividendo non è la quantità espressa per tale, ma il suo prodotto pel denominatore della frazione, e il divisore non è la frazione, ma il di lei solo numeratore. Così $3 : {}^5/_6 = {}^{3.6}/_5 = {}^{18}/_5 = 3 + {}^3/_5$; e quindi paoli 3 $^3/_5$ è il valor d' una libra, quando paoli 3 è il valore di $^5/_6$ di libra. Così $^3/_4 : {}^5/_6 = {}^{3.6}/_{4.5} = {}^{18}/_{20} = {}^9/_{10}$; e quindi $^9/_{10}$ di paolo è il valor d' una libra, quando $^3/_4$ di paolo è il valore di $^5/_6$ di libra. Così in genere divider a per $^3/_5$ significa prendere la terza parte del quintuplo di a: divider

a per $^7/_{10}$ è uu prender la settima parte del decuplo di *a*, ec, cc.

359. E quì si noti che se per uso diciamo di *dividere* una quantità o per $^4/_5$, o per $^3/_5$ o per $^2/_5$ quando dopo averla moltiplicata per 5 la dividiamo o per 4, o per 3, o per 2, per analogia diciamo pure di dividere per $^1/_5$, quando dopo aver moltiplicato per 5 dividiamo per 1, ossia lasciamo intatto il prodotto, quando cioè non facciamo, che una semplice moltiplicazione, il che accade tutte le volte che il rotto in vece d' essere numero è unitá frazionaria. Ora se è incsatto il comprendere sotto l' unico nome di *divisione* il complesso d' una moltiplicazione, e divisione, è poi inesattissimo l' usar lo stesso nome di divisione anche nel caso in cui dal complesso delle due operazioni la divisione sparisce, perchè operata per l' unità, che a rigor non divide, nel caso in somma, in cui non si esegue, che una pura moltiplicazione. Tuttavia pel comodo di classificar senza confusione le operazioni relative alle frazioni, e chiamar collo stesso nome quelle, cui convien ricorrere pella soluzione de' problemi di una simile indole anche in tal caso il nome di divisione si addotta, di modo che *dividere per un' unità frazionaria* non indica, *che una semplice moltiplicazione d' una quantità pel denominatore dell' unità frazionaria*.

360. Quindi concliudiamo, che (sia qualunque dei 2 più volte indicati il motivo, pel quale possiamo aver ricorso alla divisione nel 3.°, e 4.° caso) *si ottiene il quoto d' una divisione per frazione moltiplicando il dividendo pel denominatore della frazione, e dividendolo pel numeratore*.

361. Dal 3.° caso di divisione si ha

$$a : \frac{c}{m} = \frac{am}{c} \text{ ; e d' altronde } a \times \frac{m}{c} = \frac{am}{c} \text{ (330).}$$

Dal 4.° caso di divisione si ha

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{m} = \frac{am}{bc} \text{; e d' altronde } \frac{a}{b} \times \frac{m}{c} = \frac{am}{bc} \text{ (334).}$$

Dunque la divisione di a, o di $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{m}$, ossia la divisione d' una quantità qualunque intera, o frazionaria per una frazione si eseguisce ancora moltiplicaudo il dividendo pel rotto divisor rovesciato.

$$\text{Così } ar^2 : \frac{ar}{c^2-g^2+r} = ar^2 \times \frac{c^2-g^2+r}{ar}$$

$$= c^2r-g^2r+r^2$$

$$\text{Così } \frac{m^2+n^2}{c+d} : \frac{m-n}{c-d} = \frac{m^2+n^2}{c+d} \times \frac{c-d}{m-n} =$$

$$\frac{cm^2+cn^2-dm^2-dn^2}{cm+dm-cn-dn}$$

362. E' pur conseguenza dell' or indicato processo, che quando il divisore è realmente una vera frazione, il quoto è maggiore del dividendo. Infatti se il denominatore che moltiplica il dividendo fosse eguale al numeratore che in pari tempo il divide, onde risulti il quoto (360), questo sarebbe eguale al dividendo stesso: ma poichè trattandosi di frazioni vere, il denominatore che moltiplica il dividendo è maggiore del numeratore che lo divide, così il quoto che risulta da questa duplice operazione debbe esser sempre maggiore del

dividendo. Nè ciò è in opposizione colle idee, che ci siamo formati della divisione a tenor delle quali il dividendo non può mai esser superato dal quoto, quando si rifletta che nella *divisione per frazioni*, vero dividendo non è la quantità che comunemente è chiamata per tale, ma il prodotto di essa pel denominatore del rotto divisore. Ed infatti quando trattasi di trovare il *valor* delle parti abbiam già veduto, che dividere una quantità per una frazione significa dividerla pel numeratore dopo di averla moltiplicata pel denominatore, ed il quoto non trovasi mai maggiore di questo prodotto, che è il vero dividendo (358). Quando poi trattasi di trovare il *numero* delle parti, di osservar cioè realmente quante volte la data frazione è contenuta nel dato dividendo, come p. e. $^3/_8$ in 6, in tal caso il quoto è $^{48}/_3 = 16$ (356); e se il quoto 16 sembra maggiore del dividendo, che in apparenza è 6, convien riflettere, che rigorosamente non 6, ma 6 moltiplicato per 8, ossia 48, è il dividendo, poichè se in questo caso dividere è un osservar quante volte una quantità è contenuta in un'altra, dividere in questo senso non è che misurare (3); e quindi la quantità misurata, ossia il dividendo esser debbe a rigore espressa, in parti della stessa natura di quelle, che esprimono la misura, cioè il divisore, e perciò se nell'esempio il divisore è $^3/_8$, a rigore non sotto aspetto di 6 unità ma sotto l'equivalente aspetto di 48 ottavi dee pur riguardarsi il dividendo, il quale così concepito non è mai superato dal quoto.

Che se dividendo, e divisore non sono espressi da unità della medesima specie, allor non ripugna alle stesse idee della divisione, che il quoto sia sempre mag-

giore del dividendo, quando il divisore è una vera frazione. Si osserva anzi che il quoto è tanto più grande del dividendo quanto è più piccolo il rotto divisore; ed infatti se l'unità è contenuta nel dividendo per quanto indica il dividendo stesso (103), una vera frazione, che è minore dell'unità, vi debbe esser contenuta un numero di volte maggiore del dividendo, e tanto più quanto è più tenue. Così p. e. se nel 6 l'unità è contenuta 6 volte, una quantità minor di essa, come $^3/_{10}$ vi debbe esser contenuta più di 6 volte, e molto più $^3/_{100}$ e più $^3/_{1000}$, ec: troviamo infatti $6 : {}^3/_{10} = 20$; $6 : {}^3/_{100} = 200$; $6 : {}^3/_{1000} = 2000$, ec. Così $1 : 1 = 1$; $1 : {}^1/_{10} = 10$; $1 : {}^1/_{100} = 100$; $1 : {}^1/_{1000} = 1000$, ec; cosicchè indefinitamente il quoto diventa tanto più grande quanto più il rotto divisore impiccolisce. Finchè però questo è qualche cosa, sia pur piccolissima, sarà contenuto nel dividendo un numero grandissimo di volte, ma tale da poter dar luogo ad un quoto maggiore quando si sarà attenuato ancora di più, ed allor solo il quoto diverrebbe una quantità maggiore di ogni assegnabile, cioè *infinita*, quando il divisore non fosse suscettibile di ulteriore impiccolimento, il che potrebbe accadere solo allorquando in grazia del successivo suo decremento propriamente si trovasse nel punto della sua evanescenza. Su tal riflesso l'idea dell'*infinito* vien dai Matematici dedotta dal quoto d'una quantità qualunque divisa per un'altra quantità *infinitesima*, minore cioè di ogni assegnabile, ossia giunta a quel grado di decremento che la riduce a zero; e perciò il simbolo analitico dell'infinito, che suole esser espresso dalla cifra ∞, è $\frac{a}{0} = \infty$. Questo simbolo ci mostra,

che un quoto allora solo giunge ad essere infinito, quando per l'evanescenza d'uno degli elementi necessarii alla sua esistenza esso cessa di essere. Dunque il quoto finchè è, non può esser infinito: dunque l'infinito non è una quantità reale, ma è un'*idea negativa*, ed il simbolo, che lo esprime, non può essere più filosoficamente ideato, poichè nella stessa espressione degli elementi, da cui l'idea dell'infinito risulta ci addita, che l'infinito si ha quando è zero il divisore, ossia quando più non esiste un elemento, la cui esistenza è necessaria alla sua costituzione.

Con queste semplici, ed esatte idee intorno all'infinito, che sono facilmente applicabili anche all'*infinitesimo*, e che ci vengono suggerite dallo stesso suo simbolo, noi eviteremo ogni difficoltà intorno alle tante quistioni risguardanti la metafisica del calcolo, che si sono agitate per rapporto agli infiniti, ed infinitesimi multipli gli uni degli altri, o elevati alla 2^a, 3ª potenza, ec, ec. che l'analisi sublime ci offre, poichè rammentando, che gli infiniti, e gli infinitesimi non sono quantità *realmente* in atto esistenti, ben intenderemo che si può ai loro simboli applicare il segno della moltiplicazione, elevazione a potenza, ec., ma non già alle quantità da esso rappresentate, che per non essere reali non sono suscettibili di alcuna applicazione. Quindi gli infiniti, ed infinitesimi di 2.°, 3.° ordine, ec. sono simboli cui nulla di real corrisponde, e se calcolando sovra di essi pur avviene, che a giustissimi risultati si giunga, ciò dipende da una proprietà essenziale dell'algebra, che in grazia della estrema astrattissima generalità delle sue regole procede *infallibilmente* da deduzione in deduzione, sia che ad alcuni de' suoi segni o qualche cosa o nulla di real corrisponda.

363. Se si hanno a dividere tra loro numeri misti di interi, e frazioni, riducendo questi numeri misti ad essere espressi da una sola frazione convertiamo questo quinto nel quarto caso della divisione cioè di frazione per frazione.

Così $4 : (3+{}^3/_4) = 4 : {}^{15}/_4 = {}^{16}/_{15} = 1+{}^1/_{15}$

Così $(2+{}^3/_5) : (1+{}^5/_8) = {}^{13}/_5 : {}^{13}/_8 = {}^8/_5 = 1+{}^3/_5$

Così $$\frac{a}{2-{}^2/_3-{}^3/_5} = \frac{a}{2-{}^{10}/_{15}-{}^9/_{15}} = \frac{a}{{}^{11}/_{15}} = \frac{15a}{11}$$

Così $$\frac{m}{{}^n/_2+{}^c/_3-{}^a/_4} = \frac{m}{\frac{6n+4c-3a}{12}} \text{ (a) } = \frac{12m}{6n+4c-3a}$$

Così $$\frac{{}^m/_n+{}^c/_r}{{}^a/_c-{}^a/_r} = \frac{mr+cn}{nr} : \frac{ar-ac}{cr} = \frac{(mr+cn)\,c}{(r-c)\,an}$$

Così $$\frac{\frac{(a+c)\ (a-c)\ (a+c)}{a^2}-a-c}{-\frac{c^2}{a}} - \frac{c}{a} = 1$$

364. E per ajuto della memoria dopo l' esposizione di tutti e 5 i casi della divisione possiamo per tutti stabilire questa regola unica cioè, *che dato l' aspetto fra-*

(a) Per non cader in equivoci si abbia sempre presente la convenzione, che la linea orizzontale situata nella riga al pari del segno d' eguaglianza è quella, che separa il dividendo dal divisore, facendoci nel nostro caso conoscere che il dividendo è intero, e frazionario il divisore.

zionario a quel termine della divisione, che fosse intero; e rovesciato il divisore, essa si eseguisce moltiplicando i numeratori, e i denominatori tra loro. (355, 360).

365. Quindi se il processo della divisione non consiste che in una moltiplicazione dopo rovesciato il divisore, tutti i metodi di abbreviazione notati nella moltiplicazione è chiaro, che sono applicabili alla divisione come il dimostrano i seguenti esempii, da ciascun de' quali è ben facile il dedurre la rispettiva regola prattica, come per norma l' abbiamo noi tratta da un solo de' più interessanti, che è il primo del 4.° caso, lasciato avendo gli altri tutti all' esercizio degli studiosi.

1°. *Caso* di divisione. Non ammette alcun metodo compendioso.

2.° *Caso* $6/7 : 3 = 6/7 \times 1/3 = 2/7$ (337)
$4/15 : 4 = 4/15 \times 1/4 = 1/15$ (337)
$8/9 : 16 = 8/9 \times 1/16 = 1/18$ (337)

3.° *Caso* $6 : 12/17 = 6 \times 17/12 = 17/2$ (333. 1.°)
$9 : 9/10 = 9 \times 10/9 = 10$ (333. 2.°)
$12 : 3/4 = 12 \times 4/3 = 16$ (333. 3.°)
$8 : 12/13 = 8 \times 13/12 = 26/3$ (333. 4.°)

4.° *Caso* $2/5 : 3/5 = 2/5 \times 5/3 = 2/3$ (337). Dunque *quando le frazioni hanno lo stesso nome basta dividere un per l' altro i numeratori*.
$8/9 : 4/7 = 8/9 \times 7/4 = 14/9$ (337)
$5/12 : 3/8 = 5/12 \times 8/3 = 10/9$ (337).

Applicazione della divisione ai Problemi, in cui cercasi il numero delle parti, o una quantità che ne dipende.

366. *Quanta carta può comprarsi con $4/5$ di Lira, posto che vaglia Lire 8 la risma?* — Risultato : $1/10$ di risma. Infatti quante volte 8, o qualche sua

parte entra in $^4/_5$ di lira, e tante risme, o parti di risma si avranno; e perciò $^4/_5 : 8 = {}^1/_{10}$.

367. *Il valor d' una libra di China è $^2/_3$ di scudo: Quante libre si avranno con scudi* 8? — Risultato: lire 12, che nasce da $8 : {}^2/_3$.

368. *Il valor d' una coppa di grano è $^3/_4$ di scudo: quanto grano può aversi con mezzo scudo?* — Risultato: $^2/_3$ di coppa, poichè $^1/_2 : {}^3/_4 = {}^2/_3$.

369. *Il valor d' una libra è scudi* 5 $^3/_4$. *Quante libre si avranno con scudi* 36 $^9/_{10}$? Risultato: libre $6+{}^{48}/_{115}$.

Infatti $(36+{}^9/_{10}) : (5+{}^3/_4) = {}^{369}/_{10} : {}^{23}/_4 = 6+{}^{48}/_{115}$.

370. *Da $^2/_5$ di rubbio di seme si è ottenuto un Rubbio di frutto: quanto frutto hanno dato $^5/_6$ di rubbio?* — Risultato: $2+{}^1/_{12}$:

Poichè si han tante rubbia di frutto quante volte $^2/_5$ son contenuti in $^5/_6$, onde il frutto è $^5/_6 : {}^2/_5 = 2+{}^1/_{12}$.

371. *Lire 5 han prodotto una lira di guadagno: che guadagno avrà dato $^3/_4$ di Lira?* Risultato: $^3/_{20}$ di lira, poichè $^3/_4 : 5 = {}^3/_{20}$.

372. *Scudi 20 $^2/_3$ han dato di frutto scudi 1: scudi 45 $^3/_4$ che frutto daranno?* Risultato: scudi 2 $^{53}/_{248}$ poichè $(45+{}^3/_4) : (20+{}^2/_3) = 2+{}^{53}/_{248}$.

373. *Sapendosi che una Lira italiana è $^{23}/_{125}$ di scudo Romano, e una Lira austriaca, è $^{2001}/_{12500}$ dello scudo stesso, si cerca a quanto una Lira austriaca equivalga di Lira Italica.* — Risultato: Equivale ad $^{87}/_{100}$.

Ed in vero quante volte $^{23}/_{125}$ di scudo valor della lira italica è contenuto in $^{2001}/_{12500}$ di scudo valor dell' austriaca, e tante lire, o parti di lira italica equi-

varranno all' austriaca. Perciò il valor della lira austriaca espresso in lira italica è $^{2001}/_{12500}$: $^{23}/_{125}$ = $^{87}/_{100}$.

374. *Quante lire italiche chieggonsi per formare scudi* 172 $^{1}/_{2}$? Risultato: lire 937 $^{1}/_{2}$, che si ottiene osservando quante volte $^{23}/_{125}$ di scudo valor d' una lira è contenuto in 172 $^{1}/_{2}$.

Applicazione della divisione ai Problemi, in cui cercasi il valor delle parti.

375. *Con* $^{3}/_{4}$ *di Lira si son comprati* 15 *limoni: quanto costano l' uno?* — Risultato: $^{1}/_{20}$ di lira; poichè $^{3}/_{4}$: 15 = $^{1}/_{20}$.

376. *Con* 3 *scudi si ha* $^{5}/_{8}$ *di libra. Quanto vale la libra?* — Risultato $4+^{4}/_{5}$; poichè il valor d' una libra (358) è 3 : $^{5}/_{8}$ = $4+^{4}/_{5}$.

377. *Con scudi* 306 $^{2}/_{3}$ *si son comprate libre* 122 $^{2}/_{3}$ *Quanto costa una libra?* — Risultato: scudi 2 $^{1}/_{2}$. Poichè $(306+^{2}/_{3})$: $(122+^{2}/_{3})$ = $^{920}/_{3}$: $^{368}/_{3}$ = $2+^{1}/_{2}$.

378. *Si dee ripartire in* 6 *Figlj* $^{3}/_{5}$ *di un patrimonio. Quanto tocca a ciascuno?* — Risultato: $^{1}/_{10}$. Poichè $^{3}/_{5}$: 6 = $^{1}/_{10}$.

379. *Chi vende l' uova a minor prezzo, Fulvia che ne dà* 3 *per* 2 *soldi, o Clelia che le spaccia a un soldo e mezzo il pajo?* — Risultato; Fulvia le vende $^{1}/_{12}$ di soldo meno di Clelia.

Infatti il valor d' un' uovo presso Fulvia è $^{2}/_{3}$; presso Clelia è $(1+^{1}/_{2})$: 2 = $^{3}/_{4}$; e $^{3}/_{4}$ si vede superar $^{2}/_{3}$ di $^{1}/_{12}$ riducendo i due valori allo stesso denominatore.

EPILOGO

Operazioni che alterano il valore delle frazioni.

ADDIZIONE, E SOTTRAZIONE

I termini dell' addizione, e sottrazione sono I. o *frazioni dello stesso nome*: II. o *di nome diverso*: III. o *misti di interi e frazioni*. In ogni caso si agisce sui soli numeratori delle frazioni dopo averle ridotte allo stesso denominatore, se era diverso, (312, e seg.), come il dimostrano le applicazioni aritmetiche, e algebriche (314, e seg.).

MOLTIPLICAZIONE.

I. *Caso* fra i 4, che vi distinguiamo è di *frazione per intero*, e si esegue o moltiplicando il numeratore, o dividendo il denominator per l' intero (324, e seg.).

II. *Caso è di intero per frazione*, e dopo aver rilevato che moltiplicar per frazione significa moltiplicar pel numeratore dopo aver diviso pel denominatore, perchè a rigor non dassi moltiplicator frazionario (326, e seg.), dopo di aver osservato (328), che moltiplicar per un' unità frazionaria è un vero dividere, si nota che il risultato di questo secondo caso è lo stesso del primo (330, 331) è sempre maggiore della frazione, e minor dell' intero, che lo produce (332), e può ottenersi con metodi più compendiosi quando l' intero, e il denominator della frazione abbiano fattori comuni (333).

III. *Caso è di frazion per frazione;* e si esegue moltiplicando fra loro i rispettivi termini (334); e il prodotto è lo stesso, ancor che s' inverta l' ordine de' fattori (335): è minor di ciascun di essi (336); e può più compendiosamente ottenersi, quando vi son fattori comuni nei termini delle frazioni (337).

IV. *Caso è d' intero, e frazione per intero, e frazione*, e si esegue o riducendolo al terzo caso, o colle regole de' polinomii (338).

Tutti i 4 casi poi posson ridursi alla moltiplicazione di frazion per frazione, apponendo il denominatore 1 al fattore intero, se vi è (339).

Frazioni di frazioni. Esse non sono che moltiplicazioni indicate di più frazioni tra loro, che si riducono ad una sola coll' esecuzione della moltiplicazione dopo aver tolti i fattori comuni ai due termini della frazione prodotta (340, e seg.) .

Applicazioni della Moltiplicazione (342, e seg.)

DIVISIONE

Nella divisione dopo il rimarco, che quel termine di essa, che esprime il *numero* delle parti, sia o il divisore, o il quoto, non può essere a rigore una frazione (348), sono a notarsi i casi seguenti.

I. *Dividendo intero* II. *Dividendo frazione*	*Divisore intero*
III. *Dividendo intero* IV. *Dividendo frazione*	*Divisor frazione*

Il I. si esegue dando per denominatore al dividendo intero l' intero divisore (351): il II. moltiplicando pel divisor intero il denominator del dividendo (352 al 354): il III., e IV. col moltiplicare il dividendo pel denominatore, e dividerlo pel numeratore del divisore (356, e seg.); e qui notiamo, che il dividere per un unità frazionaria è un vero moltiplicare (359); che il risultato della division per frazione vera è sempre più grande del dividendo, e tanto più quanto più impiccolisce il divisore, d' onde la formola dell' indefinito (362).

Il V. caso di divisione d' intero, e frazione per intero e frazione riducesi al quarto (363); e tutti poi si eseguiscono colla moltiplicazione del dividendo pel rotto divisore rovesciato, dopo di aver convertito a frazione il termine intero, se mai vi fosse (364); e così alla divisione si applicano i metodi compendiosi delle moltiplicazioni (365).

Applicazioni della divisione ai problemi (366, e seg.).

ARTICOLO IV.
Frazioni decimali.

380. Fin qui si è ragionato sulle frazioni di qualunque specie, o denominatore, dette perciò *ordinarie*,

o comuni, e dall' esposto ben rilevato avrà ognuno quanto l' esecuzione delle 4 fondamentali operazioni aritmetiche riesca più incomoda su di esse, che sugli interi. Occupiamoci ora d' un particolar genere di frazioni, cioè delle così dette *decimali*, che sono suscettibili di un trattamento tanto più facile delle frazioni comuni, perchè al calcolo degli interi uniforme.

Origine e indole delle frazioni decimali.

381. Ella è base fondamentale dell' arabo sistema di numerazione, che le cifre acquistino un valore suddecuplo per ogni posto, che avanzano da sinistra verso destra (29). Or niun ci vieta di estendere questo principio senza limitazione, ed allora immaginando de' successivi posti anche a destra delle semplici unità, come la cifra, che si trova nel posto a destra delle centinaja indica unità dieci volte più piccole cioè decine, come la cifra che nel posto a destra delle decine indica unità dieci volte più piccole, cioè semplici unità, così quella, che è a destra delle semplici unità esprimer dee unità dieci volte più piccole delle unità semplici, ossia parti ciascuna delle quali è $^1/_{10}$. Quindi a destra dei decimi verranno unità frazionarie, ciascuna delle quali è 10 volte più piccola di $^1/_{10}$, è cioè $^1/_{10}$ di $^1/_{10} = {}^1/_{100}$ (341): quindi alla destra de' centesimi unità delle quali ognuna è 10 volte più piccola de' centesimi, è cioè $^1/_{10}$ di $^1/_{100} = {}^1/_{1000}$; quindi alla destra de' millesimi vi saranno parti 10 volte più piccole, cioè decimillesimi, indi centomillesimi, millionesimi, e così consecutivamente a nostro piacimento parti di 10 in 10 volte più piccole, e perciò attissime a misurar quantità della più estrema immaginabile piccolezza. Or que-

sti decimi, centesimi, millesimi, decimillesimi, ec., queste parti 10, 100, 1000 volte ec, più piccole dell' unità, e 10 volte più piccole le une delle altre, che nate sono dall' estendere oltre l' unità la convenzione stabilita dal sistema *decimale*, si chiaman perciò *frazioni decimali*; e tali sono *tutte le frazioni aventi un denominatore decadico*.

Modo di leggere le frazioni decimali che ci si offrono sotto forma di interi.

382. Dall' esposta analisi risulta, che se nella serie p. e. delle cifre 24785 alcune ve ne sieno, che debbano concepirsi a destra dell' unità, perchè esprimenti decimi, centesimi, ec., è indispensabile (affinchè chi legge non prenda quel numero per 24785 interi) che sia con un segno precisato il posto delle unità; e a tale oggetto si pone un punto, o una virgola alla lor destra. Così trovando scritto » 24,785 » la virgola ci precisa che 4 è nel posto delle unità, e ci separa le cifre esprimenti il numero intero 24 a sinistra dalle cifre decimali, che restano a destra, e che a tenor della stabilita analogia ci esprimono $^7/_{10} + {}^8/_{100} + {}^5/_{1000}$. Che se poi il numero intero manca, allora da uno zero trovasi coperto il posto delle unità, e la virgola, che lo segue serve a denotarci, che non collezioni di interi, ma di frazioni decimali esprimon le cifre, che son dopo di lei. Così 0,253 esprime *zero interi*, $^2/_{10} + {}^5/_{100} + {}^3/_{1000}$.

383. E poichè le frazioni decimali son composte di parti d' unità di 10 in 10 volte più piccole, ne segue che tutti i diversi ordini di unità frazionarie possono colla massima facilità convertirsi nelle unità frazio-

narie più piccole, che un dato numero contiene. Così

Ogni decimo è 10 *centesimi*:

Ogni decimo è 100 *millesimi*. Infatti ogni decimo essendo eguale a 10 volte un centesimo è uguale a 10 volte 10 millesimi (poichè un centesimo, e 10 millesimi equivalgono), e 10 volte 10 millesimi è lo stesso che 100 millesimi.

Ogni decimo è 1000 *decimillesimi*. Infatti ogni decimo essendo 100 millesimi, o 100 volte un millesimo, è 100 volte 10 decimillesimi (poichè un millesimo e 10 decimillesimi equivalgono); e 100 volte 10 decimillesimi val lo stesso, che 1000 decimillesimi.

Così *ogni centesimo* è 10 millesimi.

Ogni centesimo è 100 decimillesimi. Infatti essendo eguale a 10 volte un millesimo, è uguale a 10 volte 10 decimillesimi (poichè un millesimo, e 10 decimillesimi equivalgono) e 10 volte 10 decimillesimi è lo stesso, che 100 decimillesimi; ec, ec.

Ed in vero anche le unità frazionarie decimali di qualunque ordine sieno, siccome soggette come gli interi alla legge decadica, sono decine se si riferiscono al 1.° posto, son centinaja se al 2.°, migliaja se si riferiscono al 3.° posto a lor destra, ec. (30, 31, 32), ond' è che 7 *decimi* è lo stesso, che 70 *centesimi*, o 700 millesimi, o 7000 decimillesimi, ec. Così 3 centesimi è lo stesso che 30 millesimi, o 300 decimillesimi, ec. Quindi trattandosi di più frazioni decimali insieme unite, come p. e. 0, 253, quantità composta di $^2/_{10} + {}^5/_{100} + {}^3/_{1000}$, non solo può leggersi per 2 *decimi più* 5 *centesimi più* 3 *millesimi*; ma essendo 2 decimi eguali a 200 millesimi, e 5 centesimi eguale a 50 millesimi, può leggersi anche per *duecento cinquanta tre millesimi*, esprimendo cioè la somma delle di-

verse unità frazionarie dopo averle tutte ridotte alle più piccole. E questa riduzione, e somma non solo nel citato esempio, ma in tutti i casi simili, ci viene additata, senza che faccia d' uopo ottenerla, dall' assieme delle cifre, che troviamo dopo la virgola in grazia della regolare subordinazione de' successivi ordini di unità frazionarie simile a quella delle unità degli interi. Del che possiamo anche assicurarci, se dopo aver espresse le quantità decimali a modo di frazioni comuni, teniam dietro al processo con cui ne otteniamo la somma, come questi due esempii dimostrano: $0{,}487 = {}^4/_{10} + {}^8/_{100} + {}^7/_{1000} = {}^{487}/_{1000}$ (313); $0{,}0304 = {}^3/_{100} + {}^4/_{10000} = {}^{304}/_{10000}$.

384. Trattandosi poi di interi uniti a frazioni decimali è a notarsi, che p. e. 23,458 non solo può leggersi per 23 *interi*, 4 *decimi*, 5 *centesimi*, e 8 *millesimi*, non solo *per* 23 *interi*, *e* 458 *millesimi*, ma ancora per *ventitremila quattrocento cinquantotto millesimi*, esprimendo cioè tutto il numero per mezzo delle parti più piccole che esso contiene, e che nel nostro esempio sono millesimi, col ridurre a millesimi e i centesimi, e i decimi, e gli interi, e quindi farne la somma, riduzione, e somma, che anche in questo caso in grazia del lor decadico procedimento, ci viene espressa dall' assieme delle cifre tutte sì innanzi che dopo la virgola lette a guisa di numero intero, come se dalla virgola non fossero separate; Ed infatti $23{,}458 = 23 + {}^4/_{10} + {}^5/_{100} + {}^8/_{1000} = {}^{23458}/_{1000}$ (313).

385. In genere il più comune modo di leggere le quantità decimali consiste nell' esprimere per 1.° il numero intero, che precede la virgola: 2.° nel leggere tutte le cifre, che la seguono come componenti un numero intero, che indica il numeratore della frazione

decimale; e quindi 3.° nel pronunziar per denominatore l' unità da tanti zeri seguita quante ha cifre decimali a destra la virgola, poichè risultando dal sistema decadico, che i decimi che hanno un solo zero nel denominatore occupano il primo posto dopo la virgola, i centesimi che hanno 2 zeri nel denominatore occupano il 2.°, i millesimi che ne hanno 3 il terzo, ec., ne viene che le unità decimali dell' ultimo ordine, a cui riduciamo nell' espressione tutte le altre, hanno in ogni caso per denominatore 1 con tanti zeri quanti ne indica il posto che hanno dopo la virgola. Così 69,25 si legge 69 interi e 25 centesimi : 0,0034 si legge zero interi, e 34 decimillesimi ec.

Modo di scrivere sotto forma di interi le decimali, che ci si offrono sotto l' aspetto di frazioni comuni, e viceversa.

386. 1.° *Se le frazioni hanno nel denominatore un numero di zeri minore del numero delle cifre del numeratore, ossia se le frazioni sono spurie*, come è $^{3586}/_{100}$, in tal caso osserviamo che $^{3586}/_{100} = 35 + ^{86}/_{100} = 35 + ^{80}/_{100} + ^{6}/_{100} = 35 + ^{8}/_{10} + ^{6}/_{100}$; e perciò collocando il numerator di ciascuna frazione decimale di quest' ultima espressione nel nicchio che gli compete a tenor della progressione decadica, abbiamo finalmente 35,86 in vece della primitiva espressione $^{3586}/_{100}$; e questo intento ben si vede, che tosto si ottiene, *scrivendo prima il numeratore della data frazione, e poi tagliando colla virgola tante cifre a destra, quanti sono gli zeri del dato denominatore*.

387. 2.° *Se le frazioni hanno nel denominatore un numero di zeri eguale alle cifre del numeratore*, come è $^{289}/_{1000}$ in tal caso osserviamo che $^{289}/_{1000} =$

$^{200}/_{1000} + {}^{80}/_{1000} + {}^{9}/_{1000} = {}^{2}/_{10} + {}^{8}/_{100} + {}^{9}/_{1000}$; e quindi collocando il numeratore di ciascuna frazione nel rango che gli compete nella distribuzione decadica, e ponendo dietro ad essi una virgola, e uno zero nel posto degli interi che mancano, otteniamo 0,289 in vece dell' espression primitiva $^{289}/_{1000}$; e ben si scorge, che tal risultato si ottiene subito *scrivendo il solo numeratore della data frazione, e tagliando con una virgola tante cifre a destra quanti sono gli zeri del denominatore, e uno zero ponendo nel posto delle unità intere, che rimane vacante.*

388. 3.° *Se le frazioni hanno nel denominatore un numero di zeri maggiore del numero delle cifre del numeratore*, come è $^{42}/_{10000}$, in tal caso rileviamo che $^{42}/_{10000} = {}^{40}/_{10000} + {}^{2}/_{10000} = {}^{4}/_{1000} + {}^{2}/_{10000}$, e quindi situando il numerator di ciascuna frazione nel rango che a tenor della decadica distribuzion gli compete, veggiamo vacanti i due primi posti dopo l' unità, cioè il rango de' decimi, e centesimi, che perciò convien coprire con zeri del pari che il vacante posto dell' unità intere, ed otteniamo 0,0042 in vece dell' espression primitiva $^{42}/_{10000}$, intento che si ha immediatamente, *scrivendo il solo numeratore* 42, e *dietro ad esso tanti zeri, quanti ne occorre perchè la virgola lasciandone uno a sinistra, tagli a destra tante cifre, quanti son gli zeri del denominatore.*

389. E in una accogliendo le regole stabilite per tutti e tre i casi esaminati conchiuder possiamo che » Per iscrivere sotto forma di interi una frazion decimale, che ci si presenta come frazione ordinaria va segnato il di lei solo numeratore, ponendo la virgola in modo (coll' ajuto de' zeri a sinistra delle cifre significative, se fa d' uopo) che tagli in esso tante cifre a de-

stra quanti sono gli zeri del denominatore; lasciando a sinistra uno zero nel caso che manchino interi, onde chi legge dal numero delle cifre dopo la virgola tragga notizia del numero de' zeri, che costituiscono il denominatore decadico, che nella *scrittura decimale* è *precisato* ma non *espresso*.

Chiaramente poi da questa regola segue che per ridonare a un decimale la forma de' rotti comuni convien assumere a numeratore il numerator decimale, trascurando gli zeri, che avesse a sinistra, e apponendovi a denominatore 1 con tanti zeri quante son cifre dopo la virgola. Così 0,32 riducesi a $^{32}/_{100}$, 0,003 a $^{3}/_{1000}$, ec.

Proprietà delle frazioni decimali.

390. L'indole già esaminata dei decimali ben ci appalesa che p. e. 3 = 3,0 = 3,00 ec, ossia che 3 è lo stesso che 30 decimi, o 300 centesimi, ec: e viceversa: che 2,45 = 2,450 =2,4500, ossia che 2 interi e 45 centesimi è lo stesso che 2, e 450 millesimi, o 2, e 4500 decimi lesimi ec; e viceversa: che 0,5 = 0,50 = 0,500, ec; ossia che 5 decimi è lo stesso di 50 centesimi, o di 500 millesimi, ec, e viceversa: e in genere se o alla destra de' *numeri interi*, il posto delle cui unità semplici sia reso immobile dalla virgola, o alla destra *dei decimali* si scrivano, o cancellino de' zeri, ciò null' altera l' intrinseco valore della quantità, poichè ogni cifra significativa rimane, e rimane nel proprio suo rango, da cui il suo valore dipende, e se avvien che coll' aggiunta, o sottrazione degli zeri cresca, o diminuisca il numeratore della frazione decimale, in egual modo cresce, o diminuisce anche il denominatore, che ne

deduciamo dal numero delle cifre dopo la virgola, e quindi identico resta il valor della frazione (275).

391. Dalla stessa indole de' decimali risulta pure che se aggiungasi, o tolgasi alla lor destra una, o più cifre significative, la frazion cresce, o scema, ma di una quantità sempre più tenue a misura che le ultime cifre aggiunte, o tolte son più lontane dalla virgola separatrice; poichè il lor valore va di dieci in dieci volte sempre più a impiccolirsi per ogni posto, che dalla virgola più si discosti.

392. E a questo proposito trascurar non dobbiamo una proprietà delle frazioni decimali assai rimarchevole. Osservando la seguente addizione

$$\text{Poste}\left\{\begin{array}{l}0{,}099999\\0{,}000001\end{array}\right.$$
$$\text{Somma}\ \ 0{,}100000$$

noi rileviamo che il numero 99999 milionesimi avendo bisogno di un milionesimo per esser eguale ad un decimo, che è la somma ottenuta, è di un decimo minore, e potendosi lo stesso ragionamento ripetere anche quando la serie delle cifre decimali progredisse all' infinito, così conchiuder possiamo, che una serie finale sia pur quanto vogliasi lunga di cifre decimali (e sien pur esse del massimo valore assoluto, sien cioè tanti 9) esprime sempre una quantitá, che è più piccola di una sola delle unità del posto, che la precede a sinistra, o ciò che è lo stesso una sola unità di qualsiasi posto in grazia dell' ordine decadico supera in valore tutto il rimanente del numero che sta alla sua destra; ond' è che di due decimali quella è più grande, che ha maggiore la cifra più vicina alla virgola, sebben

tutte le altre sieno più piccole. Così veggiamo che 0,4530000 > 0,4529999 ....

393. E da questa osservazione deduciamo che un rotto decimale può semplicizzarsi di molto se si ommettono le ultime sue cifre un poco lontane dalla virgola, senza che la differenza giunga ad eguagliare un' unità decimale dell' ultimo posto rimasto.

Così se in prattica fossero trascurabili p. e. le frazioni più piccole del millesimo, come appunto rapporto alla misura de' terreni accade rispetto al metro: posto che si avesse la frazion decimale *Metri* 0,23419986, essendo noi certi, che tutta la serie finale 0.00019986 è minore di 0,001, poichè minore di 0,001 sarebbe anche la serie finale 0,0009999 maggiore della or espressa (392), noi possiamo trascurarla, scrivendo semplicemente 0,234, giacchè certi siamo, che questa frazione sebben tanto più semplice non giunge ad esser per un millesimo minore della frazione anteriore.

394. E a sempre più attenuare la piccola inesattezza, che commettiamo coll' ommissione delle ultime cifre decimali, giova accrescere di un' unità l' ultima cifra decimale rimasta, quando la prima delle cifre trascurate sia non minore di 5; mentre con tal ripiego la differenza fra la decimale *accorciata* e la *vera* non solo non giunge ad eguagliare una intera, ma nemmeno una mezz' unità dell' ultimo posto decimale rimasto. Ed infatti se 10 unità valgono un' unità sola del posto contiguo a sinistra, 5 unità ne valgono mezza, e perciò o la prima cifra della serie trascurata è minore di 5 e allor tutto il resto della serie finale fosse pur senza fine, essendo minore di un' unità del posto che la precede (392), non vale ad accrescer di 1, la prima cifra stessa, della serie trascurata che per ipotesi

non è maggiore di 4, e perciò non vale a far sì, che tutta la quantità trascurata sia eguale a 5 unità del primo tra i posti che si trascurano, ossia a mezz' unità dell' ultimo rango decimale rimasto: o la prima cifra della serie trascurata è non minore di 5; e in tal caso essendosi trascurata, come è chiaro una quantità minor d' una intera, ma maggiore d' una mezza unità del posto contiguo a sinistra, ossia dell' ultimo rango decimale rimasto, coll' aggiungere alla cifra, che è in questo posto un' intera unità, commettiamo un errore in più meno apprezzabile dell' errore in meno, che commetteremmo col non aggiungerla, perchè ciò che or sopravvanza è minore di mezz' unità, è cioè minore di ciò che allor mancherebbe al vero valore. Così trascurando le ultime 4 cifre nella frazione metri 0,1328246, siam certi che la decimale rimasta 0,132 non differisce dal vero valor di un millesimo, ma se vogliamo che la differenza non giunga a mezzo millesimo, aggiungeremo un' unità all' ultima cifra scrivendo in vece 0,133, e allora la differenza invece di essere in *meno* sarà in *più*, ma sarà però men sensibile, poichè la data frazione maggiore di 0,132, e minore di 0,133 differisce di meno dalla seconda che dalla prima espressione, perchè la cifra 8 prima della serie che si trascura non è minore di 5.

395. L' ommissione però delle ultime cifre di un numero decimale non sarebbe più lecita nel caso, che la frazione moltiplicar si dovesse per un numero alquanto grande, poichè una quantità trascurabile per se stessa non è più tale quando è ripetuta un gran numero di volte.

396. Se l' aggiungere o toglier zeri alla fine delle quantità contrassegnate dalla virgola decimale non altera affatto il loro valore: se questo è di ben poco

alterato allorchè si cancellano le ultime cifre, va poi a soffrire rimarchevole alterazione dallo *spostamento della virgola*, poichè con essa cambian di posto, e quindi valore tutte le cifre componenti il numero. Se la virgola si avanza verso destra entrano nella parte intera delle cifre decimali, e si aumenta perciò il valor totale del numero: se si avanza verso sinistra passano nella parte frazionaria delle cifre, che si trovavano nella parte intera, e quindi il total valore diminuisce. L'avanzamento della virgola verso destra di 1, 2, 3, ec. posti rende il numero *dieci*, *cento*, *mille* ec. volte più grande, perchè col far sì che ogni cifra sia retroceduta di uno, due, tre, ec. posti, concilia a ciascuna di esse un valore o dieci, o cento, o mille, ec. volte più grande (33). Produce l'opposto l'avanzamento della virgola verso sinistra. Così trasportando la virgola d'un posto a destra nel numero 23,45 noi avremo 234,5, ove veggiamo che il 5 centesimi è divenuto 5 decimi, i 4 decimi 4 unità, le 3 unità 3 decine, le 2 decine 2 centinaja, decupla in somma si è resa ogni parte, e qnindi decnplo tntto il numero: all'opposto trasportando la virgola d'un rango a sinistra avremo in vece 2,345, ove veggiamo che il 5 non esprime più centesimi, ma millesimi, il 4 non più decimi, ma centesimi, il 3 non più unità, ma decimi, il 2 non più decine ma unità, suddecupla in somma si è resa ogni parte, e quindi suddecuplo tntto il numero.

Questa proprietà delle frazioni decimali sì vere, che spurie ci offre il modo di moltiplicarle o dividerle per qualunque numero decadico col semplice rimuovimento della virgola verso destra o sinistra per tan-

ti posti, quanti sono gli zeri del numero decadico moltiplicatore.

Così 4,58 × 10 = 45,8; così 25,36 × 100 = 2536; così 1,724 × 10000 = 1,7240 × 10000 = 17240.

Così 248 : 100 = 248, : 100 = 2,48. Così 23,64 : 100 = 023,64 : 100 = 0,2364.

Così 2,6 : 1000 = 0002,6 : 1000 = 0,0026.

Così 0,032 : 1000 = 0000,032 : 1000 = 0,000032.

Delle operazioni, che alterano il valore delle frazioni decimali.

397. Come i processi delle operazioni, che hanno luogo sugli interi sono tutti appoggiati sulla istituzione decadica, a tenor della quale sono anche scritte le frazioni decimali, così è che anch' esse soggette sono allo stesso calcolo degli interi tanto più comodo di quello delle frazioni ordinarie.

Addizione, e Sottrazione

398. Quando le quantità decimali si sono disposte in modo, che come le unità, e le decine, così le virgole e le cifre decimali tutte si trovino ne' posti corrispondenti: e di più per rapporto alla sottrazione quando nel caso che i suoi termini non abbiano un numero eguale di cifre decimali, vi si riducano, aggiungnendo zeri a destra a quel termine, che ne ha meno, lo che non altera il suo valore (390), il rimanente del processo, e la dimostrazione sono gli stessi che dato abbiamo per rapporto agli interi, e sono sì facili le applicazioni, che il trattenerci in esse reputiam vano.

399. E solo utile crediamo avvertire, che se an-

che nelle frazioni ordinarie l' addizione, e sottrazione si eseguisce ne' soli numeratori come nelle decimali, vi è in queste in grazia della lor decadica subordinazione il vantaggio di non esiger calcolo alcuno per esser ridotte allo stesso denominatore, come pur troppo il richieggono le frazioni ordinarie onde poter essere addizionate, o sottratte.

MOLTIPLICAZIONE

400. Senza quì ripetere tutto ciò che intorno ai diversi casi di moltiplicazione abbiamo osservato nelle frazioni comuni basta che applichiamo la massima che qualunque caso di moltiplicazione può ridursi a quello di frazion per frazione, apponendo per denominator l' unità a quello de' fattori, che non è frazionario (339), come i seguenti esempii dimostrano.

I. *Frazione per intero*. $0{,}35 \times 4 = {}^{35}/_{100} \times {}^{4}/_{1} = {}^{35.4}/_{100} = {}^{140}/_{100} = 1{,}40$.

II. *Intero per frazione* $3 \times 0{,}421 = {}^{3}/_{1} \times {}^{421}/_{1000} = {}^{3.421}/_{1000} = {}^{1263}/_{1000} = 1{,}263$.

III. *Frazione per frazione* $0{,}13 \times 0{,}02 = {}^{13}/_{100} \times {}^{2}/_{100} = {}^{13.2}/_{100 \cdot 100} = {}^{26}/_{10000} = 0{,}0026$.

IV. *Interi e frazioni per interi e frazioni* $5{,}52 \times 23{,}03 = {}^{552}/_{100} \times {}^{2303}/_{100} = {}^{552.2303}/_{10000} = {}^{1271256}/_{10000} = 127{,}1256$.

E da questi esempii rileviamo poi evidentemente che se per l' esecuzione della moltiplicazione conviene nelle frazioni comuni, dopo ottenuto il prodotto de' numeratori, eseguire realmente la moltiplicazione dei denominatori tra loro, nelle decimali d' altronde questo 2.° prodotto si ottiene senza calcolo, poichè risultando sempre di un numero decadico moltiplicato per altro

numero decadico, o per l'unità, non è che l'unità seguita da tanti zeri quanti se ne trovano ne' denominatori, che il formano, e questi son tanti, quante son cifre dopo la virgola ne' loro numeratori, sicchè stabilir possiamo per tutti i casi della moltiplicazion decimale quest' unica regola prattica, che *si moltiplicano le quantità date senza badare a virgole, come se fossero interi, e nell' ottenuto prodotto si segna la virgola in modo che a destra di lei tante cifre rimangano, quante sono le cifre, che si trovano dopo la virgola in ambedue i fattori*, supplendo allorchè cifre a sufficienza non abbia il prodotto col mettere alla sua sinistra l'occorrente numero di zeri; e ben si avverta, che in tal caso gli zeri, che aggiungiamo siano posti alla *sinistra* del prodotto, poichè collocandoli a *destra*, verremmo a collocare le cifre significative del prodotto in que' primi posti decimali, che deggiono esser vacanti, spostandoli dai ranghi che ad essi competono, e rendendo così il prodotto o dieci, o cento, o ec volte maggiore di quello, che esser dovrebbe.

401. Applicazione ai Problemi I. *Quanti scudi formano* 324 *monete da 5 franchi l'una, essendo il lor valore scudi* 0,92? Risultato: scudi 298,08; che deriva da $0,92 \times 324$.

Che valore metrico hanno 9 *linee, sapendosi che una linea è Metri* 0,00225583? — Risultato: Metri 0,02030247.

402. II. *Nel peso d' una merce si diffalca la tara del* 15 *per* 100. *Quanto dee sottrarsi nel peso lordo di Libre* 2565? Risultato: Lire 384,75 che deriva da $2565 \times 0,15$, poichè il diffalco del 15 per 100

esige, che debbà prendersi 15 centesimi dell'intera somma.

Poichè l'aria contiene 0,21 *del suo volume d' ossigeno, quanto ossigeno esiste in* 456 *pollici cubici di aria?* — Risultato: poll. cub. 95,76.

Alla ragione del 5 *per cento, che frutto danno* 3648 *scudi?* — Risultato: scudi 182,40 che nascono da 3648×0,05.

403. III. *Supposta uniforme la dilatazione lineare dell' oro, che è di* 0,001466, *per tutti i cento gradi di temperatura dal ghiaccio in fusione all' acqua bollente, di quanto si sarà allungata una lamina d' oro disposta a cerchio della lunghezza di metri* 0,043 *passando dal massimo freddo d' inverno, che è stato* 5 *gradi sotto zero al massimo caldo di estate che è stato di gradi* 27? — Risultato Metri 0,000020803959, che deriva da 0,0014661× 0,33×0,043; poichè essendo metri 0,0014661 la dilatazione lineare di un metro d' oro per la elevazione di 100 gradi di temperatura, per la elevazione di soli 33 gradi centigradi la dilatazione che subisce un metro non può essere che soli 33 centesimi dell' anteriore, e quindi per 43 millesimi di metro la dilatazione debbe essere 43 millesimi dei 33 centesimi della osservata.

404. IV. *Sapendosi che la tesa è Metri* 1,9490363, *quanti metri formano tese* 21,5? Risultato: metri 41,90428045, che deriva da 1,9490363×21,5.

Quanto valgono Metri 34,48, posto che lire 5,51 *sia il valor del Metro?* — Risultato: lire 189,9848.

405. Coll' aggiungere de' zeri a quello de' due termini della divisione, che o non ha cifre decimali, o ne ha meno dell' altro in modo che il numero delle cifre decimali sia eguale nel dividendo, e divisore, veniamo a ridurre qualunque caso di divisione a quello di frazion per frazione del medesimo nome, caso che fra i metodi compendiosi di divisione vedemmo eseguirsi colla semplice divisione di numerator per numeratore (365). Così la divisione decimale vien ridotta a divisione di interi. Ed infatti il quoto di due numeri non dipende in conto alcuno dalla grandezza delle loro unità, purchè sia questa la stessa nell' uno, e nell' altro, come lo è sempre quando il dividendo, e divisore hanno un egual numero di cifre dopo la virgola, essendo ben chiaro, che 5 sta 4 volte in 20 egualmente, o le parti espresse dal 5, e dal 20 sieno unità, o sien decimi, o centesimi, ec. *Di qui la regola prattica per qualunque caso di division decimale di render eguale, se non lo è, il numero delle cifre dopo la virgola in ambi i termini della divisione coll' aggiungere zeri, e poi dividere senza badare a virgole, come se fossero interi, mentre il quoto, che risulta è senza alcuna modificazione il quoto richiesto, come le seguenti applicazioni ai 4 distinti casi di divisione il dimostrano.*

406. I. *Frazione per intero. Scudi 24 hanno dato scudi 1 di frutto: che frutto daranno 0,96?* — Risultato $^1/_{25}$ di scudo; poichè 0,96.24 = 0,96:24,00 = $^{96}/_{100}$: $^{2400}/_{100}$ = $^{96}/_{2400}$ = $^1/_{25}$ (§ 294). Si noti però ora per sempre, che quando il divisore termina con de' zeri, giova toglierli nella esecuzione della divisione,

tenendone poi conto nel quoto col tagliarvi a destra tante cifre quanti zeri sono stati tolti al divisore affine di impiccolirlo di tanto, di quanto l' avevamo ingrandito coll' impiccolimento del divisore. Così sapendo di dover dividere 96 per 2400, dividiamo 96 per 24, e facendo sì che nel quoto 4, che si ottiene, la virgola tagli due cifre a destra, avremo 0,04 che è appunto $^1/_{25}$ se riducesi ai menomi termini.

407. II. *Intero per frazione. Quante libre potranno comprarsi con scudi 4, essendo scudi* 0,25 *il valor d' una libra?* — Risultato: libre 16, poichè 4:0,25 = 4,00:0,25 = 400:25 = 16.

408. III. *Frazion per frazione. Metri* 0,035 *di filo d' oro hanno importato lire* 0,07. *Quanto costa il metro?* — Risultato: lire 2. Infatti 0,07 : 0,035 = 0,070 : 0,035 = $^{70}/_{35}$ = 2.

Quanta Vainiglia potrà comprarsi con scudi 0,344, *posto che un' oncia importi scudi* 0,8? — Risultato: Oncie 0,43. Infatti 0,344:0,8 = 0,344:0,800 = 344:800 = 0,43.

409. IV. *Interi e frazioni per interi, e frazioni. Quante lire italiane si esigono per formare scudi* 122,25? — Risultato: lire 664 + $^{37}/_{92}$. Infatti essendo una lira eguale a scudi 0,184, avremo 122,25:0,184 = 122,250:0,184 = 122250:184 = 664 + $^{37}/_{92}$

Quanti luigi del valore di scudi 4,35 *si esigono per formare scudi* 609? — Risultato: Luigi 140. Infatti 609:4,35 = 60900:435 = 140.

Quanto importa una libra di seta, essendosene aute libre 2,75 *per scudi* 9,075? — Risultato: scudi 3,3. Infatti 9,075:2,75 = 9075:2750 = 3,3.

410. Un occhiata che diasi agli ottenuti risultati basta poi per farci accorgere, che mentre abbiam fatto

ricorso alle frazioni decimali per evitare il calcolo più incomodo delle frazioni ordinarie, queste tornano a comparirci di nuovo nel quoto di alcune decimali divisioni; perciò, onde far sì, che tale inconveniente sparisca, convien trovare il modo di ridurre a decimali le frazioni comuni, e appunto di questo oggetto or passiamo ad occuparci.

Trasformazione delle frazioni comuni in decimali.

411. Nella esecuzione delle esposte operazioni abbiamo verificato col fatto, che a riserva di alcune lievi avvertenze sul collocamento della virgola, e addizione di qualche zero, le frazioni decimali esigono lo stesso identico calcolo degli interi tanto più semplice di quello, che per le frazioni ordinarie richiedesi. Per tale oggetto l' uso delle frazioni decimali è preferibile a quello delle frazioni ordinarie, e perciò spesso giova trasformar queste in quelle.

Il metodo per la conversione, o valutazione delle frazioni ordinarie in decimali è già da noi conosciuto, poichè non è che la *riduzione delle frazioni ad un determinato denominatore* (309) applicata al caso in cui il denominator sia decadico; ma un processo più semplice ci suggerisce il riflesso, che le frazioni non sono che indicazioni di divisioni, e che le quantità intere col ricevere a destra qual si voglia numero di zeri senza alterarsi di valore, si convertono in decimali sempre più piccole.

Così volendo trasformar in decimale la frazione $^3/_8$, partendo dal riflesso che $^3/_8$ non è che 3 diviso per 8, per prender l' ottava parte di 3 cominciamo a divider, come qui a lato, 3 per 8:

Dividendo	3	8
Decimi	30	0,375
Centesimi	60	
Millesimi	40	
	00	

ma poichè 8 in 3 non istà mai, segniamo al quoto uno zero, e quindi una virgola per contrassegnare che lo zero notato indica la mancanza delle unità. Ponendo uno zero accauto al dividendo 3, abbiam così convertito le 3 unità in 30 *decimi*, quantità eguale a 3, poichè mentre si è reso decuplo il numero, si è reso suddecuplo il valor delle parti; ed or veggiamo, che l'ottava parte di 30 decimi è 3 decimi, che segniamo al quoto a destra della virgola nel posto appunto dei decimi, poichè 8 in 30 è contenuto 3 volte. V'è però un'avanzo di 6 decimi, e per prendere l'ottava parte di questo residuo ancora, vi segniamo a destra un'altro zero, con che convertiamo i 6 decimi in 60 *centesimi*, e veggendo che 8 in 60 è contenuto 7 volte, deduciamo, che l'ottava parte di 60 centesimi è 7 centesimi, che segniamo al quoto, ponendo il 7 a destra del 3 nel posto appunto de' centesimi. Finalmente essendovi un'avanzo di 4 centesimi, per prendere anche di questo residuo l'ottava parte, col porgli a destra uno zero, lo convertiamo in 40 millesimi, e poichè 8 in 40 sta 5 volte esattamente, conchiudiamo che l'ottava parte di quest'ultimo residuo è millesimi 5, che notiamo segnando nel quoto la cifra 5 accanto al 7, e precisamente nel posto de' millesimi. Ed ecco ottenuta in decimali l'ottava parte di 3, ecco cioè convertita nella decimale 0,375 la frazione ordinaria $^3/_8$.

412. Sia ora a ridursi a decimale una frazione, la quale abbia nel denominatore un numero di cifre maggiore che nel numeratore p. e. $^2/_{25}$. Eccone l'esecuzione.

2	25
200	0,08

Poichè il 25 non è mai contenuto in 2 seguiamo zero al quoto, e quindi una virgola, onde precisare, che quello zero indica la mancanza degli interi. Coll' aggiungere al 2 uno zero, convertiamolo in 20 decimi; e poichè anche in 20 decimi il 25 non è mai contenuto, si segni uno zero dopo la virgola, cioè nel posto dei decimi per indicare, che la venticinquesima parte di 20 decimi, non può essere espressa nei decimi, perchè di un decimo minore. Coll'addizione d' un' altro zero il 20 decimi è convertito in 200 centesimi; e poichè 25 vi è contenuto 8 volte esattamente, conchiudiamo che la venticinquesima parte di 200 centesimi è 8 centesimi, che perciò si segna al quoto accanto al secondo zero, e precisamente nel posto de' centesimi, e finalmente, che $^2/_{25} = 0{,}08$.

413. Se la frazione a valutarsi in decimale sia *spuria mista*, sia cioè l' indicazione d'una divisione, il cui quoto risulta d' intero, e frazione (271): in tal caso non trattasi di esprimere in decimale che la parte veramente frazionaria del quoto, dopo di avervi separata la parte intera. Così essendo $^{338}/_8 = 42 + {^2/_8}$, qui non trattasi che di unire al 42 la frazione $^2/_8$ ridotta a decimale; e a tal oggetto, quando col processo della divisione qui a lato eseguita abbiamo ottenuto 42 al posto del quoto, e 2 per ultimo residuo, sicchè la divisione sugli interi è terminata, per giungere, o approssimarci il più possibile al quoto esatto, senza introdurre nell' espressione la frazione ordinaria $^2/_8$, ma invece parti tutte soggette alla decadica progressione, dopo di aver segnata una virgola accanto all' ultima cifra ottenuta al quoto onde marcare, che dessa è nel posto delle unità, potendo im-

	338	8
	18	42,25
Decimi	20	
Centesimi	40	
	00	

maginare quanti zeri ci piaccia alla destra del dividendo 338 (390), riguardiamo come non compiuto il processo della divisione, ed il proseguiamo coll' abbassare uno alla volta accanto al 2, e quindi agli altri successivi residui que' zeri, che intendiamo far parte del dividendo, segnando per ciascun di essi analoga cifra al quoto. Così segnando zero accanto all' ultimo residuo intero, che è il 2, abbiamo convertito il 2 in 20 decimi, nuovo dividendo parziale, che diviso per 8 ci dà per quoto 2 decimi (che perciò segniamo a destra della virgola, ove appunto è il posto dei decimi) e lascia 4 decimi di resto. Collo scrivere uno zero accanto a questo resto 4, ecco convertiti i 4 decimi in 40 centesimi, nuovo parzial dividendo, che diviso per 8 dà per quoto esatto 5 centesimi: segniamo perciò 5 al quoto nel posto dei centesimi, e veggendo che siamo giunti a zero di resto, conchiudiamo che $^{338}/_{8} = 42 + ^{2}/_{8} = 42{,}25$ espressione in cui è manifesto, che la frazione $^{2}/_{8} = 0{,}25$. Se questa operazione lasciato avesse un terzo residuo, col porvi accanto un' altro zero, si sarebbe convertito in millesimi, e nella stessa guisa si continuerebbe il processo, finchè si pervenisse o ad un quoto esatto, o a un resto composto di parti molto piccole da potersi trascurare senza errore sensibile.

414. Da tutto ciò rileviamo, che per convertire in decimale una frazione qualunque, *si comincia dal tentar la divisione del numeratore pel denominatore onde cavar gli interi se la frazione è spuria, o segnar zero nel posto assegnato agli interi, se la frazione è vera, e quindi segnata una virgola, si scrivono di seguito i successivi quoti parziali, che si ottengono dividendo per lo stesso divisore i successivi residui resi decupli col porvi a lato uno zero alla volta; ond'*

è che tante cifre decimali ha il quoto quanti gli zeri decimali che abbiamo uno alla volta aggiunto ai residui, siccome cifre al dividendo appartenenti.

415. V' è però il caso in cui per quanto la divisione oltre si spinga colla successiva aggiunta de' zeri, lasci sempre un residuo, sicchè non possa la data frazione esprimersi rigorosamente in decimale. Così avviene se prendiamo a svolgere in decimale p. e. $^2/_7$; ed è perciò utile avere un criterio, onde conoscere quali frazioni possano, e quali no ad esatta decimale ridursi; ed ecco le analitiche investigazioni, che a tal criterio ci recano.

Noi veggiamo, che una frazione ridotta ai menomi termini ad oggetto, che il suo denominatore non abbia fattori comuni col numeratore, si riduce ad esatta decimale quando nello sviluppo della divisione da essa indicata si giunge ad avere zero di resto; e ciò accade quando il denominatore divide esattamente il prodotto del numeratore moltiplicato per qualche numero decadico o *dieci*, o *cento*, o ec, ossia quando il denominatore è un fattore di questo prodotto, poichè risulta dalla idea della divisione, che il divisore è un fattore del dividendo. Or perchè fattore del citato prodotto sia il denominatore, fa d' uopo, che risoluto ne'suoi primi fattori alcun non ne abbia, che non si trovi nel prodotto, e quindi in qualcuno, se non in ambedue, de' suoi componenti, numeratore cioè, e numero decadico; poichè i fattori primi del prodotto non sono, che gli stessi fattori primi de' suoi componenti. Nel numeratore però non può rinvenirsi fattore alcuno comune al denominatore, perchè la frazione è ai menomi termini ridotta: dunque fa d' uopo, che tutti i fattori primi in cui risolvesi il denominatore si trovino nel

numero decadico: ma il numero decadico qualunque egli sia altro non è che il *dieci* moltiplicato di seguito per 10 quanto piaccia, e i fattori primi di 10, e quindi di qualsivoglia numero decadico non sono che 5, e 2: *dunque non in altri fattori che in 5, e 2 debbe risolversi il denominatore delle frazioni già ridotte ai menomi termini, perchè esse sieno riducibili in decimali.*

416. Perciò le frazioni ridotte ai menomi termini, aventi per denominatore 3,6,7,9,12,15, o qualsivoglia altro numero in cui esista qualche fattore primo diverso dal 2, e 5, ridursi non possono a decimali esatte, quando anche si protraessero all' infinito le divisioni.

417. D' altronde riducibili a decimali, e precisamente a decimi sono le frazioni tutte, che hanno per denominatore il 2, o il 5, poichè sono essi fattori del primo numero decadico $10 = 2 \cdot 5$; sicchè basta moltiplicar per 10 il lor numeratore, perchè quindi dividendo il prodotto pel denominatore 2, o 5 si abbia un quoto esatto esprimente il numeratore della frazione decimale equivalente alla data.

418. Riducibili non a decimi, ma a centesimi sono le frazioni aventi per denominatori 4, 20, 25, 50, poichè essendo $10 = 2 \cdot 5$, e $100 = 10 \times 10 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5$, è chiaro che son divisori di 100, e non di 10 que' soli numeri in cui soltanto il 2, e il 5 ritrovinsi come fattori primi, ma in modo che almen l' un di essi vi esista non meno, ed entrambi non più di due volte, cioè $2 \cdot 2 = 4$; $2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$; $5 \cdot 5 = 25$; $2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$.

419. Riducibili non a decimi, nè a centesimi ma a millesimi sono quelle frazioni, che hanno per denominatori 8, 40, 125, 200, 250, 500; poichè (per

essere 10 = 2·5,100 = 2·5·2·5, e 1000=10×10×10= 2·5·2·5·2·5) è chiaro che divisori di 1000, e non di 100, e di 10 son que' numeri soli, in cui il 2, e il 5 soltanto esiston come fattori primi in modo però che almen l' un di essi vi si ritrovi non meno, e l' uno o l' altro non più di tre volte, cioè 2·2·2=8 ; 2·2·2·5=40 ; 5·5·5 =125 ; 2·2·2·5·5=200 ; 2·5·5·5=250 ; 2·2·5·5·5=500. E in simil guisa procedesi per conoscere di quali denominatori debbono esser fornite le frazioni, ond' esser riducibili a decimillesimi, ec.

420. Se molte frazioni, come ben dall' esposto (416) apparisce, sono irriducibili ad esatta decimale, non per questo si stimi inutile il tentar su di esse questa trasformazione; poichè se non troviamo giammai una decimale esattamente eguale ad esse, possiamo trovar però frazioni decimali, che al loro valore si approssimino quanto più ci piaccia, sicchè sia affatto trascurabile la lor differenza.

E di questi valori approssimativi è tanto vero, che possiamo servirci, che uso in prattica ancor ne facciamo per comodità di calcolo anche per quelle frazioni, che potrebbero ridursi a decimale esatta trascurando la quantità espressa dalle ultime cifre decimali un poco distanti dalla virgola (393). Così quando ci basta di avere un risultato approssimato al vero a meno di un mezzo millesimo, sebben p. e. il vero valore della frazione $^{56}/_{3125}$ sia 0,01792, noi preferiamo per brevità il suo valor prossimo 0,018 sulla sicurezza che l' errore commesso in più è minore di un mezzo millesimo (394). Ed infatti la differenza fra 0,018, e $^{56}/_{3125}$ è 0,018—$^{56}/_{3125}$

$$= \frac{18}{1000} - \frac{56}{3125} = \frac{450-448}{25000} \ (\S\ 305) = \frac{1}{12500},$$

quantità ben minore di un mezzo millesimo.

Nè si creda, che lo stesso espediente preso sulle frazioni ridotte ad esatte decimali applicabile non sia alle frazioni, che non sono esattamente riducibili a motivo, che nelle prime è sempre ben limitato il numero delle cifre costituenti la serie finale, che si trascura, mentre in queste è estesissimo, anzi indefinito. L' apparato in apparenza imponente della serie indefinita di cifre, che convien trascurare non ci illuda, richiamando al pensiere, che questa sebben senza fine, è però sempre minore di un' unità dell' ultimo ordine, che la precede (392); che anzi minore di mezza unità suol rendersi la differenza tra la quantità segnata, ed il vero valore della frazione coll' avvertimento dato al § 394. Così sebbene troviamo che $^4/_7 = 0{,}57142857142857...$, pure il suo valore approssimato al vero a meno di un mezzo millesimo è dato dalla semplice espressione 0,571;

ed infatti $^4/_7 - 0{,}571 = \frac{3}{7000} = \frac{1}{2333^1/_3}$ (§.300), differenza ben minore di un mezzo millesimo.

421. Che se a rendere insensibile una tal differenza noi spingiamo molto innanzi la divisione, allora l' espressione approssimativa delle frazioni, che non possono rigorosamente valutarsi in decimali, ci offre un carattere, che ci dà il mezzo di continuare la serie indefinita delle cifre, che la costituiscono senza bisogno di continuare la divisione. Questo carattere è il periodico ritorno delle medesime cifre che ci contesta anch' esso l' impossibilità di ridurre le date frazioni a deci-

mali esatte per quanto si faccia indefinitamente progredir lo sviluppo del quoto decimale. Ed infatti se prendiamo p. e. a svolgere la frazione $^4/_7$ non riducibile ad esatta decimale, noi otteniamo $^4/_7 = 0{,}5714285714285$, come rilevasi dal processo qui lateralmente eseguito, ove scorgiamo, senza continuar più oltre la divisione dopo che si sono ottenute al quoto sei cifre, che lo sviluppo decimale della frazione continua colla ripetizione fatta quante volte piaccia delle sei cifre 571428 prese sempre col medesimo ordine. Or l' assieme delle cifre, che si va successivamente ripetendo nei quoti decimali chiamasi *periodo*, e *periodiche* le frazioni decimali, che ce lo manifestano.

```
*4 | 7
40 | 0,571428
 50
  10
   30
    20
     60
      *4
```

422. *Ogni frazione che non si converte in decimale esatta debbe convertirsi in decimale periodica.* Ed infatti essendo il resto sempre minor del divisore, in qualunque divisione potranno al più aversi tanti resti diversi, quanti sono i numeri compresi tra 1, e il numero divisore, questi essendo, e non altri tutti i *possibili* diversi residui. Perciò trattandosi d' una divisione, in cui non si giunge mai ad aver zero di resto, qual' è quella, che procede da una frazione non reducibile a decimale, è ben chiaro, che nel non mai interrotto succedersi de' residui in forza de' quali la divisione prosegue, dobbiam finalmente giungere a un punto (e se non prima, certamente quando son tutti esauriti i *possibili diversi* residui), in cui si abbia pel resto qualcuno dei resti antecedenti, e questa necessaria ricomparsa di un resto antecedentemente ottenuto, rende necessario nel quoto il ripetuto ritorno di alcune cifre sempre col medesimo ordine, rende cioè ne-

cessariamente *periodica* la frazione decimale, che vien per mezzo del quoto indicata.

Se dopo una serie di residui tutti diversi, primo a ricomparire sia il primitivo residuo, cioè lo stesso numeratore della data frazione, ricevendo esso a destra uno zero come a principio, ricostituisce un dividendo eguale al primo, ed ecco comparir per conseguenza nel quoto collo stesso ordine, cominciando dalla prima, tutte le cifre che si sono sino a questo punto ottenute, e le *frazioni periodiche*, che trovansi in questo stato, *in cui* cioè *il periodo comincia dalla prima cifra del quoto*, si chiaman *perfette*. Tale è $^4/_7$. Se poi primo a ricomparire sia il 2.°, o il 3.°, o il 4.° residuo, ec, in tal caso è chiaro, che il periodo delle cifre, che vanno collo stesso ordine a ripetersi indefinitamente comincia dalla seconda, terza, o quarta cifra, ec. del quoto, e le frazioni periodiche, che trovansi in questo caso, come p. e. $^{103}/_{330} = 0{,}31212.....$ in cui il periodo comincia dopo una; e $^{199}/_{396} = 0{,}502525.....$ in cui il periodo comincia dopo due cifre, siccome aventi qualcuna delle prime lor cifre fuor del periodo, e perciò immuni dalla successiva ripetizione, sono contraddistinte col nome di *miste*.

423. Il numero maggiore possibile delle divisioni, che possono occorrere prima che si ricada sovra un de' resti antecedenti, ossia prima che si giunga al periodico ritorno delle cifre, è precisato dallo stesso denominator della frazione o divisore, poichè possono al più aversi tanti resti diversi quanti sono i numeri interi al di sotto del divisore. Ma se il divisore può riguardarsi come limite al più remoto periodico ritorno delle cifre, può questo ritorno poi esser più o meno sollecito a tenor delle particolari condizioni de' numeri. Nelle fra-

zioni p. e. $^4/_7$, e $^5/_{19}$, il ritorno periodico delle cifre è il più remoto, poichè accade dopo l' esaurimento di tutti i possibili residui, cioè di 6 nel 1.°, e di 18 nel 2.° caso, spesso però si ha dopo poche cifre, e talvolta anche dopo una sola.

424. Il numero poi delle cifre esprimenti il periodo nelle frazioni periodiche perfette è uguale al numero delle divisioni eseguite prima della periodica tornata dei resti, e può risultare perciò di molte, di poche e ancor d' una cifra sola, se questo periodico ritorno accade dopo molte, o poche, o dopo una cifra sola. Così abbiamo un periodo di 3 cifre nella frazione $^{12}/_{37}$ $=$ 0,324324...., di 2 nella frazione $^6/_{11}$ $=$ 0,5454....., di una cifra sola nella frazione $^1/_9$. $=$ 0,111.....

425. Il numero delle cifre costituenti il periodo nelle frazioni periodiche miste è dato dal numero de' residui che passano da quello, che è stato il primo a comparire non più diverso da tutti gli altri, retrocedendo inclusivamente a quello che gli è uguale, come ci mostrano i seguenti processi sullo sviluppo della frazione $^{3209}/_{9900}$ $=$ 0,324141..., e della frazione $^5/_6$$=$0,833.

3209	9900	5	6
32090	0,3241...	50	0,8333..
23900		*20	
*41000		*20	
14000		20	
*4100			

ed è poi affatto indipendente dal più o meno remoto ritorno periodico, poichè può questo accadere dopo che si sono ottenute molte cifre al quoto, e risultare il periodo d' una cifra sola, come rileviamo nella frazione $^{1812}/_{90000}$ $=$ 0,020133... in cui dopo 4 cifre decimali comincia il periodo risultante dalla sola cifra 3.

426. *Applicazioni. Sapendosi, che pollici cubici 266,67 di aria hanno riceuto per l' elevazione di un sol grado di temperatura l' aumento di un pollice cubico, qual' è l' espressione di questo aumento in parti decimali per un qualunque volume d' aria, ossia qual' è, come dicono i Fisici, il coefficiente della dilatazione?* Il risultato è 0,00375.

Infatti se pol. cub. 266,67 hanno dato un sol pollice cubico d' aumento, è chiaro che un sol pollice cubico, e quindi un volume qualunque di aria subirà un' aumento proporzionato, cioè tanto più piccolo, quanto lo indica 266,67, e perciò espresso da $\frac{1}{266,67}=\frac{100}{26667}$ (§ 405) $=0,00375$ (§ 411). Dunque l'aumento uniforme che per ogni grado di temperatura subisce un volume qualunque di aria è 375 centomillesimi, ossia è di 375 volumi per ogni 100 mila.

427. *Qual' è il valor decimale esatto, o approssimato di tutte le frazioni dodicesimali quali appunto son le oncie riguardo alle libre, i pollici rispetto ai piedi ec?* Ecco i risultati, che si ottengono spingendo l' operazione sino alla 4.ª cifra per quelle, che non sono valutabili esattamente.

$^1/_{12} = 0,0833....$	$^5/_{12} = 0,4167$	$^9/_{12} = 0,75$
$^2/_{12} = 0,1667$	$^6/_{12} = 0,5$	$^{10}/_{12} = 0,8333....$
$^3/_{12} = 0,25$	$^7/_{12} = 0,5833..$	$^{11}/_{12} = 0,9167$
$^4/_{12} = 0,3333....$	$^8/_{12} = 0,6667$	$^{12}/_{12} = 1,0000$

Trasformazione delle frazioni decimali nelle comuni le più semplici.

428. Se la frazione decimale non è periodica, l'

ordinaria da cui è derivata ritrovasi tosto, riducendola ai menomi termini. Così 0,75 = $^{75}/_{100}$ = $^{3}/_{4}$ (§ 294).

429. Se la frazione è periodica, per tornar da questa alla frazion ordinaria da cui deriva, convien profittare della seguente osservazione, che cioè *qualunque unità frazionaria, nel cui denominatore non vi sia altra cifra che il 9 ripetuto quanto piaccia dà una decimale periodica, nel cui periodo non si trovano altre cifre significative, che 1:* così $^{1}/_{9}$ dà 0,1111...; $^{1}/_{99}$ dà 0,0101..; $^{1}/_{999}$ dà 0,001001..; $^{1}/_{9999}$ dà 0,00010001.., ec; il che avviene, perchè il numeratore 1 dell' unità frazionaria colla successiva addizione de' zeri, che riceve nello sviluppo decimale diventa 10,100,1000, numeri decadici che divisi o per 9, o per 99 ec, danno sempre 1 di quoto, e 1 di resto, il quale quando ha riceuto un numero di zeri eguale al numero delle cifre, ossia dei 9 che formano il divisore, torna ad esser per lui divisibile, e a darci di nuovo 1 di quoto, riproducendosi così il periodo formato dall' unità preceduta da tanti zeri quante volte la cifra 9 è ripetuta nel divisore.

430. Con questi lumi cominciando la nostra analisi dalle frazioni periodiche perfette le più semplici, aventi cioè il periodo d' una cifra sola, rimarchiamo che p. e. 0,666... non è che la frazione 0,111... moltiplicata per 6; e poichè 0,111... non è che la *decimale sviluppata* di $^{1}/_{9}$ (§ 429), così conchiudiamo che 0,666.... = 0,111.... $\times$ 6 = $^{1}/_{9}$ $\times$ 6 = $^{6}/_{9}$ = $^{2}/_{3}$. E' dunque $^{2}/_{3}$, la frazione generatrice della sviluppata 0,666...; e conchiudiamo che le frazioni *periodiche perfette* dal periodo di una cifra sola si confrontano allo sviluppo di $^{1}/_{9}$, e sono $^{1}/_{9}$ moltiplicato pella cifra esprimente il periodo.

431. Se le frazioni hanno il periodo di 2 cifre si confrontano allo sviluppo di $^1/_{99}$; poichè evidentemente risulta dallo stesso processo della moltiplicazione, che p. e. 0,5454 .... non è che la frazione 0,0101 ... moltiplicata per 54; e quindi 0,5454 ... = 0,0101...$\times$54 = $^1/_{99} \times 54 = {}^{54}/_{99} = {}^6/_{11}$.

Se il periodo è di 3 cifre, le frazioni si confrontano allo sviluppo di $^1/_{999}$. Così 0,324324... = 0,001001... $\times$ 324 = $^1/_{999} \times 324 = {}^{324}/_{999} = {}^{12}/_{37}$.

432. In genere *si converte una frazion decimale periodica perfetta nella ordinaria da cui deriva scrivendo come denominatore sotto il numero esprimente il periodo tanti* 9 *quante sono le cifre componenti il periodo, e quindi riducendo la frazione alla menoma espressione*.

433. Lo stesso metodo più una lieve avvertenza serve per trovar le frazioni ordinarie da cui derivano le *periodiche miste*. Si trasporta in queste la virgola verso destra in modo, che dopo lei non rimanga che il solo periodo. Così le prime cifre decimali non soggette a periodicità divengono la parte intera del nuovo totale; frazion decimale perfetta diventa la quantità decimale rimasta dopo la virgola, cui si sostituisce la frazione ordinaria, da cui deriva, trovata coll'or descritto metodo, e tutto il numero ottenuto essendo o dieci, o cento volte, ec. più grande della data frazion decimale periodica mista a tenor che la virgola si è in esse avanzata di uno, due, ec, posti, va perciò diviso o per 10, o per 100, ec, onde sia ad essa eguale. In tal guisa troviamo che la decimal periodica mista 0,265252... deriva da $^{1313}/_{4950}$. Infatti 0,265252... = 26,5252... : 100 = (26 + $^{52}/_{99}$) : 100 (§.432) = $^{2626}/_{99}$: 100 = $^{2626}/_{9900}$ =

$^{1313}/_{4950}$. In tal guisa troviamo che $0{,}0005454 \ldots = 0{,}5454 \ldots : 1000 = {}^{54}/_{99} : 1000 = {}^{6}/_{11} : 1000 = {}^{6}/_{11000} = {}^{3}/_{5500}$.

434 E chiudiamo finalmente la teoria dei decimali con l'osservazione, che le frazioni periodiche sì perfette, che miste paragonate alle frazioni da cui derivano, ci offrono un' idea di ciò che in Matematica s' intende per *Limite*. Trovando infatti a norma delle regole stabilite la frazione da cui deriva la sviluppata 0,999..., troviamo, che dessa è $^{9}/_{9} = 1$. E' però evidente che al valor della frazione generatrice, il quale nel nostro caso è l' unità, non giunge giammai il valor della frazione sviluppata, per quanto estesissimo sia il numero delle cifre a cui nella sua espressione ci fermiamo; ed in vero se nell' esempio, che abbiamo noi scelto, ci limitiamo alla prima cifra, manca $^{1}/_{10}$; se alla 2ª manca $^{1}/_{100}$, se alla terza $^{1}/_{1000}$; e così proseguendo ci avviciniamo quanto si vuole, ma non giungiamo mai all' unità, poichè sempre vi manca un' unità frazionaria dell' ultimo ordine a cui ci siamo arrestati. Ora in genere la frazion generatrice, che nel nostro esempio è apparente perchè è la stessa unità, dicesi il *limite*, al cui valore sempre più si avvicina la sua sviluppata 0,999..., quanto più cifre si prendono, senza che vi si possa mai giungere.

EPILOGO

Frazioni decimali.

Hanno origine dalla legge decadica estesa oltre l' unità (381).

Si leggono allorchè si presentano sotto forma di interi, enunciando come intero ciò che precede la virgola, e poi tutto il numero che la segue come numeratore, aggiungnendo per suo denominatore l' unità con tanti zeri, quante la virgola ha cifre dopo di se. (382 e seg.)

Si scrivono sotto forma di interi quando han l' aspetto di frazioni comuni, segnando il solo numeratore, e la virgola in modo, cho vi tagli a destra tante cifre, quantl ha zeri il denominatore (386, e seg.)

Hanno le seguenti proprietà. I. Se si agginngano o tolgano zeri alla lor fine, *non si alterano di nulla* (390): II. *di poco* se si tolgono le ultime cifre decimali, poichè un' unità di qualunque ordine decimale è maggiore di tutto il rimanente del numero che gli stà a destra fosse anche infinito (292), donde l' uso di abbreviar le espressioni senza che differiscano dal vero per una mezza unità dell' ultimo ordine rimasto (393, e seg.): III. di *molto si alterano* collo spostamento della virgola, divenendo 10, 100, ec. volte maggiori, o minori se di uno, due, cc, posti vada la virgola a destra o sinistra, donde le moltiplicazioni, e divisioni per 10, 100, ec, eseguite col solo trasporto di essa (396).

Nelle operazioni che ne alterano il valore si assoggettano agli stessi processi, che si impiegano per gli interi (397, e seg.), solo avvertendo di tagliar nel prodotto tante cifre a destra quanti sono i decimali ne' fattori (400), e di rendere per mezzo de' zeri eguale il numero dei decimali ne' termini della divisione (405).

Si trasformano in decimali le frazioni comuni dividendo pel denominatore il numeratore reso divisibile coll' aggiunta de' zeri, per ciascun de' quali si segna una cifra al quoto (411, e seg.). Questa divisione talora va all' infinito, e allora le frazioni sono irreducibili, e il sono quando hanno nel denominatore fattori diversi dal 5, e 2 (415). Le frazioni irreducibili si convertono con vantaggio in decimali approssimative, ed è a notarsi, che son tutte *decimali periodiche*, o *perfette* o *miste* (422), in cui I il denominatore è limite al più remoto periodico ritorno delle cifre (423), e II il numero delle cifre costituenti il periodo nelle perfette dipende dal numero delle divisioni fatte prima del ritorno periodico delle cifre, nelle miste da esso numero non già, ma dal numero dei residui intermedii tra i due eguali residui (425).

Si trasformano le decimali nelle frazioni comuni le più semplici col ridurle ai menomi termini se non sono periodiche (428); e se son tali prendendo per numeratore il periodo, ed apponendogli per denominatore tanti 9, quante le cifre son del periodo, se trattisi di periodiche *perfette* (430), più altra lieve avvertenza, se sono *miste* (433). Queste periodiche ci danno poi un idea del *limite matematico* (434).

ARTICOLO V.

Teoria de' numeri complessi .

435. Onde render completo il trattato delle frazioni sì ordinarie, che decimali, convien che ci occupiamo delle principali loro applicazioni, cioè de' *Numeri complessi*, che dipendono dalle prime, e del *sistema metrico* tutto basato sulle seconde.

La teorìa delle frazioni ordinarie è indispensabile nel calcolo delle comuni misure, poichè frazioni di ogni genere ci presentano le loro suddivisioni. Infatti veggiam la tesa divisa in *sesti*, che sono i piedi: il piede diviso in *dodicesimi*, che sono i pollici: il pollice in *dodicesimi*, che sono le linee: la linea in *dodicesimi*, che sono i punti. La lira in varii luoghi è divisa in *ventesimi*, o soldi: il soldo in *dodicesimi*, o denari. L' anno è diviso in *dodicesimi*, o mesi: ogni mese ne' calcoli di commercio in *trentesimi* o giorni, ogni giorno in *ventiquattresimi*, od ore: ogni ora in *sessantesimi*, o minuti primi: ogni primo in altri *sessantesimi*, o secondi. La libra è divisa in *dodicesimi*, che son le oncie: le oncie in *ventiquattresimi*, o denari: i denari in *ventiquattresimi*, o grani, ec. ec. Or tutti que' numeri concreti, che esprimono unità di misure, e le successive lor parti considerate anch' esse come unità d' altre parti minori, che sono cioè un *complesso* di unità di diversa specie, ma relativa, d' unità cioè intere, e di unità frazionarie diverse, ma subalterne, dipendenti cioè l' una dall' altra, e tutte dall' unità principale, come p. e. 5 ore, 31 primi, e 26 secondi (che si suole esprimere anche

così « $5^{or}\ 31'\ 26''$ ») ovvero 3 libre, 2 oncie, 2 denari, e 15 grani, sono perciò contraddistinti col nome di *numeri complessi*, e il loro trattamento esige delle particolari avvertenze, ma tutte dipendenti dalla teoria delle comuni frazioni, altro essi non essendo come abbiamo veduto, che un complesso di numeri interi, e frazionarii.

Valutazione delle frazioni.

436. La prima delle operazioni risguardanti i numeri complessi, che interessa conoscere è la trasformazione d' una frazion qualunque di unità nelle successive parti più piccole in cui l' unità concreta è negli usi sociali divisa; ed i casi i più comuni ce ne fanno sentire il bisogno.

437. *Una società di 432 intraprendenti ha ritratto da alcune miniere di sua proprietà libre* 185 *di oro. Posti tutti eguali i diritti, quanto tocca a ciascuno?*

E' chiaro che tocca ad ognuno $^{185}/_{432}$ di libra; ma per eseguire questa distribuzione ecco la necessità di conoscere cosa sia questa frazione valutata in oncie, denari, e grani. E per tale oggetto cominciamo dal riflettere, che $^{185}/_{432}$ di libra equivale a libre 185 divise per 432 (§ 268), ossia ad oncie 12 ripetute 185 volte, e divise per 432; ossia è $\frac{Onc.\ 12 \times 185}{432} = \frac{Onc.\ 2220}{432}$.

$$= Onc.\ 5 + \frac{Onc.\ 5}{36}.$$

Ora $\frac{onc.\ 5}{36} = \frac{den.\ 24 \cdot 5}{36} = \frac{den. 120}{36} = den. 3 + \frac{den. 1}{3}$

Finalmente $\frac{den.\ 1}{3} = \frac{gr.\ 24}{3} = gr.\ 8$

Dunque $^{185}/_{432}$ di *libra*, ossia la parte di ciascun socio è 5 *oncie*, 3 *denari*, e 8 *grani*.

E da ciò rileviamo, che per convertire una frazion qualunque nelle stabilite unità frazionarie dipendenti dalla principale, convien *moltiplicare il numeratore della frazione pel numero delle unità relative, che si esigono per formare l' intera unità primitiva, e dividere questo prodotto pel denominatore della frazione data a trasformarsi*. Ed ecco l' applicazione di questa regola a varii altri esempii.

438. *Tre tese di lamina d' avorio sono state impiegate per cuoprire la superficie dei* 64 *eguali quadratelli di una scacchiera. Quanta lamina d' avorio si è impiegata per ogni scacco?* Il risultato è $^{3}/_{64}$ di tesa $=$ *pol.*3 *lin.*4 *pu.*6.

439. *Quanto tocca a ciascuno dei* 60 *poveri ne' quali è a ripartirsi un' elemosina di lire* 47? Il risultato è $^{47}/_{60}$ di lira $=$ *sol.*15. *den.*8.

440. Se poi la frazione data è decimale, la sua trasformazione nelle diverse parti dell' unità principale è più facile, poichè risparmiasi il processo della divisione, la quale dovendosi allora eseguire per un numero decadico, qual' è il denominatore, si ottiene col solo rimuovimento della virgola, come i seguenti esempii ci mostrano.

441. *Per* 100 *eguali ornamenti un Orefice ha impiegato* 75 *piedi di filo d' oro*. Quanto ne ha impiegato per ciascheduno? Il risultato è pollici 9. Infatti

$$\frac{pie.\ 75}{100} = \frac{pol.\ 12.75}{100} = \frac{pol.\ 900}{100} = pol.\ 9{,}00 = pol.9.$$

442. *Quant' olio rende una libra di semi, se da* 100 *se ne sono espresse* 19? Risultato $^{19}/_{100}$ di libra = *onc.*2 *den.*6 *gr.*17,28 espressione in cui esistono 28 *centesimi* di grano frazione non valutabile in unità di peso più piccole, perchè negli usi sociali non abbiamo sotto il grano parti in peso minori che abbiano particolar denominazione.

443 *Avendosi dai calcoli astronomici che l' anno è precisamente composto di giorni* 365,242245 *ricercasi a quante ore, primi, e secondi corrisponda la indicata frazione di giorno.* — Risultato: 5^{or} 48' 49'',968.

444 *Essendosi trovato che il quadrante del Meridiano terrestre è piedi parigini* 30784440, *che perciò la sua decimillionesima parte, ossia il Metro è piedi* 3,0784440, *a quanti pollici, linee, e punti equivale la data frazione?*

Abbiamo per risultato, che il Metro è *piedi* 3, *pol.*0 *lin.*11,296, ovvero *piedi* 3 *pol* 0 *lin.*11 *pun.*3,551.

445. *Or questa trasformazione, che in tutti gli ora sciolti problemi abbiamo eseguito d' una frazione qualunque d' una data unità nelle successive unità più piccole, in cui la data principale è divisa, e suddivisa negli usi sociali*, è ciò che chiamasi *valutazione delle frazioni*. E poichè tutte le diverse unità relative della primitiva più piccole altro non sono, che unità frazionarie d' un determinato denominatore, ben dai citati esempii apparisce, che questa valutazione delle frazioni altro non è che la traduzione delle frazioni ad un determinato denominatore ripetuta tante volte di seguito, finchè o termina la rimanenza frazionaria prima dell' esaurimento o coll' esaurimento delle misure

successivamente più piccole, in cui la frazione si converte, ed in tal caso la *valutazione è esatta* (439,441); o si ha una rimanenza frazionaria anche dopo che si sono tutte esaurite, ed allora la *valutazione è incompleta* a meno però di una sola delle ultime più piccole misure che si hanno, poichè a questa appartiene la rimanenza veramente frazionaria (442,443,444).

Tra la riduzione delle frazioni ad un determinato denominatore, e la valutazione delle frazioni v' è questa sola differenza, che nella prima, che considera i numeri astratti la specie delle unità della nuova frazione a cui vuò ridursi la data, è espressa da un denominatore numerico, mentre nella valutazione delle frazioni, che risguarda i numeri concreti è espressa da un nome particolare dato dalla società, come il nome di *piede* in vece di *sesto* di tesa, di *oncia* in vece di *dodicesimo* di libra; di *soldo* in vece di *ventesimo* di lira, ec.

Riduzione de' numeri complessi ad una sola frazione.

446. Se talvolta occorre di valutare, ossia esprimere in numeri complessi una data frazione, tal' altra fa d' uopo l' opposto, l'esprimere cioè in una sola frazione tutto il complesso di diverse unità relative, il che si ottiene con una addizione di frazioni di frazioni, come rilevasi dalla soluzione del seguente problema.

*Che frazione di libra sono Onc.*1 *den.*18 *gr.*16? Risultato: $^4/_{27}$. Infatti le oncie sono *dodicesimi* dell' unità principale, i denari sono *ventiquattresimi di dodicesimi*, ed i grani sono *ventiquattresimi di ventiquattresimi di dodicesimi*, cosicchè oncie 1 + den. 18 + gr. 16 $= {}^1/_{12} + {}^{18}/_{24}$ di ${}^1/_{12} + {}^{16}/_{24}$ di ${}^1/_{24}$ di ${}^1/_{12} = {}^1/_{12} + {}^3/_4$ di ${}^1/_{12} + {}^2/_3$ di ${}^1/_{24}$ di ${}^1/_{12} = {}^1/_{12}$

$+ {}^{1}/_{16} + {}^{2}/_{3\cdot 24\cdot 12} = {}^{1}/_{3\cdot 4} + {}^{1}/_{4\cdot 4} + {}^{2}/_{3\cdot 6\cdot 4\cdot 4\cdot 3} = {}^{72}/_{864} + {}^{54}/_{864} + {}^{2}/_{864}$ (§. 304,307) $= {}^{128}/_{864} = {}^{4}/_{27}$

Allo stesso risultato si giunge riducendo tutto a grani de' quali ne occorrono 6912 per formar la libra poichè onc.1 + den.18 + gr.16 = gr.1024 = ${}^{1024}/_{6912}$ di libra = ${}^{4}/_{27}$ di libra.

L' utilità della or esposta riduzione ci si manifesterà non solo nella moltiplicazione, e divisione de' numeri complessi, ma ancora nella seguente operazione.

Trasformazione d' una misura, e sue parti in altra misura.

447. Ci serva d' esempio la trasformazione della tesa, piede, pollice, e linea in metro, e sue parti. Onde esprimere la tesa in metro, e sue parti convien prima d' ogni altro ridurre il numero complesso *pie.*3 *pol.*0 *lin.*11,296 indicante il metro, in una sola frazione di tesa per mezzo della precedente operazione in grazia della quale troviamo, che un metro, ossia *pie.*3 *pol.*0 *lin.*11,296 $= {}^{3}/_{6} + {}^{11}/_{12}$ di ${}^{1}/_{12}$ di ${}^{1}/_{6} + {}^{296}/_{1000}$ di ${}^{1}/_{12}$ di ${}^{1}/_{12}$ di ${}^{1}/_{6} = {}^{1}/_{2} + {}^{11}/_{864} + {}^{296}/_{864000} = {}^{432000}/_{864000} + {}^{11000}/_{864000} + {}^{296}/_{864000} = {}^{13853}/_{27000} =$ 0,5130740740... risultato cui egualmente giungiamo se cominciamo dal ridurre in linee il valore del metro, mentre troviamo che il metro = lin.443,296 $= {}^{443}/_{864}$ di tesa $+ {}^{296}/_{1000}$ di ${}^{1}/_{864}$ di tesa $= {}^{443296}/_{864000} = {}^{13853}/_{27000} =$ 0,5130740740....

Noto il valor del metro in frazione di tesa sì ordinaria, che decimale, con un lieve artificio troviamo l' inverso, cioè il valor della tesa in metro. Infatti se il metro è ${}^{13853}/_{27000}$ di tesa, ciò equivale a dire, che il metro è 27000 volte più piccolo di 13853 tese. Dun-

20

que si esigono 27000 metri per fare 13853 tese. E se 13853 tese eguivalgono a 27000 metri, una tesa sola equivarrà alla quantità metri 27000 resa 13853 volte più piccola, ossia il valor d' una tesa è $^{27000}/_{13853}$ = 1,9490363. E da questo esempio rilevasi, che *quando una misura* A *è uguale ad una frazione d' una misura* B, *questa frazion rovesciata esprime la seconda misura* B *in parti della prima*, giacchè mentre un metro è $^{13853}/_{27000}$ di tesa, la tesa è $^{27000}/_{13853}$ di metro.

Dal valor poi della tesa immediatamente scendono i valori delle sue unità dipendenti piedi, pollici, e linee.

Essendo infatti la *tesa* = Metr. 1,9490363, ne segue che

il piede ossia $^1/_6$ di tesa = $^1/_6$ di $1^m,9490363$
= $0^m,3248394$

il pollice ossia $^1/_{12}$ di piede = $^1/_{12}$ di $0^m,3248394$
= $0^m,02706995$

la linea ossia $^1/_{12}$ di pollice = $^1/_{12}$ di $0^m,02706995$
= $0^m,00225583$.

Operazioni che alterano il valore de' numeri complessi.

ADDIZIONE

448. *Scritte le poste le une sotto le altre in modo che le lor parti omogenee sieno nella stessa colonna verticale, s' incomincia la sommazione dalle unità della specie infima: se la lor somma non giunge a contenere un' unità della specie immediatamente superiore tutta si scrive sotto la corrispondente co*

lonna ; se sì , allora ritengonsi tante unità per unirle alle lor simili , quante nella somma son contenute (il che otteniamo dividendo la somma pel numero , che delle sue unità si esige per formare l' unità prossima) scrivendo sotto la colonna ciò che rimane , e nella stessa guisa si procede nella sommazione delle seguenti colonne , alle quali gradatamente si passa da destra verso sinistra .

449. *Si cerchi p. e. la somma* 1.° *delle altezze barometriche massime e* 2.° *de' pesi dell' acqua di pioggia caduta sovra una data superficie ne' due giorni , che han preceduto , e nei due , che hanno seguito il solstizio d' inverno . Si opererà come segue*

Altezze barometriche massime			*Pesi dell' acqua caduta .*		
pol.	lin.	pu.	onc.	den.	gr.
27	11	9	2	19	23
26	11	5	5	22	20
26	10	10	5	10	19
27	05	08	4	18	22
Poll. 109	Lin. 1	pun. 8	Lib. 1 Onc. 7	den. 0	gr. 12

SOTTRAZIONE.

450. *Alle avvertenze per l' addizione indicate aggiunger conviene , che nel caso in cui occorra prendere in prestito qualche unità o dalla specie immediatamente superiore , o dalla meno lontana , se le più prossime mancassero , fa d' uopo convertir queste unità nella immediatamente prossima a destra , e se non è questa la specie su cui attualmente cade la sottrazione , convien togliere da questa specie un'unità , e convertirla in unità della specie prossima , e*

così di seguito , finchè si giunga alla specie delle unità su cui si deve operare , pel che occorre aver ben presente quanto ciascuna unità vaglia nel posto di quello in cui si converte .

451. Si cerchi p. e. *che differenza passa fra la durata del giorno della terra , e la durata del giorno del Pianeta Marte , che è la più lunga , e la durata del giorno di Giove , che è la più breve trà i Pianeti , che si conoscono .*

Marte	24°	39′	21″	*Terra*	23°	56′	4″
Terra	23	56	4	*Giove*	9	55	33
Differenza.		43′	17″	*Differenza*	14°	0′	31″

452. *Di quanto la Tesa eccede il Metro?*

	pie.	pol.	lin.	pu.
La tesa è	6	0	0	0
Il metro è	3	0	11	3,552
	pie.	pol.	lin.	pu.
Eccesso	2	11	0	8,448

MOLTIPLICAZIONE

453. *Si riducono i termini complessi alla più semplice espressione o tutta frazionaria, o di intero e frazione* (446) ; *ed ottenuto che siasi il prodotto colle regole* (138) , *se ne valuti* (336) *la parte frazionaria* . Questa regola generale estensiva a tutti casi di moltiplicazione de' numeri complessi è soggetta a modificazioni , ed eccone una assai utile nel seguente più comodo processo, *Si riducono il moltiplicando se è complesso alle unità dell' ultima specie* (77), *e il moltiplicatore se è complesso ad una sola frazione la*

più semplice, o ad un intero e frazion decimale (rammentando esser esso un numero essenzialmente non concreto nell' esecuzione dell' operazione); *e dal prodotto ottenuto colle note regole, e che trovasi espresso nelle unità dell' ultima specie si traggono per mezzo della divisione* (124) *le maggiori unità, che vi son contenute*. Ed eccone esempii

454. *Trasformazione d' un numero di misure in altre*.

I. *Tese* 3 *pi*.5 *poll*.8 *lin*.10 *quanto fanno in Metri*? Risultato: Metri 7,71 circa.

Infatti il risultato esser debbe una tesa espressa in metri, e ripetuta per quanto è il numero delle tese ridotto a quantità decimale. Or tes.3 pi.5 pol.8 lin.10 = te.3 lin.826 = te.3 $+ {}^{826}/_{864}$ = te.3,956. Dunque il valor d' una tesa, che è prossimamente metri 1,949 (447) va moltiplicato per 3,956, e si ha per prodotto Metri 7,710244.

II. *Quant' è valutata in metri l' altezza barometrica media di poll*.28, *e linee* 3? — Risultato: Metri 0,765.

Infatti essendo poll.28 lin.3 = poll.28 $^{1}/_{4}$ = po.28,25, convien per 28,25 moltiplicare il valor del pollice in metri che è (447) prossimamente 0,02707; e si ottiene metri 0,7647275 = 0^{m},765 circa

455. *Quanto costano tese* 36, *piedi* 5, *e pollici* 3 *posto che una tesa valga scudi* 3,254? — Risultato scudi 119,99125.

Infatti scudi 3,254 valor d' una tesa va ripetuto per quanto indica il numero delle tese, che ridotto a numero non concreto ed espresso da un intero e una sola frazione (446) è 36 $^{7}/_{8}$. Or 3,254 (36 $+ {}^{7}/_{8}$) = 117,144 + 2,84725 = 119,99125. E questo risultato

si sarebbe anche più brevemente ottenuto se il moltiplicatore 36+$^7/_8$ si fosse ridotto alla quantità decimale 36,875.

456. *Quanto importano libre* 143, *oncie* 5, *e denari* 21 *di seta a lire* 28 *soldi* 7, *e denari* 11 *la libra*? Risultato: lire 4074, soldi 10, denari 1 $^{49}/_{96}$.

Infatti lire 28 sol.7 den.11 ridotti a denari sono denari 6815, e il moltiplicatore ridotto a numero non concreto, ed espresso da un intero, e una sola frazione è 143+$^{47}/_{96}$; e perciò den.6815 (143 + $^{47}/_{96}$) = den.977881 + $^{49}/_{96}$ = lir.4074+ sol.10 + den.1 $^{49}/_{96}$.

DIVISIONE

457. Poichè i numeri complessi non sono che interi, e frazioni (435), la lor divisione non è che la divisione di interi e frazioni per interi, e frazioni, sicchè *ottenuto il quoto dopo aver ridotto ad una sola espression frazionaria* (446) *si il dividendo, che il divisore, non resta che a valutarlo* (436) *nelle unità subalterne alla principale*. Questa è la regola generale estensiva ad ogni caso di divisione su i numeri complessi: può per altro subire per comodità di calcolo le seguenti modificazioni. *Ne' problemi in cui cerchisi il numero delle parti piuttosto che dar l' aspetto frazionario ai termini della divisione, che sono ambedue concreti, ed omogenei, giova ridurli alle unità le più piccole che abbia l' un di essi: ove cerchisi il valore, se il numero eterogeneo al dividendo indicante il divisore è complesso, giova ridurre questo solo alla più semplice espression frazionaria, o ad una espressione decimale col metodo* (446). Ed a maggiore schiarimento eccone degli esempii.

Problemi, in cui cercasi il numero delle parti, o una quantità che ne dipenda.

458. *Quante monete del valor di Lire 7 soldi 11 denari 6 si esigono per far la somma di Lire 909?* — Risultato: Monete 120.

Infatti ridotti a denari ambo i termini della divisione, trattasi di vedere quante volte 1818 denari valor della moneta sia contenuto in 218160 denari valor delle lire 909; e trovasi 218160 : 1818 = 120.

459. *Quanti potranno piedi comprarsi con Lire 645, soldi 5, denari 10 a ragione di Lire 8, e soldi 10 per piede?* — Risultato: pie·75 poll.11

Infatti tanti sono i piedi, che possono acquistarsi quante volte lire 8, e sol.10 ossia denari 2040 son contenuti in lire 645, sol.5, den.10, ossia in den.154870. Ora operando troviamo 154870 : 2040 = $75 + {}^{11}/_{12}$. Dunque ec.

Problemi in cui cercasi il valor delle parti.

460. I. Caso. Quando è complesso il sol dividendo. *Quanta è la media altezza barometrica del mese di Aprile desunta dalla triplice giornaliera osservazione del barometro nella mattina mezzo dì, e sera, posto che la somma delle 90 altezze osservate sia poll.*2471, *lin.*10, *pun.*6.? — Risultato: l'altezza media è poll.27, lin.5, pun.7.

Infatti l'altezza media è la novantesima parte di tutta la somma, ossia è la novantesima parte de' pollici 2471, delle linee 10, e dei punti 6. Or per mezzo della divisione troviamo, che la nevantesima parte dei pollici 2471 è poll.27, che segneremo al quoto, e v'è residuo di poll.41. A questo residuo di pol.41. che ri-

dotto nelle prossime inferiori unità diventa linee 492 uniamo le linee che abbiamo nel dividendo, ed avremo linee 502, che divideremo per 90, ed avremo per la loro novantesima parte linee 5, che segneremo al quoto, più un residuo di linee 52. A questo residuo, che ridotto alle ultime unità diventa 624 punti, aggiungeremo i 6 punti, che troviamo nel dividendo, ed avremo punti 630, che divisi per 90 ci danno 7 per lor novantesima parte senza residuo, sicchè segnato il 7 al quoto conchiudiamo che la novantesima parte di tutto il dato numero complesso è poll.27, lin.5. pun.7; e che *in tutti i casi in cui il solo dividendo è complesso, si ottiene il quoto, dividendo pel proposto divisore prima di tutto le unità principali, indi il residuo ridotto alle prossime unità inferiori, che si trovan nel dividendo, ed accresciuto delle medesime, e così di seguito continuando finchè si sono esaurite tutte le specie inferiori, che nel dividendo si trovano*. Coll' applicazione di questa regola sciogliamo tosto anche il seguente problema.

461. *Che lucro ha dato una lira a capo di* 5 *anni, posto che lire* 3456 *hanno dato il guadagno di lire* 12571 *e soldi* 4? — Risultato: lir.3,. sol.12, den.9.

462. *Che altezza aver debbe una colonna di mercurio per esser uguale in peso ad una colonna di acqua dello stesso diametro alta* 32 *piedi sapendosi, che la densità del mercurio è* 13,568 *volte maggiore di quella dell' acqua*? — Risultato: pol.28, lin.3, pun.7 $^{25}/_{53}$.

Infatti se il mercurio ha una densità 13,568 volte maggiore di quella dell' acqua formerà un peso eguale a quello dell' acqua con un volume 13,568 volte più piccolo, e trattandosi di una colonna di eguale diame-

tro, l' altezza di una colonna di mercurio eguale in peso a una colonna d' acqua alta 32 piedi, sarà 13,568 volte minore. Converrà dunque dividere piedi 32 ossia poll.384 per 13,568; ed avremo (405) 384000 : 13568 = poll.28 lin.3 pun.7 $^{25}/_{53}$.

463. II. Caso quando è complesso il divisore. *Quanto costa una libra di seta posto che libre 5 oncie 3 importino scudi* 30,208? — Risultato: scudi 5,753 $^{19}/_{21}$. Infatti le 5 libre, e oncie 3 ridotte a frazione a norma della regola (457) divengono $^{21}/_{4}$; e quindi per $^{21}/_{4}$ convien dividere scudi 30,208 (§ 358) poichè se 30,208 è il valor di $^{21}/_{4}$ di libra, il valor di libre 21 è 30,208×4, e quindi il valor d'una libra è 30,208×4 : 21 = 5,753 $^{19}/_{21}$.

464. La sola pratica del calcolo accoppiata ad un maturo esame delle esposte teorie è valevole a suggerire a norma delle circostanze ne' differenti casi sì della divisione che della moltiplicazione de' numeri complessi de' metodi anche più compendiosi per giungere ai risultati, senza che siavi d' uopo di aggravar la memoria delle complicate, e non necessarie regole, che troviam registrate nelle aritmetiche di commercio. Ad onta però di ogni cura diretta a semplicizzare e facilitare i processi, ognun vede che le operazioni che si eseguiscono su i numeri complessi sono tanto più complicate di quelle, che si pratticano sulle quantità decimali; ed è questo confronto, che ci fa sentir meglio di ogni altro l' utilità, che si avrebbe da un sistema di misure istituito con legge decadica, mentre essendo così proscritta dagli usi sociali ogni suddivisione, che decimale non fosse, inutile si renderebbe il calcolo delle frazioni ordinarie, e si farebbe sol uso del calcolo decimale, che da quello degli interi non differisce. Un

tal sistema general di misure è stato l' oggetto delle fatiche di molti matematici insigni, e poichè abbiam già parlato del trattamento de' numeri complessi, che si appoggia alla teoria delle frazioni ordinarie, or di questo nuovo sistema di misure parliamo, che tutto al calcolo decimale si appoggia.

EPILOGO

Numeri complessi.

Essi sono un complesso di interi, e frazioni (435).

Talvolta occorre *valutar* le frazioni in numeri complessi; e ciò non è, che trasformare una frazione in altre (436, e seg). Talvolta occorre l' inverso, cioè *ridurre i numeri complessi in una sola espressione frazionaria*, e ciò non è che una addizione di frazioni di frazioni (446).

Talvolta occorre *trasformare una misura in altre* (447).

Talvolta occorre *alterare il valore de' numeri complessi* coll' *addizione sottrazione moltiplicazione e divisione*, le cui regole sono dipendenti dalla proprietà, che essi hanno di esser un' assieme di interi, e rotti (448, al 464).

ARTICOLO VI.

Sistema metrico (a).

465. I più comuni bisogni del commercio, delle arti, e delle scienze esigono, che di molti diversi og-

(a) Premettiamo che le materie trattate in questo articolo non potranno esser tutte ben intese dagli Allievi, se non dopo che avranno compito il corso degli elementi di matematica e fisica e che utili riesciranno agli studenti di chimica, i quali troveranno in esse il ristretto di quella lezione, che tra le altre sperimentali siamo soliti dare ogni anno sul metrico sistema.

getti venga la quantità precisata. Noi ci sentiamo necessitati a determinare la durata delle successive nostre modificazioni, o queste si considerino in noi, o agli oggetti esterni si riferiscano, ed ecco la misura del tempo: spesso fa d' uopo il peso valutare de' corpi, spesso il generale rappresentante del pregio delle cose la moneta, spessissimo l' estensione in qualcheduno dei suoi triplici aspetti o di linea, o di superficie, o di volume, o sotto l' altro riguardo della inclinazione delle rette, e dei piani, e questa valutazione non può con altro mezzo ottenersi, se non che coll' assumere a modello una certa quantità degli indicati oggetti, ed esplorar quante volte in essi sia contenuta, il che chiamasi misurare, siccome misura la quantità, che scelta abbiamo per tipo.

Un operazione ella è questa d' un uso sì generale, che branca non havvi in quante mai sono le vaste diramazioni delle matematiche discipline, cui applicar si possa una quantità, che di misura non sia stata il soggetto, poichè già mostrammo (17), che di matematiche applicazioni non è suscettibile, che la quantità misurabile. Non possiamo infatti trattar numeri senza trattar di misure, poichè i numeri secondo la nostra, e la comun maniera di intendere, non sono che quantità misurate (c); e tutte quante le operazioni, che su di

---

(c) Noi non addottiamo la distinzione che in più d'un corso recente trovasi de' numeri in *determinati* se indican grandezze, di cui sia precisata la *specie*, e il *quantitativo delle unità*; *in semideterminati*, se è precisata sol l' una o l' altro; e in *indeterminati*, se l' una, e l' altro si ignora; poichè ne piace di accettar la parola numero non come sinonimo di quantità in genere, sebben per tale definito da Nevvton, ma in vece come complesso di uni-

essi eseguiamo, l'addizionare, il molfiplicare, il sottrarre, il dividere, altro in ultima analisi non fanno, che modificarne il valore, come otterrebbesi coll'aggiungere o togliere una alla volta la stabilita unità di misura (81). E se senza numeri possiamo dar luogo ad algebriche speculazioni, vediamo poi che le formole a cui in fin del calcolo giungiamo a nulla valgono, se non si trasformano in numeri, sicchè di esse niuna applicazione può farsi, che o misura non sia, o di misura non tratti.

466. Le primitive unità misuratrici, e le secondarie alle quali è stato d'uopo ricorrere per valutare que' residui, che non poteano esser più misurati dall' unità primitiva in ogni genere di oggetti, si sono più

tà, come lo ha riguardato Euclide, come una quantità cioè, che ha all' unità un determinato rapporto (8). E in questo senso più ristretto (che ci sembra il più giusto, mentre *numerus a numerando*, nè può competere il nome di numero a quantità, che non è *numerata)* l'espressione di *Numero indeterminato* diventa assurda, giacchè l' epiteto distrugge l' idea del soggetto, che tutta consiste nel puro *determinato* rapporto della quantità all' unità; e inesatte diventan pure le distinzioni de' numeri *semideterminati*, *e determinati*, perchè appoggiate, se mal non m'appongo, all' errore di credere, che l' idea della specie sia inclusa nell' idea del numero, quando che la specie è un' aggiunto e non un' elemento integrante di esso. Così se conosciamo la specie, e non il numero delle cose, come un *cumulo di zecchini*, ci sembra più esatto il dire, che questa è una *quantità concreta non numerata*, di quello che *numero semideterminato*: se conosciamo all'opposto il quantitativo delle unità, e non la specie come 20, ci par più proprio dire che questo è un numero *astratto* di quello che *semideterminato*, mentre non per metà ma del tutto è la quantità determinata dal 20; e quando conosciamo numero, e specie come 20 zecchini, ci par più esatto dare al numero l' epiteto di *concreto*, piuttosto che di *determinato*, essendo per noi determinato il numero anche quando si ignora la specie.

o meno sollecitamente inventate nelle diverse società a tenore del loro più o meno rapido dirozzamento, e la lor precisione, e le loro suddivisioni si sono vedute spingersi sempre più oltre di mano in mano, che i progressi scientifici, e tecnici hanno introdotta una maggiore esattezza nell' apprezzamento delle materie, e quindi nella costruzione de' strumenti, coi quali valutate si sono delle quantità, che prima per trascurabili si riguardavano; sicchè le misure principali, e le subalterne nacquero tutte dal bisogno dell' istante, e parto certamente non furono d' una matura, e preventiva universal convenzione.

Niuna meraviglia perciò se uno sguardo volgendo sugli specchi, dei diversi generi di misure addottate dalle diverse Nazioni, ci si schieri d' innanzi una varietà di tipi, una irregolarità di divisioni, uno slegamento di parti, una confusione in somma, che opprime. Unità scelte a capriccio, ripartizioni ancor più arbitrarie, assoluta indipendenza fra le unità di un genere e l' altro, denominazioni inducenti all' errore, come quelle di braccio, di piede, di pollice, che esprimono grandezze ben diverse da quelle che siamo abituati a riferirvi, sarebbero tollerabili inconvenienti, se queste misure fossero da per tutto uniformi: ma esse hanno variato coi tempi, varian coi luoghi, e la lor differenza non s' incontra già solo ne' rapporti tra nazioni, e nazioni: ogni regno, ogni provincia, non basta, ogni città, ogni subborgo ha sgraziatamente un sistema di misure suo proprio, e perchè dir si possa, che la somma degli inconvenienti è al suo colmo in un medesimo paese troviamo, che le misure del genere stesso diversificano coi varii oggetti cui si applicano. Così il braccio che misura la tela differisce da quel-

lo che misura la seta, lo stajo del frumento è ben diverso da quello de' legumi: la libra, che pesa l' olio risulta d' un numero di oncie maggiore, che la libra designata ad altre merci, ec, ec.

467. In mezzo a tanti inconvenienti una uniformità di misure per tutti gli stati dell' universo, una uniformità di misure, che colla sua semplicità la mente sgravasse da quel confuso ed indigesto ammasso di idee che in lei vi producono tanti, e sì svariati modelli, che con una divisione regolare, e decadica le imbarazzanti, e complicate operazioni appianasse del calcolo, che più facili, e prospere rendesse le commerciali corrispondenze facendo sparire la necessità dei difficili, e nojosi ragguagli tra pesi e pesi, monete, e monete, misure, e misure di linee, di superficie, di volumi, una uniformità che il pericolo allontanasse di que' gravi discapiti, che sovente soffre ne' suoi traffici il mercadante non abbastanza esperto nella conoscenza de' rapporti delle diverse misure tra loro, e dalla quale all' opposto i troppo avveduti sanno trarre partito, era questa uniformità da gran tempo l' oggetto de' voti di tutti gli zelanti della pubblica prosperità.

E finalmente fu sul tramonto dello scorso secolo decimottavo, che una commissione dei più illustri dotti della Francia scelti dall' Accademia delle scienze a sì nobile intrappresa si accinse. Nel veramente filosofico, impianto due furono le mire principali, che si prefissero que' chiarissimi ingegni: I. si volle che in ogni genere di misure i multipli, e summultipli fossero in progressione decadica, come il sono le diverse unità, nel nostro sistema di numerazione, onde non discostarsi dal comodissimo calcolo decimale: II. e fra i diversi generi di misure, che possiamo a 4 ridurre, cioè alle

monete, ai pesi, e alle misure del tempo, e dello spazio, una sceglierne da cui derivassero meno arbitrariamente che fosse possibile tutte le altre come da un' unico tipo, e modello, onde al sistema conciliare il pregevole requisito dell' unità; e questo tipo si volle non aereo, arbitrario, variabile, ma costante in natura, e perciò tale, che a piacimento potesse ricuperarsi dal seno della medesima ogni qualvolta esso andasse smarrito: si volle in somma un sistema, che in istretti rapporti legasse e tra di loro, e colla natura le diverse unità misuratrici, onde garantirle da ogni alterazione, la ragionevole lusinga nutrendo, che a poco a poco fosse da tutte le nazioni addottato, e divenisse perciò il sistema unico per tutto il mondo civilizzato.

468. Per questa celebre istituzione, in mezzo ai diversi generi di misure, uno conveniva sceglierne da cui prender le mosse, e da cui come da radice far derivar tutti gli altri, nè potea sulla scelta esitarsi ad ogni altra grandezza l' estension preferendo, siccome quella che superiormente ad ogni altra si addatta alle divisioni regolari, e precise della serie de' numeri appun' perchè gode d' una divisione di parti la più distinta, durevole, siccome quella che sulle sue parti permanenti, e distinte apprezzar ci fa le parti transitorie, e confuse della durata e del moto, e le diverse energie de' varii fisici agenti, come ce ne assicura un' infinità di graduati moderni apparecchii, che sempre più avvaloran la massima di quel filosofo, il quale asserì, che *il mezzo di perfezionare le naturali discipline tutto è riposto nel segreto di saper condurre il soggetto che trattano a precise misure di estensione*, le quali appunto per la loro superiorità sulle altre son per antonomasia senz' altro epiteto comunemente chiamate *mi-*

sure. Conveniva dunque fissar nell' estensione, e precisamente nell' estensione la più semplice, cioè nella lineare l'*Archetipo*, da cui le misure d' ogni altro genere si deducessero, e a tale oggetto l' ardito disegno si concepì di interrogar la Natura, di obbligarla anzi con ardue, ed insistenti ricerche ad offrirci una qualche frazione di quelle sorprendenti dimensioni che il suo gran compasso ha impiegate nella costruzione degli imponenti ammassi, di cui è seminato lo spazio, quello sciegliendo che più d' avvicino ci appartiene, riputandosi ben giusto che il nostro globo medesimo contribuisse a dare quel tipo di misura, che si volea per tutto il globo addottato, e da un circolo massimo delle terra, e precisamente dal meridiano questo tipo fu tratto.

469. Nè nuova fu l' idea di sì gigantesca intrappresa, poichè troviamo in Aristotile citata la misura della terra, ed il quarto del di lei meridiano valutato a 100mila stadii. E se nulla poi asserir possiamo di quanto dal vero questa misura distasse, poichè qual fosse il vero valore d' uno stadio si ignora, questa notizia ci appalesa però quanto sia stato all' uom naturale sin dai secoli i più remoti il riferire le misure specialmente itinerarie alle dimensioni stesse del globo, che abita. Così infatti il viaggiatore col trasferirsi da un luogo ad un' altro, dalla sola denominazione dello spazio percorso rileva il rapporto di questo spazio allo stesso circuito della terra; e con questo mezzo il navigante ha pure il vantaggio di far corrispondere le misure nautiche alle celesti, poichè trovandosi egli spesso in bisogno di determinare un per l' altro il cammino, che ha fatto, e l' arco celeste compreso tra lo Zenit del punto di partenza, e del punto di arrivo, è interessante assai, che l' una di queste misure sia l' e-

spressione dell' altra , come lo è allorquando l' unità di misura lineare è una parte aliquota del meridiano terrestre , che corrisponde ad una delle divisioni della celeste circonferenza .

470. E per riuscir nell' intento si profittò de' lumi , che un mezzo secolo addietro aveano sparso in proposito le celebri spedizioni fatte al Perù , ed in Lapponia per commissione della stessa Accademia delle scienze , che dileguato avean già ogni dubbio sulla figura sferoidal della terra schiacciata ai poli , e sollevata all' equatore ; ma poichè non si aveano risultati del tutto soddisfacenti nelle altre 13 diverse misure del grado , che in seguito eran già state prese a varie latitudini da diversi astronomi in diverse regioni del globo e a motivo della non esattissima perfezione degli strumenti adoperati , e sovratutto a motivo della piccolezza dell' arco misurato sul quale qualche irregolarità della superficie del globo , che si fosse incontrata avrebbe potuto produrre uno sbaglio rilevante negli ultimi risultati , si opinò che per un' impresa sì delicata ed interessante , qual' era l' impianto del nuovo sistema di misure , misure si esigessero delle dimensioni del globo assai più esatte di quelle , che fino allora si aveano ; e per tale motivo si concepì l' ardimentoso progetto di misurare un' arco non già di un solo ma almeno di 9 in 10 gradi . I valorosi Astronomi *Mechen* e *Delambre* furono incaricati di questa misura , e l' arco del meridiano , che attraversa la Francia fra *Dounkerque* , e il forte di Barcellona *Monjouì* fu l' arco preso di mira , che trovossi di gradi 9,67379722 . Nel 1792 ebbe principio la grande intrappresa , e dopo lo spazio di 7 anni e mezzo di assidue fatiche per un in-

finità di operazioni astronomiche e geodesiche le più delicate quali furono necessarie pella misurazione di un arco estesissimo di circa 10 gradi attraverso pianure valli, e montagne, per le quali tirar convenne una ben lunga catena di triangoli, si ebbe finalmente per risultato 551584,12 tese per l'estensione dell' arco intero. Il grado medio di quest' arco che eguale trovossi a 57012 tese si pose a confronto col grado primo del meridiano trovato al Perù di 56753 tese, grado che dalla coincidenza delle misure separatamente prese dai celebri fisici Francesi *Condamine*, *Godin*, e *Bougher*, e dagli Uffiziali Spagnoli *Juan*, ed *Ulloa* si potea riputare pel più esatto; e da questi due archi per mezzo della teoria delle curve il valor ricavossi dei semiassi della terra, si valutò la lor differenza a circa $^1/_{334}$, e si ebbe finalmente con quella esattezza che può esigersi nelle fisiche osservazioni la misura d' un intero quadrante del meridiano nella somma di tese 5130740. E fu il quadrante del meridiano la parte di periferia, che venne a preferenza di qualunque altra marcata, e perchè è la misura dell' angolo retto, che può riguarsi come l' unità di misura degli angoli, essendo il limite delle inclinazioni d' una linea sovra un piano, e dell' altezza degli oggetti sull' orizzonte, e perchè è sul quadrante che si formano i seni, e generalmente tutte le altre funzioni del circolo, che come ad unità hanno al raggio rapporto.

471. Or di questo quarto del meridiano conveniva prendere una parte summultipla, che avesse una lunghezza proporzionata alle dimensioni e al maneggio delle nostre braccia, e questa parte si vide che altro non potea essere che la decimilionesima, la quale di

poco differisce dalla mezza canna romana, mentre una decimale anteriore, cioè la milionesima sarebbe stata troppo grande, e non agevolmente maneggiabile, perchè poco dissimile da una lunghezza di 5 canne, e una decimal posteriore, cioè la centomilionesima stata saria troppo piccola, perchè ugnale a circa $^{1}/_{20}$ di canna. Col divider dunque per 10000000 il 5130740 tese, ossia il 30784440 piedi misurata lunghezza del quadrante del meridiano, si ottiene una frazione, che trovasi eguale (444) a piedi 3 pol.0 lin.11,296 della tesa di ferro del Perù a 13.° di R. (a). E questa decimilionesima parte del quarto del meridiano terrestre, che milioni, e milioni di franchi costò al governo francese pelle spese incalcolabili di una spedizione scientifica mantenuta pel lasso di circa otto anni continui col più dignitoso decoro, e col corredo di una ricca suppellettile dei più eccelenti fisici apparecchj, questa decimilionesima parte che improbe fatiche costò a que' dotti indefessi che la ritrovarono in seguito di sperienze e di osservazioni le più delicate, che di utilissime scoperte arricchirono l'Astronomia la Geografia la Fisica, questa decimilionesima parte, che addattata alle dimensioni delle braccia dell' uomo per tipo si scelse delle lineari misure, e per base, e radicale elemento del-

(a) Antecedentemente ai lavori di Mechen e Delambre si era calcolato il quadrante del Meridiano col moltiplicar per 90 la media delle diverse misure che si avean allora del grado valutata per 57027 tese, lo che produce tese 5132430, la cui decimilionesima parte è piedi 3 poll. 0 lin. 11 $\frac{44}{100}$, sicchè l'eccesso di questa misura sulla nuova è di soli $\frac{144}{1000}$ di linea.

le misure di ogni sorta e di cui un' Archetipo costrutto colla massima esattezza fù depositato presso un corpo legislativo per decreto della Convenzion nazionale *ad perpetuam rei memoriam*, è quella lunghezza che *metro* appellossi, ossia misura per eccellenza, donde il nome di *metrico* a tutto il sistema di misure che ne deriva, e che or passiamo ad esporre, premettendo, che ad oggetto di evitare gli equivoci, si è fatto ricorso alla lingua greca per l' espressione de' *multipli*, e alla latina per la espressione de' *summultipli* delle unità stabilite in ogni genere di misure, anteponendo cioè al nome indicante l' unità le voci tratte dal greco *deca*, *etto*, *chilo*, *miria*, che significano *dieci*, *cento*, *mille*, *diecimila* per esprimere le quantità 10,100,1000,10000 volte maggiori dell' unità; e le voci tratte dal latino *deçi*, *centi*, *milli*, *decimilli*, ec. per esprimere le quantità 10,100,1000,10000, ec, volte dell' unità più piccole.

MISURE LINEARI

472. Quando per le distanze assai grandi o assai piccole riesce incommoda la misura del metro, a norma de' stabiliti principii si sono introdotte le altre unità di misura o più grandi, o più piccole, che il seguente specchio ci offre.

Decimillimetro	*Metri* 0,0001
Millimetro	0,001
Centimetro	0,01
Decimetro	0,1
METRO - Decimilionesimo del quadrante del Meridiano	1
Decametro	10
Ettometro	100
Chilometro, o miglio nuovo	1000
Miriametro	10000

473. Poichè la figura più acconcia a darsi alle misure di superficie è stata da' Geometri riconosciuta il *quadrato*, sulla lunghezza del metro si è costruito un quadrato, e questo *metro quadrato* si è preso per l' unità di misura delle superficie. Quando poi trattasi di superficie assai estese, come sono le agrarie, si è preso per unità non il metro, ma il *decametro quadrato*, dando ad esso il nome di *Area*. E quì giova eliminar dai principianti un errore, in cui sogliono facilmente cadere, qual'è quello di credere, che come il decametro semplice è dieci volte maggior del metro, così pur il decametro quadrato lo sia del metro quadrato; mentre il quadrato di un decametro, ossia il quadrato di 10 metri è la seconda potenza di 10, è $10^2=100$, il quadrato d' un metro è $1^2 = 1$; e perciò il metro quadrato è 100 volte minore del decametro quadrato detto *Area*, ossia è un *Centiare*. Per la stessa ragione il quadrato dell' unità dieci volte maggiore del decametro, ossia il quadrato d' un ettometro, non 10 volte, ma 100 volte è anch' esso maggiore del decametro quadrato, o area, val perciò cento *are*, ossia è un *Ettoare*, come dal seguente specchio agevolmente rilevasi.

Centimetro quadrato	Millionare	*Metri quad.* 0,0001
Decimetro quadrato	Decimillare	0,01
METRO quadrato	Centiare	1
Decametro quadrato	Area	100
Ettometro quadrato	Ettoare	10000
Chilometro quadrato	Miriare	1000000



474. Essendo il cubo la forma, che i Geometri hanno riconosciuta piu propria a darsi alle misure di volume, si sono distinte due unità di volume, il cubo cioè del metro, e il cubo del decimetro, ossia un volume chiuso da sei faccie quadrate eguali aventi ciascuna o un metro, o un decimetro per lato.

Il *Metro cubico* si è scelto per misurare il volume di quegli oggetti o immobili come muraglie, o di grandi, e malagevoli masse, come legname, da esigere, che il lor volume venga ritrovato col calcolo, e non già meccanicamente dedotto col riempiere di essi un vaso di determinata capacità, ed è in tal caso che la misura si contraddistingue col semplice nome di *misura di volumi*; *il decimetro cubico* si è impiegato coi suoi multipli e summultipli per misurare le minute materie solide, e secche come grani, legumi, o i liquidi; e per la misura di queste sostanze fa d'uopo realmente di recipienti di capacità determinata che perciò chiamansi *misure di capacità*, ed a queste piuttosto che dare una forma cubica, che le renderebbe di un' uso incommodo, e di durata minore, si è data in vece una forma cilindrica d' un' altezza eguale al diametro pelle materie secche, e di un' altezza doppia pei liquidi, in modo però che il volume sia equivalente alla denominazione della misura, al decimetro, o centimetro cubico, ec. All' unità di misura de' volumi, cioè al metro cubico si è dato il nome di *Stero*, nome poco proprio a dir vero perchè tratto dal greco *Stereos* che significa *solidità, durezza*, proprietà da cui appunto fa astrazione il Geometra nell' idea del volume de' corpi; e l' unità di misure di capacità, cioè il *decime-*

tro cubico si è chiamato *Litro*, denominazione anch' essa non molto esatta perchè proveniente da *litra*, che in greco significa libra, cioè peso, e non volume, o capacità come esprimer dovrebbe. Ed anche per rapporto ai multipli, e summultipli delle misure di volume, e capacità, notiamo, che erroneo sarebbe il supporre per es., che il decimetro cubico sia solo dieci volte più piccolo del metro cubico, come lo è del metro il decimetro, poichè mentre il cubo di 1 è $1^3 = 1$, il cubo di 0,1 è $0,1^3 = 0,1 \times 0,1 \times 0,1 = 0,001$, ond' è che il *decimetro cubico o litro* è un millesimo del *metro cubico o stero*, è un *millistero*, come i due seguenti specchj ci mostrano.

Misure di Volume

Millimetro cub.	Millimillionistero, Millionilitro	M. cu. 0,000000001
Centimetro cub.	Millionistero, Millilitro	0,000001
Decimetro cub.	Millistero, Litro	0,001
METRO cub.	Stero, Chilolitro	1

I multipli dello Stero non si usano

Misure di Capacita.

Centimetro cub.	Millilitro . . Metri cub.	0,000001 Litri	0,001
	Centilitro	0,00001	0,01
	Decilitro	0,0001	0,1
Decimetro cub.	LITRO	0,001	1
	Decalitro	0,01	10
	Ettolitro	0,1	100
METRO cub.	Chilolitro, Stero	1	1000



475. Per fissare rapporto al peso un campione, che il pregevole requisito avesse di poter essere a piacimento tratto dalla natura sempre identico a se medesimo, conveniva esser sicuri di poter sempre rinvenire lo stesso volume e la stessa densità, poichè da questi elementi dipende la massa, e quindi il peso de' corpi. Onde ottenere il primo intento si scelse per volume il centimetro cubico, o millilitro ad una determinata temperatura: onde ottenere il secondo per esser cioè certi di aver a nostra disposizione una densità sempre eguale, e costante, conveniva escludere dalla scelta delle sostanze i solidi, i quali non rare volte ci offrono maggiore porosità in una, che in altra parte della lor massa, e preferire i liquidi in vece, la cui densità è in tutte le loro parti uniforme: tra i liquidi facea d' uopo eliminar quelli, che sono o miscugli, o composti di diversi principii a proporzioni variabili, come acidi, alcool, vino, olii, soluzioni di zuccaro di sali, ec. sostanze tutte le quali non ci offrono sempre la medesima densitá, e scieglier quelli altri, che risultano di elementi riuniti a proporzioni invariabili, e perciò aventi sempre sotto una stessa temperatura la stessa specifica gravità: e tra questi era utile quelli anteporre, che hanno un *maximum* di densità, poichè prendendo coi mezzi idrostatici il loro peso nel punto di temperatura in cui trovasi al colmo la loro densità, d' uopo più non abbiamo di far entrare per la determinazione del peso un' elemento estraneo, qual' è la temperatura, su cui potrebbe cader qualche errore, quando uso si facesse di termometri non esattissimamente comparabili; e finalmente tra i liquidi, che posseggono questo massimo di

densità giunti al quale, o si raffreddino ulteriormente, o si riscaldino, essi dilatansi, conveniva uno scieglierne che facil poi fosse a rinvenirsi in natura; ed una sostanza in cui tutte le indicate proprietà si rinvengono è *l' acqua stillata*. Dessa infatti 1.° esiste allo stato liquido alle ordinarie temperature: 2.° ha sotto una costante temperatura una densità sempre identica perchè invariabili le proporzioni de' suoi componenti: 3.° verso il 4.° grado del termometro centigrado ha il massimo di sua densità, e 4.° finalmente si desume dalla sostanza la più abbondantemente sparsa sulla superficie del globo.

Il peso dunque di un centimetro cubico, o millilitro di acqua stillata al maximum di sua densità nel vuoto preso con tutte quelle delicatissime cautele, che le fisico-chimiche cognizioni richieggono da Brisson, Coulomb, Lefèvre Gineau, e Darcet i quali si occuparono ancora di tutte le fisico-chimiche operazioni necessarie alla determinazione delle misure di capacità, è il campione stabilito per le misure dei pesi, e ricevette il nome di *Grammo* da *grammarion* ventiquattresima parte dell' oncia, o denaro cui si avvicina, corrispondendo a grani 20 $^1/_3$ circa del nostro peso romano; ed ecco di tutte le misure de' pesi il prospetto.

Millimetro cub. Milionilitro di acqua	Milligrammo	grammi	0,001
Centimillilitro	Centigrammo		0,01
Decimillilitro	Decigrammo		0,1
Centimetro cub. o Millilitro	GRAMMO		1
Centilitro	Decagrammo		10
Decilitro	Ettogrammo		100
Decimetro cub. Litro di acqua	Chilogrammo		1000

MISURE MONETARIE

476. Il quintuplo d' un grammo (e meglio sarebbe stato il suo decuplo per maggiore uniformità al sistema decimale) formato da $^{9}/_{10}$ d' argento, e $^{1}/_{10}$ di rame, costituisce l' unità della moneta detta *Franco*, o *Lira*, di cui si hanno i *decimi*, e i *centesimi*.

MISURE DEL TEMPO

477. Al metro è pur legata la misura del tempo, poichè la durata del giorno, che può prendersi per unità, dipende dalla lunghezza del metro combinata colla celerità supposta costante della rotazione terrestre. In fatti il metro essendo una quarantamilionesima parte non sol del meridiano, ma prossimamente ancora dell' Equatore, esprime una frazione dell' intero viaggio circolare, che un punto dell' Equatore dee compiere in un giorno, il qual poi secondo il sistema decadico dividesi in 10 ore, siccome ogni ora in 100 primi, e ogni primo in 100 secondi.

MISURE ANGOLARI

478. Col metro ha pure rapporto la misura angolare; poichè il metro è la decimilionesima parte del quadrante, di quell' arco cioè, che misura l' angolo retto scelto ad unità delle diverse inclinazioni, che ser-

han tra loro le rette, e i piani. E questo quadrante dividesi in 100 gradi, e ogni grado in 100 primi, e ogni primo in 100 secondi, ec., di modo che l' intera circonferenza nel nuovo sistema decimale resta divisa non più in 360°, ma in 400°.



479. Nelle misure nuove tutto dunque dal metro deriva, o almeno ha col metro rapporto: ma poichè non è proprietà delle umane cose la perfezione, e l'immutabilità, non dissimuliamo, che erronee sarebbero le nostre supposizioni, se credessimo che questo metro d' ogni misura radice fosse a rigor matematico la decimilionesima parte del quadrante del meridiano, e tale da potersi a piacimento ottener sempre *identico* ogni qual volta si tentasse di recuperarlo dalla natura, che ne ritiene il campione. Già in questo secolo la misura dell'arco del meridiano fu protratta verso il sud da Biot, ed Arrago sino all' isola di Formentera lungo la costa spagnuola, e fu in Inghilterra sotto il Generale Roy proseguita verso il Nord, sino alle isole Orcadi; e dopo la pace le misure de'gradi in Inghilterra ottenute furono a quelle della Francia riunite, con che si ebbe misurato un' arco di gradi 20, dal quale risultò esser lo schiacciamento terrestre non più di $^{1}/_{334}$, ma di $^{1}/_{308,65}$, come lo stesso Delambre ammette nel suo Abregè d' astronomia, e quindi de' metri attuali per formar l' intero meridiano ve ne vorrebbero non più 40000000, ma 40064521. Converrebbe perciò alterare la lunghezza del metro legale già stabilita, ed allungarla di $0^{m},001613$ per farla concordare a queste nuove determinazioni, e per aver un quarantamilionesimo e-

satto del meridiano, ma oltrechè la differenza citata è sì tenue da non dare vantaggio alcuno in compenso del gravissimo inconveniente d'una simile innovazione, che obbligherebbe a riformare tutte le tavole de' ragguagli, è poi a riflettersi, che anche la fatta correzione potrebbe in seguito andar soggetta a nuove modificazioni. La lunghezza del metro è legata alla lunghezza del meridiano, che dipende dallo schiacciamento del globo, elemento alquanto incerto del calcolo. Infatti se misurasi un'altro meridiano, non essendo la terra un elissoide perfettamente regolare può darsi, che i diversi meridiani per qualche ineguaglianza di superficie non presentino le medesime dimensioni: se tornasi a misurare il meridiano medesimo, che servì sul cader del secolo XVIII pella determinazione del metro, certi non siamo se più desso serbi la precisa estensione di allora, potendo essa aver subìto diminuzione e pel successivo raffreddamento del globo nella ipotesi del calore centrale, e per la pressione degli strati terrestri gli uni sugli altri; e quand' anche niuna di queste intrinseche alterazioni possa influire sovra una nuova determinazione del metro, chi può garantirci poi dagli errori inevitabili delle osservazioni ancora le più accurate? Nella complicatissima serie delle operazioni necessarie ad ottenere l'intento, il solo maneggio degli strumenti più o meno perfetti dee produrre qualche lieve discrepanza ne' risultati, cosicchè per tutte le indicate ragioni è a credersi fondatamente, che tanti metri diversi si avrebbero quante volte ripetuta fosse l'operazione per ottenerlo. E perciò la supposizione, che sia fisso in Natura il campione, a cui poter ricorrere per ricuperare il metro, se mai si smarrisse, va presa non in senso rigoroso, ma per approssimazione; e per evitar poi i

gravissimi inconvenienti, a cui ci recherebbe la continua fluttuanza in che per differenza appena di millimetri la lunghezza del metro sarebbe in grazia di successive scoperte, si stabilì per unità metrica invariabile il metro legale di linee 443,296 che si ottenne dai lavori di Mechen e Delambre, quantunque anche secondo le attuali fisiche cognizioni desso non sia più a rigore la decimilionesima parte del quadrante del meridiano.

480. Nè maggior esattezza sarebbe a sperarsi dalla lunghezza del pendolo, che con oscillazioni estremamente piccole batta secondi nel vuoto ad una determinata latitudine, come *Condamine* aveva proposto; poichè oltre l' inconveniente di far dipendere la misura delle distanze da due elementi, che le sono eterogenei *gravità*, *e tempo*, anche questo mezzo potrebbe come l' altro andar soggetto a sensibili alterazioni o ne' diversi paesi per qualche attrazione locale, che agisse sul pendolo in guisa da sottrarlo alle leggi generali del moto de' corpi, o in qualunque punto del globo, quando a notabili cambiamenti fosse assoggettata la sua fisica costituzione. Rimanendo però questa sempre la stessa, ed evitate le locali attrazioni, questo mezzo di fissar l' unità lineare avrebbe sull' altro il vantaggio d'un uso facilissimo, e meno soggetto agli inevitabili errori che accompagnano sempre le operazioni assai complicate; ed è perciò che la lunghezza del metro è stata legata d' una maniera sì precisa a quella del pendolo, che facil sarebbe il ritrovarla in tutti i tempi senza esser obbligati a ricorrere di nuovo alla misura del grande arco; e per tale oggetto la lunghezza del pendolo a secondi fu di bel nuovo colla più scrupolosa esattezza misurata da Borda all' osservatorio di Parigi. Così con

questo rapporto del metro al pendolo, offrendosi in natura nn doppio termine di confronto può dirsi meglio ottenuto l' intento di poter in essa a piacimento ritrovare quel tipo costante, che non si conseguirebbe con tanta facilità col mezzo dell' isolata ricerca della lunghezza del meridiano.

481. La notizia della determinazione del metro, e quindi di tutte le altre misure, che da lui derivano come diramazioni di un medesimo tronco, dopo che i lavori tutti eseguiti in nna impresa sì gigantesca l' unanime suffragio riscossero dell' intera deputazione di 22 celebri matematici tra i quali l' immortale La-Grange, che a solenne adunanza convennero sullo spirare del secolo XVIII per esaminar le basi del nuovo sistema, discuterne i metodi, verificarne le operazioni, rapidamente sulle ali della Fama propagossi alle vicine, e lontane nazioni, e con entusiasmo fu accolta da tutti i dotti di Europa. E sul riflesso che il lento, ma irresistibile impero della ragione suol rendere a poco a poco i popoli superiori alle gelosie nazionali e a tutti gli ostacoli del pregiudizio, sul riflesso che la scienza appartiene, come ben disse Davy, all' intero mondo, e non è il patrimonio di un paese, o di un epoca, chi non avrebbe creduto che gli utili risultati di questa benemerita concittadina di tutti gli uomini fossero finalmente addottati dovunque? Chi non avrebbe creduto (*vedi il giudizio uman come spess' erra*) che a poco a poco questo sistema metrico l' unico divenisse per tutto il mondo civilizzato? Eppure tanta è la forza d' invecchiato costnme in cuore umano, tanta è l' avversione de' popoli a tutto ciò, che si oppone alle antiche abitudini, tanto alla propagazione di quel nobile impianto si opposero le politiche circostanze de' tempi,

che a riserva di pochi dipartimenti della Francia fu escluso dal commercio cui renderebbe i più segnalati servigii.

Ma se la soddisfazione non abbiamo di vedere descritti metri, litri, grammi ne' libri delle pubbliche, e private amministrazioni, nelle partite de' traffici, nelle commerciali corrispondenze, vediam poi con piacere dal nostro Governo prescritto l' uso del metrico sistema nel *Censo*, e con piacer troviam pure continue applicazioni del metrico sistema ne' rendiconti delle naturali osservazioni, e sperienze, di cui abbondano i trattati scientifici, or che uno spirito analitico l' uso ha in esse introdotto della *misura*, e del *peso*.

Era dunque necessario acquistare un' idea del metrico sistema; nè questa dovea andar disgiunta da un cenno della sua utilità, e della sua storia a solenne, e grata ricordanza di quegli uomini sommi, che un diritto acquistarono alla comun gratitudine per la esecuzione di que' tanti lavori scientifici, che abbisognarono pel suo impianto, e che formano il più bello de' monumenti innalzati nel secolo decimottavo alla gloria delle scienze, e alla pubblica utilità. Che se il pregio di questa non si è abbastanza dai popoli per mancanza di reazione sentito, ciò nulla il merito oscura, e la gloria di que' dotti Filantropi, a cui giustificazione ripetiamo col Poeta » *In magnis et voluisse sat est*.

CAPO VII.

Teoria de' Problemi, ed equazioni di 1.° grado

Compiuta la *esposizione*, e *dimostrazione* de' processi risguardanti le primitive operazioni eseguibili sugli interi, e rotti sì numerici, che algebrici, facciamone tosto una applicazione utile, e dilettevole passando alla soluzione de' problemi di 1.° grado, che non esigono altre notizie oltre quelle, che fin quì abbiamo acquistate.

ARTICOLO I.

Nozioni preliminari intorno ai Problemi ed Equazioni.

482. Scopo principale dell' Algebra è la soluzione de' problemi, o quesiti, di *quelle proposizioni cioè, in cui si progetta di scuoprire qualche quantità incognita in grazia di qualche cosa, che si conosce*. Chiaro è dunque che nelle dimande suscettibili di soluzione nè tutto debbe esser noto, altrimenti mancherebbe l' oggetto della ricerca, nè tutto debbe essere ignoto, altrimenti ogni ricerca sarebbe vana: vi debbono perciò essere enunciate e *quantità note*, che si chiamano i *dati* del Problema, e si indicano algebricamente colle prime lettere, e *quantità incognite*, che si marcano colle ultime dell' alfabeto; e le *note relazioni*, che passano tra le quantità note, ed incognite, che chiamansi le condizioni del problema sono que' mezzi, che col sussidio del calcolo ci recano con sicurezza al ritrovamento di ciò che si ricerca, e contraddistinguono i

Problemi dagli enigmi. Le regole algebriche poi, con che si ottiene la soluzione de' quesiti sono tutte basate sovra un rapporto d' eguaglianza tra quantità note ed ignote, che le condizioni de' problemi anche i più intrigati, e difficili offrono all' occhio acuto, ed esercitato dell' Algebrista; e quando questo rapporto si è tradotto nel laconico linguaggio algebrico convertendo le parole in lettere, e segni analoghi, allora *membri* si chiamano le due quantità eguali, e precisamente *primo membro* la collezione di tutti i termini, che precedono il segno =, e *secondo membro* la collezione di tutti quelli, che il seguono.

483. Tra i quesiti, che ci vengono offerti ve ne ha de' sì facili (e tali son tutti quelli, cui abbiamo applicate le operazioni sugli interi, e rotti numerici) il cui enunciato tradotto in algebra, ci offre tosto un' eguaglianza fra l' incognita, che si cerca non avviluppata da altre quantità, e un assieme di quantità tutte note tra lor legate con segni indicanti o addizione, o sottrazione, o moltiplicazione, o divisione; e siccome questi problemi, per quanto abbiano complicato il 2.° membro d' eguaglianza, pur non esigono pella loro soluzione alcun *calcolo algebrico* ma la pura esecuzione delle operazioni aritmetiche, *aritmetici* si sono chiamati. Così se cerchisi *quanto sborsar debba ciascuno di 12 socii, che hanno beuto 3 bottiglie di malaga a paoli sei, e due bottiglie di cipro a paoli 3 la bottiglia*, chiamando x il numero de' paoli richiesto, è chiaro, che

$$x = \frac{3 \cdot 6}{12} + \frac{2 \cdot 3}{12} = 2$$

Ma se in problemi di tal natura sforzo alcuno d' ingegno non occorre per giungere al valore della cosa cercata, problemi vi sono di tutt'altra tempra, che tradotti in linguaggio algebrico, ci offrono anch' essi un rapporto d' eguaglianza, ma non già come ne' quesiti aritmetici, fra l' incognita isolata, ed altre quantità tutte note, ma fra quantità, e quantità polinomie, tra le quali trovasi l' incognita sì avviluppata, che vi vuò una serie di ragionamenti, e quindi il soccorso del calcolo per giungere ad *isolarla*, ed ottenerla eguale ad un' assieme di quantità tutte note: e poichè questi problemi, dopo essere stati tradotti in letterale linguaggio, hanno d' uopo del calcolo algebrico perchè si giunga a conoscere quali operazioni far convenga sulle quantità note, onde ottenere il valor dell' incognita, si chiamano perciò *algebrici*, e questi son l' oggetto delle attuali nostre ricerche.

484. Se p. e. si chiegga » *Di quanti soldati era forte un' armata di cui* $^1/_4$ *è rimasto sul campo di battaglia*, $^2/_5$ *si son fatti prigionieri, e* 1400 *sono fuggiti* » sebbene nell' enunciato non sia esplicitamente espresso rapporto alcuno di eguaglianza, pure l' analitico esame delle sue condizioni ci mostra, che l' intera armata era eguale al numero de' Guerrieri morti, più quello de' vivi costituito dai prigionieri, e dai fuggitivi; cosicchè chiamando x il numero esprimente l' intera armata, per soddisfare alle condizioni del problema, tal debbe essere x da dar luogo alla seguente eguaglianza $x = {}^1/_4 \times x + {}^2/_5 \times x + 1400$, che più brevemente può esprimersi (e tal uso d' ora innanzi pratticheremo sempre in simili casi) per

$$(A)\ x = {}^1/_4\, x + {}^2/_5\, x + 1400.$$

485. Or questa espressione ci dà non già un egua-

glianza *dimostrata*, poichè tal sarebbe se x fosse nota, ma solo un' eguaglianza *supposta*, un' eguaglianza cioè, che non veggiamo, ma che sappiamo doversi verificare, onde sieno soddisfatte le condizioni del problema. E tanto per ottener l' intento ci basta; poichè passando ad operare sui termini del supposto rapporto, e quindi anche sulla quantità incognita come se nota fosse, ecco come giungiamo a scuoprirla.

Se per soddisfare alle condizioni del problema debbe essere

$$x = {}^1/_4\, x + {}^2/_5\, x + 1400\ ,$$

togliendo da ambedue i membri dell' eguaglianza la stessa quantità ${}^1/_4\, x + {}^2/_5\, x$, il che si eseguisce col levarla effettivamente dal membro destro, e collo scriverla in istato di sottrazione nel sinistro (208), dovranno i due membri egualmente falcidiati rimaner eguali, dovrà cioè pur essere

$$x - {}^1/_4\, x - {}^2/_5\, x = 1400,$$

ovvero (§ 338) $\quad x\,(1 - {}^1/_4 - {}^2/_5) = 1400;$

e se per soddisfare alle condizioni del problema debbe essere $x\,(1 - {}^1/_4 - {}^2/_5) = 1400$, dividendo ambo i membri eguali per la stessa quantità $(1 - {}^1/_4 - {}^2/_5)$ dovrà pur essere

$$\text{(B)}\quad x = \frac{1400}{1 - {}^1/_4 - {}^2/_5} = \frac{1400}{{}^7/_{20}} = \frac{28000}{7} = 4000;$$

e finalmente se per soddisfare alle condizioni del problema x dovrà essere 4000, ciò equivarrà a quest' altra espressione « 4000 *è il real valore di* x » è cioè l' incognita che si ricercava; e perciò è ottenuta la soluzione del problema.

486. Quindi se la x esser debbe 4000, per soddisfare alle condizioni del problema, ossia perchè si abbia $x = {}^1/_4\, x + {}^2/_5\, x + 1400$, questa espressione,

che era un' *eguaglianza per supposizione* diverrà un' eguaglianza reale, che noi chiamiamo *equivalenza*, se sostituiremo 4000 ad x ovunque esso si trovi, ed avremo

(C) $4000 = {}^1/_4 \times 4000 + {}^2/_5 \times 4000 + 1400$,

della cui eguaglianza la verità vien confermata dalla esecuzione delle operazioni indicate, le quali ci recano alla seguente *identità*:

(D) $4000 = 4000$,

la qual ci assicura, che non è corso errore alcuno nel calcolo, mostrandoci che il trovato valore di x soddisfa realmente alle condizioni del problema.

487. Or se noi teniam dietro a quanto si è praticato per giungere alla soluzione dell' ora esposto quesito, stabilir possiamo le seguenti regole generali.

Quando ci si offre un Problema a risolvere, convien prima d' ogni altro scuoprire un qualche rapporto d' eguaglianza fra i dati, e le incognite, e quindi tradurre le parole da cui viene indicato e in lettere e cifre esprimenti le quantità, e in segni esprimenti le lor relazioni; e l' *espressione algebrica della supposta eguaglianza tra alcune quantità note ed ignote connesse tra loro a tenore delle condizioni del problema* è ciò che si chiama *Equazione*. Tale è stata la (A) (484).

E notiamo a tale proposito, che se anche senza pensare a problemi noi supponiamo un rapporto d' eguaglianza fra quantità note, ed ignote, se scriviamo p. e. a capriccio $3x - 20 = {}^3/_4\, x + 7$, anche questa eguaglianza è un' equazione a tenor della nostra definizione, poichè quantunque non sia derivata da un problema, pur sempre a un problema può riferirsi, alla cui enunciazione giunger possiamo colla inversa tradu-

zione delle lettere, cifre, e segni in parole, dicendo che dessa è l' equazione di un problema in cui cercasi *un numero tale di cui il triplo diminuito di venti è uguale a tre quarti di se più sette*; cosicchè conchiudiamo che come l' enunciato di ogni problema modificato se occorra per render esplicita la condizione di eguaglianza, si converte in equazione, così ogni equazione rappresenta un problema, è cioè l' enunciato d'un problema tradotto in algebrico linguaggio.

488. Tradotto il problema in linguaggio algebrico, ossia impiantata l' *equazione fondamentale*, poichè le nostre mire son dirette a trovare il valor dell' incognita, noi giungiamo all' intento assoggettando i membri dell' equazione a tali operazioni, che alterandone il valore senza distruggerne l' eguaglianza ci offrano nuove equazioni, in cui la x si trovi sempre meno avviluppata dalle altre quantità, finchè si giunga a quella, che dicesi *equazione finale*, in cui l' incognita positiva senza coefficiente nè intero, nè frazionario, e senza esponente, stà sola in un membro, e nell' altro vi sono quantità tutte note; e dicesi *finale* questa equazione siccome l' ultima che ci determina il valore dell' incognita, la quale cessa di esser tale dal momento, che si trova eguale ad una assieme di quantità tutte note; e tale è l' equazione (B) (485). Il metodo poi, che si prattica per giungere dalla equazione *fondamentale* alla *finale*, per isolar l' incognita dalle altre quantità con cui trovasi avvilnppata, è ciò che chiamasi *Analisi algebrica*, o *Risoluzione delle equazioni*, in cui tutta consiste la differenza fra i problemi algebrici e gli aritmetici. Questi infatti tradotti che sono in linguaggio letterale ci offrono l' incognita sola in un membro, mentre esiston nell' altro quantità tutte note, sic-

chè può dirsi, che la stessa traduzione algebrica de' problemi aritmetici è un' equazione finale, a cui non pervengono i problemi algebrici che in grazia dell' analisi; ma giunti a questo punto, essi si trovano alla condizione stessa de' problemi aritmetici, mentre sì per gli uni che per gli altri non resta che la sola *parte prattica*, cioè la esecuzione delle aritmetiche operazioni nel 2.° membro indicate.

Finalmente ottenuto il valor della incognita, un criterio per esplorare se niun errore siasi commesso nel calcolo è l' osservare se il valor trovato soddisfa alle condizioni del problema, e per tale oggetto si sostituisce alla x ovunque trovisi nell' equazione fondamentale, e così se non vi è sbaglio nell' operato, la *supposta* eguaglianza convertesi in una vera equivalenza, e tale è l' espressione (C) (486); ed eseguendo le operazioni indicate dai segni in ambo i membri esistenti, l' equivalenza si trasforma in identità, e tale è (D) (486).

489. Frattanto osserviamo che le 4 distinte espressioni (A), (B), (C), (D) ottenute nel successivo tratto de' nostri ragionamenti ci offrono tutte un rapporto d' eguaglianza: ma il primo (A) (484) è un' equazione fondamentale, un' *eguaglianza cioè per supposizione fra quantità note ed incognite comunque connesse a cui ci reca l' algebrica traduzione di un problema*: il 2.° (B) (485), a cui giungiamo per mezzo della analisi è l' equazion finale, *quell' eguaglianza cioè che ci determina il valor dell' incognita*: il 3.° (C) (486), che abbiamo ottenuto sostituendo nell' equazion fondamentale ad x il suo valore, è un' equivalenza, *una reale eguaglianza cioè fra due quantità aventi sotto un' aspetto diverso lo stesso valore*: il 4.° (D) (486), che nasce dall' esecuzione di tutte le operazioni

indicate dai segni esistenti in ambedue i membri della equivalenza è un identità, l'*eguaglianza cioè di due quantità aventi eguale aspetto, e valore*.

Onde aver poi una norma per conoscere con quali metodi si possono risolvere tante, e sì diverse equazioni, in che si traducono infiniti problemi di varia indole, e forma, gli algebristi hanno riconosciuto utile il dare ad essi una classificazione.

490. Si sono infatti distinti i problemi, e le equazioni per rapporto al *numero delle incognite*, che sono nell' equazione introdotte. Si sono chiamati *ad una incognita*, se nella loro espressione algebrica è impiegata un' incognita sola, o perchè realmente una cosa sola si cerchi, o perchè se più se ne cerchino, sono sì evidenti i rapporti che hanno ad una incognita tutte le altre, che colla massima facilità possono esprimersi per mezzo di essa, e quindi per mezzo di essa determinarsi. Si sono chiamati problemi a due incognite quelli nella cui algebrica espressione sono realmente contrassegnate due incognite; ec, ec.

491. Si sono distinti i problemi, e le equazioni anche in *gradi*, che si son fatti dipendere dagli esponenti delle incognite. Si son detti di 1.° grado, quando non solo nell' equazione fondamentale, ma in tutte quelle ancora, che ne derivano prima di giungere alla finale, non vi sia termine, che contenga più d' un fattore incognito; e si son dette di 2.°, di 3.°, di 4.° grado, se il 2, il 3, il 4 esprima il numero de' fattori incogniti o eguali o diversi, che si trovano nel termine, che ne ha più di tutti.

ARTICOLO II.

Traduzione de' Problemi in equazione, e risoluzione generale delle equazioni di 1.° grado a un' incognita.

492. Non essendovi difficoltà alcuna nella parte *prattica* de' problemi, cioè nella esecuzione delle operazioni aritmetiche, che si trovano necessarie al conseguimento del valor dell' incognita, noi riguardiamo come sciolti i problemi, quando siamo giunti a conoscere quali siano le operazioni, che debbono sulle quantità date eseguirsi, ossia quando si è soddisfatto alla loro *parte teorica*. Due ben distinte operazioni abbraccia però la parte teorica de' problemi algebrici, la *traduzione* cioè dell' enunciato in equazione, e la di lei *risoluzione*: conviene cioè I. esprimere con caratteri algebrici il rapporto d' eguaglianza offertoci dalle condizioni del problema, e II. *isolare* l' incognita, che a differenza de' problemi aritmetici, trovasi sempre avviluppata da altre quantità, ossia *risolvere l' equazione*.

Traduzione de' Problemi in equazione.

493. Circa il primo lavoro è a notarsi che in alcuni problemi dalla stessa loro enunciazione è suggerito il rapporto d' egnaglianza, che dee tradursi in equazione, e allor dicesi *esplicito*: in alcuni altri questo rapporto è *implicito*, non vien cioè presentato direttamente dalle condizioni del quesito, ma fa d' uopo, che il calcolatore il tragga fuori per così esprimermi dalle loro viscere, o il formi coi materiali, che le condizioni stesse gli somministrano.

494. Per riuscire in ambedue i casi a tradurre facilmente in equazione i problemi, giova esercitarsi nel fòrmare delle equazioni a capriccio, e quindi considerandole come provenienti da un problema, trovarne l' enunciato col tradurle nel comune idioma, e giova poi far l' inverso, tradurre cioè in caratteri algebrici l'enunciazione dei problemi, cominciando dai più facili, perchè col molto far prattica nel passare dal linguaggio algebrico all' ordinario, e viceversa, giungiamo ad addomesticarci colla scrittura del calcolo, e ci formiamo quell' occhio, e criterio algebrico necessario in tal circostanza. Acquistata quest' abitudine, quando ci vien presentato un problema anche assai complicato, dopo di averlo letto attentamente, fa d' uopo distinguere le quantità note dall' incognite, notando le prime o con numeri o lettere, e sempre con lettere le seconde; e quindi tornando a legger di nuovo giova tradurre in scrittura algebrica di mano in mano che si notano le successive condizioni.

495. Così operando se trattisi di problemi, in cui il rapporto d' eguaglianza è *esplicito*, senza artificio alcuno troviamo convertito l' enunciato in equazione, come nel seguente esempio possiamo verificare. » *Claudia interrogata in pubblico sulla età sua, e de' suoi 3 figli, dopo averci annunciato che il figlio maggiore ha 20 anni, il secondo ne ha 6, il terzo ne ha 4 soggiunge che la sua età più il quadrato dell' età del figlio maggiore moltiplicato per l' età del secondo, e diviso pel quadrato dell' età del più piccolo, è uguale al quadrato dell' età del maggiore diviso per l' età del più piccolo, più la di lei stessa età moltiplicata pel quadrato dell' età del medio, e divisa pel*

quadrato della età del minore. » Stabilite infatti le seguenti denominazioni.

Età della madre $= x$ *Età del figlio minore* $= a$
Età del figlio 2.° $= b$ *Età del figlio maggiore* $= c$
tosto il problema traducesi nella seguente equazione

$$x + \frac{bc^2}{a^2} = \frac{c^2}{a} + \frac{b^2x}{a^2}.$$

Se poi trattisi di problemi, in cui il rapporto d' eguaglianza è *implicito*, come p. e. nel quesito » *Essendo in una mostra l' indice de' minuti sovra quello delle ore a mezzodì, in qual istante l' indice de' minuti si troverà di nuovo sopra quello delle ore* (515)? in tali casi onde riescir nell' intento le regole indicate non bastano: fan d' uopo ancora degli artificii per estricar fuori dalle condizioni il rapporto d' eguaglianza, artificii che variano col variare delle condizioni stesse, sicchè non dipendono da regole generali, ma solo da una certa penetrazione di spirito, al cui sviluppo, e incremento contribuiscono e il lungo esercizio, e la varietà degli esempii che appositamente in buon numero passeremo a risolvere.

Risoluzione generale delle equazioni di primo grado a un' incognita.

Impiantata l' equazione fondamentale convien passare alla sua risoluzione: e le regole generali per di cui mezzo data un' equazione anche la più intricata, si giunge alla finale, in cui la x sia sola in un membro, e nell' altro vi sieno quantità tutte note, sono appoggiate ai due assiomi seguenti.

496. I. *I due membri d' un' equazione restano*

eguali se ad entrambi si aggiungano o tolgano quantità eguali. E perciò l' eguaglianza non è alterata, se un termine si cancella da un membro, e si trasferisce nell' altro col segno opposto, poichè si sottrae egualmente un dato termine tanto col non scriverlo nel membro in cui esisteva, quanto collo scriverlo col segno opposto nel membro in cui non era (208). Di quì la regola prattica comunissima, che i termini si trasportano a piacimento da un membro all' altro senza alterar l' eguaglianza col solo cambiamento del segno.

497. II. *I due membri d' un' equazione restano eguali se ambedue si moltiplichino o si dividano per una medesima quantità*.

498. Posti questi principii per dare a qualunque equazione di primo grado a un' incognita la medesima forma, e la più semplice, e analoga a quella, che dagli algebristi suol darsi alle equazioni di tutti i gradi nella loro generale teorìa, conviene I.° fare sparire la x dai denominatori, se mai in essi esistesse, moltiplicando per x ambedue i membri dell' equazione, poichè con questo mezzo mentre sparisce la x in que' denominatori, che la contenevano, i membri dell' equazione così modificati proseguono ad essere eguali (497): p. e. $a + {}^{c}/_{x} = {}^{m}/_{n} + {}^{c}/_{mx}$ diventa $ax + c = {}^{mx}/_{n} + {}^{c}/_{m}$, in cui non v' è più x ne' denominatori; e 2.° a norma della regola (496) convien recare nel primo tutti i termini, che son nel secondo membro, sicchè desso rimanga eguale a zero; e quando in grazia di queste due avvertenze un' equazione siasi ridotta ad un' assieme di termini equivalenti a zero, e senza incognita nel denominatore, qualunque ella sia non risulta che di due sole sorte di termini, cioè dei *noti*, e di quelli, che han no per *fattore la x*. Tutti i termini noti

positivi, o negativi, interi, o frazionarii che sieno, possono riguardarsi come costituenti un tutto polinomio espresso per A; ed estraendo fuori il fattore x dal termine, o da tutti i termini se ve ne è più d' uno che il contengono, avremo inoltre x moltiplicata per una quantità o monomia o polinomia, che chiamar possiamo il suo coefficiente, ed esprimere per C: e in tal guisa ad ogni più intricata equazione dar possiam quest' aspetto « $Cx + A = 0$. » Ora per ricavare da questa equazione fondamentale il valore di x, portiamo A nel 2.° membro, ed avremo $C\,x = - A$. Dividiamo ambo i membri per C; ed avremo (497)

$$\frac{Cx}{C} = \frac{-A}{C}, \text{ ossia } x = \frac{-A}{C}$$

onde ecco la formola generale delle equazioni di primo grado a un' incognita colla sua risoluzione

Equazione fondamentale	*Equazione finale*
$Cx + A = O$	$x = \frac{-A}{C}$

Dal che rileviamo, che quando ad una equazione anche la più intricata si è data la forma $Cx + A = 0$, la x è uguale all' assieme di tutte le quantità note prese col segno opposto a quello, che avrebbero nel 1.° membro, e diviso pel di lei coefficiente.

499. Facciamo un' applicazione di queste formole alla equazione complicata del problema enunciato al §. 495, che è

$$x + \frac{bc^2}{a^2} = \frac{c^2}{a} + \frac{b^2x}{a^2}$$

Trasportaudo tutti i termini del 2.° membro nel 1.°, si ha

$$x + \frac{bc^2}{a^2} - \frac{c^2}{a} - \frac{b^2x}{a^2} = 0 ,$$

ed estraendo fuori la x dai termini che la contengono si ha

$$(1 - \frac{b^2}{a^2})x + (\frac{bc^2}{a^2} - \frac{c^2}{a}) = 0 ,$$

equazione che è la stessa formola generale $Cx + A = 0$, quando riflettasi, che in questo caso particolare

$$C = (1 - \frac{b^2}{a^2}), \text{ ed } A = (\frac{bc^2}{a^2} - \frac{c^2}{a});$$

onde' è che al caso nostro applicando la risoluzione generale

$$x = \frac{-A}{C}, \text{ avremo } x = \frac{\frac{-bc^2}{a^2} + \frac{c^2}{a}}{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{c^2}{a+b} = 40$$

risultato, che si ottiene sostituendo alle lettere i numeri offertici dal problema al § 495, sicchè conchiudiamo che anni 40 è l'età della madre, e questo valore $\frac{c^2}{a+b}$, ovvero 40 vedesi soddisfare alle condizioni del problema se ad x sostituiscasi nell' equazione fondamentale.

ARTICOLO III.

Applicazione della risoluzione generale delle equazioni di 1.° grado a un' incognita a varii problemi .

500. *Un pigro pittore si è obbligato ad un lavoro a condizione di ricevere stipendio a ragione di lire 15 al giorno per tutto il tempo che dipinge , e di sborsare a ragione di lire 5 al giorno per tutto il tempo che sta in ozio nelle 10 ore stabilite per la giornaliera occupazione . Dopo 60 giorni riceve 24 lire . Quante giornate ha lavorato ?* Risultato : giornate 16 $^1/_5$,

In questo problema implicito è il rapporto d' eguaglianza , ma agevolmente si deduce dalle sue condizioni , riflettendo che lire 24 sono l' eccesso delle lire guadagnate sulle perdute , e son perciò eguali al guadagno meno la perdita .

Ora il numero delle giornate di lavoro $= x$
Il numero delle giornate passate in ozio $= 60-x$
Le lire guadagnate ne' giorni di lavoro $= 15x$
Le lire perdute ne' giorni di ozio $= 5\,(60\text{-}x)$

Ma le lire guadagnate men le perdute son 24 : dunque $15\,x - 5\,(\,60 - x\,) = 24$, donde $x = 16\ ^1/_5$ (§ 498)

501. *Si promettono a un pescatore scudi 7 per ogni tirata di rete col pesce a patto che debba pagarne 4 per ogni tirata senza preda . Dopo 30 tirate ha guadagnato scudi 89. Quante sono state le tirate felici , e le vuote di effetto ?* Risultato : le prime sono state 19, e 11 le altre .

L' indole di questo problema è simile all' antecedente , eppure se vi si applicassero i suoi numeri sarebbe impossibile, perchè

si avrebbe un risultato frazionario che non può conciliarsi col numero delle lirate, come conciliasi col numero delle giornate.

502. *L' età della figlia è attualmente la metà dell' età di sua madre: 13 anni fa ne era il terzo. Qual' è l' età di ambedue?* Risultato: la madre ha 52 anni, e 26 la figlia.

Sia l' età della madre $= x$. *L' età della figlia è* $x/2$

L' età della madre 13 *anni fà era* $x - 13$;

L' età della figlia 13 *anni fà era* $x/2 - 13$;

Ma allora l' età della figlia era il terzo di quella della madre:

Dunque $x/2 - 13 = \frac{x - 13}{3}$, donde $x = 52$; e $x/2 = 26$.

503. *Il numero delle macchine del gabinetto fisico A 16 anni fa era* $\frac{1}{5}$ *del numero delle macchine del gabinetto B, ma avendone ogni anno acquistate 12, mentre il gabinetto B sole 4 all' anno, e vi fu un anno che non ne acquistò alcuna, ora il numero delle macchine del gabinetto A è doppio di quelle di B. Quante erano 16 anni fa, e quante sono attualmente le macchine in ambedue i gabinetti?* Risultato: 16 anni fa erano 8 in A, e 40 in B; ora sono 200 in A, e 100 in B.

504. *Il cholera morbus avendo dominato in una Capitale per* 3 *mesi, è perito nel* 1.° *mese* $1/225$; *nel* 2.° $1/150$; *nel* 3.° $1/75$ *della intera popolazione. Quanta era la popolazione, e a quanto ascende il numero de' morti in ciascun mese?* Risultato: la popolazione era 790200. Son morti nel 1.° mese 3512, nel 2.° 5268, nel 3.° 10536.

Infatti l' intera popolazione x era uguale ai morti più i superstiti. Dunque

$$x = x/225 + x/150 + x/75 + 770884$$

ossia $x\ (1 - {}^1/_{225} - {}^1/_{150} - {}^1/_{75}) = 770884$ donde

$$x = \frac{770884}{1 - {}^1/_{225} - {}^1/_{150} - {}^1/_{75}} = \frac{770884}{{}^{439}/_{450}} = 790200.$$

Sostituendo ora ad x il suo valore nella equazione fondamentale vediamo verificarsi le condizioni del problema, e troviamo il numero de' morti per ciascun dei 3 mesi.

505. *Quanti erano i limoni rubati da Cajo in un giardino se per uscire ha douto cederne la metà al primo custode, la metà del resto al secondo, la metà del resto al terzo, ed è sortito con un sol limone?* Risultato: 8.

506. *Quanti sono gli studenti d' una Università, sapendosi che la metà della scolaresca studia la Legge, un terzo la medicina, e soli* 126 *le altre Scienze, e le lettere?* Risultato: il numero de' studenti è 756, e di questi 252 studiano la Medicina, e 378 la Legge.

507. *Marco lasciando alla sua morte incinta la moglie dispone che se nascerà un Maschio vadano ad esso* $^2/_3$ *del suo patrimonio, e* $^1/_3$ *alla madre: se nascerà una femmina vada ad essa* $^1/_3$ *del patrimonio e* $^2/_3$ *alla madre. Nascono un maschio, e una femmina: come dovrà distribuirsi l' eredità?* Risultato: $^1/_7$ del patrimonio alla femmina, $^2/_7$ alla madre, $^4/_7$ al maschio.

Infatti è mente del Testatore, che la madre abbia il doppio della figlia, e il maschio abbia il doppio della madre. Perciò

Fatta la parte della figlia $= x$
La parte della madre esser debbe $= 2x$
La parte del figlio esser debbe $= 4x$
e quindi l' intera eredità fatta $= a$
avremo $x + 2x + 4x = a$, donde $x = {}^a/_7$

508. *Una torre alta piedi 260 ha tre piani ; l' altezza del primo è due terzi di quella del secondo , e quella del secondo è doppia dell' altezza del terzo ; qual' è l' altezza di ciascun piano?* Risultato ; l' altezza x del terzo piano è 60: l' altezza $2x$ del secondo è 120, quella del primo , cioè 4 terzi di x è 80.

509. *Posto che per ogni grado centigr. di temperatura l' aria , e ogni gas aumenti di* 0,00375 *del suo volume a zero* (426) , *che volume avrebbe a zero una quantità d' aria , che alla temperatura di* 36°,5 *ha il volume di litri* 153,27 , *rimanendo costante la pressione* ? Risultato : Litri 134,817

Infatti il volume che avrà a zero quella quantità d' aria , che alla temperatura di 36°,5 ha il volume di litri 153,27 è la cosa che si ricerca , e che facciamo $= x$.

Ma il volume di 153,27, che l'aria ha a 36°,5 non è che il volume x che avrebbe a zero più l' aumento in lui prodotto dalla dilatazione, e l'aumento prodotto dalla dilatazione essendo per ogni grado $x \times 0{,}00375$, per 36°,5 sarà $x \times 0{,}00375 \times 36{,}5$:

Dunque $x + x \times 0{,}00375 \times 36{,}5 = 153{,}27$;

e quindi $x = \dfrac{153{,}27}{1 + 0{,}00375 \times 36{,}5} = 134{,}817$

510. Volendo dare a questo problema una soluzione generale , chiamato V il volume , che sotto una costante pressione atmosferica una determinata quantità di gas ha alla temperatura T, x il volume , che avrà alla temperatura zero, otteniamo la seguente formola applicabile a qualunque caso .

$$x = \frac{V}{1 + 0{,}00375T}$$

511. *Che volume hanno a zero 12 litri di gas a 15 gradi?* Risultato : litri 11,36.

512. *Litri 83,547 di gas a 11°,23 che volume prenderebbero se sotto la stessa pressione fossero portati a 36°,25 ?* Risultato : litri 91,069.

Infatti il volume del gas a 36°,25 ossia x è uguale al volume, che avrebbe a zero più l' aumento di volume prodotto in grazia dei 36°,25.

Ora il volume di litri 83,547, che ha il gas a 11°,23 ridotto a zero è $\frac{83,547}{1+0,00375\times11,23}$ (§ 510)

L' aumento di questo volume per 36°,25 è lo stesso volume a zero moltiplicato per $0,00375\times36,25$, è cioè $\frac{83,547\times0,00375\times36,25}{1+0,00375\times11,23}$: Dunque

$$x=\frac{83,547}{1+0,00375\times11,23}+\frac{83,547\times0,00375\times36,25}{1+0,00375\times11,23}$$

e fuor traendo 83,547 fattor comune ai termini del 2.° membro, si ha

$$x=83,547\times\frac{1+0,00375\times36,25}{1+0,00375\times11,23}=\frac{94,9041703125}{1,0421125}$$

$$=91,069.$$

513. E se a questo problema voglia darsi un' aspetto, e una soluzione generale, se cioè si cerchi qual volume x prenderebbe alla temperatura T' un dato volume V di gas alla temperatura T, supposta sempre eguale la pressione, sostituendo i valori generali ai particolari nell' ultimo risultato, otteniamo la formola applicabile a qualunque caso.

$$x=V\times\frac{1+0,00375T'}{1+0,00375T}$$

514. *Che volume hanno a 20 gradi 100 litri di gas a 40 gradi?* Risultato: 93,478.

515. *In una mostra da oriuolo la lancetta de' minuti è sovra quella delle ore al mezzo dì. Quando, o in qual punto della mostra la prima si incontrerà di nuovo colla seconda?* Risultato: dopo un' ora, 5 minuti, e $^5/_{11}$.

Ed in vero quando la lancetta de' minuti ha percorsa l' intera mostra, e trovasi di nuovo sul punto delle ore 12, quella delle ore che è 12 volte men celere è sul preciso punto di un' ora. In tale istante la distanza tra una lancetta e l' altra è il dodicesimo della intera periferia, che è percorso in 5 minuti dalla lancetta più celere, e che faremo $= a$.

Considerate le lancette in questo istante, chiamiamo x lo spazio che percorrere dee quella delle ore finchè è raggiunta da quella de' minuti; ed è ben chiaro, che quando la prima ha percorso lo spazio x al fin del quale è raggiunta dalla seconda, questa dee aver percorso $a+x$: ma lo spazio $a+x$ è 12 volte più grande dello spazio x, perchè corso nel medesimo tempo da una lancetta 12 volte più veloce: dunque vi vogliono $12x$ per eguagliare $a+x$; e perciò fatto $12=n$ avremo

$$nx = a+x \text{, donde } x = \frac{a}{n-1}$$

Dunque l' indice de' minuti preso in considerazione nel punto di mezzo dì, si vede che dee percorrere la mostra intera, cioè lo spazio che comprende minuti 60, e dopo esser così tornato al punto d' ond' era partito, dee di più percorrere $a+x$, cioè $a+\frac{a}{n-1}$, cioè lo

spazio che comprende minuti 5 più $^5/_{11}$ di minuto (essendo a lo spazio che comprende minuti 5, ed $n-1 = 11$) per incontrar di nuovo l' indice delle ore, dee cioè impiegare ore 1, minuti 5, e $^5/_{11}$.

516. *La lancetta de' minuti trovasi sopra quella delle ore tra le 5, e le 6: Che ora è?* Risultato: sono ore 5, minuti 27 e 3 undicesimi.

517. *Se un Corriere B 3 volte più veloce di A si muove quando A ha percorse 12 miglia, dopo quante miglia il raggiugnerà?* Risultato: dopo 18 miglia.

Il raggiugnerebbe dopo miglia 17 e un quarto se si muovesse colla velocità eguale ad una volta e un terzo quella dell' altro dopo che A percorso avesse miglia 5 e 3 quarti.

518. *Un Corriere B 4 volte più veloce di A è partito dal medesimo punto ore 2 più tardi di A, quante ore impiega a raggiungerlo?* Risultato: minuti 40.

Infatti B per giungere ove trovasi A nel momento in cui egli comincia a muoversi dee impiegare la quarta parte di 2 ore, ossia $^2/_4$. Per raggiugnerlo debbe in seguito impiegare un tempo x, sicchè tutto il tempo impiegato da B sino al punto d' incontro è $^2/_4+x$, mentre il tempo impiegato da A è $2+{}^2/_4+x$. Ma il tempo impiegato da B 4 volte più veloce esser debbe 4 volte minore del tempo impiegato da A: Dunque

$$4\ (^2/_4+x) = 2+{}^2/_4+x\text{, donde } x={}^1/_6.$$

Quindi il tempo impiegato da B per raggiugnere A, ossia $^2/_4+x$ sarà $^2/_4+{}^1/_6={}^2/_3$ d' ora, ossia 40 minuti.

519. *Se B con velocità 2 volte e mezzo maggiore di A si muovesse un' ora, e un quarto più tardi di A quanto tempo impiegherebbe a raggiugnerlo?* Risultato: minuti 50.

520. Alcuni problemi esigono pella loro soluzione de' particolari artificii diretti ad eliminare alcune quantità, che son d' imbarazzo nel calcolo. Eccone un' e-

sempio. *Qual' è la frazione ordinaria equivalente ad una decimale periodica?* Il maneggio delle equazioni ci reca al risultato stesso, che già ottenemmo con altro metodo (429). Sia p. e. la frazion periodica 0,324324... Chiamando x la sua equivalente frazione ordinaria sarà

$$x = 0,324324....$$

Moltiplicando ambedue i membri per l' unità seguita da tanti zeri quante sono le cifre decimali del periodo avremo

$$100x = 324,324324....$$

Ora per avere un valore di x, in cui più non siavi l' espressione, che dovrebbe esser proseguita all' infinito, ricorriamo al ripiego di sottrarre i rispettivi membri della 1.^{a} da quelli della 2.^{a} equazione, mentre essendo eguale in ambedue la frazione decimale periodica avremo

$$999\,x = 324, \text{ donde } x = {}^{324}/_{999}$$

come ottenemmo (429).

Altri problemi danno luogo ad importanti osservazioni, ed eccone alcuni.

521. *Adone ha il permesso di cogliere quanti fiori gli piaccia in un giardino per poi tutti dispensarli a delle Ninfe che vi sono intervenute a patto di darne in maggior numero a quelle che stima più belle, e che la prima a ricevere il dono ne abbia* 8 *più il settimo del rimanente de' fiori colti; la* 2.ª *due volte* 8 *più il settimo de' fiori rimasti, la* 3.ª *tre volte* 8 *più il settimo de' fiori residui, e così di seguito. Memore però Adone delle tristi conseguenze del giudizio di Paride coglie tal numero di fiori, che alla fin della distribuzione fatta a tenor dell' indicata legge ogni Ninfa parte contenta con un mazzo egua-*

le a quello di tutte le altre . Quanti fiori Adone ha distribuito , quante sono le Ninfe , e di quanti fiori è composto ogni mazzo ? Risultato : Il numero totale de' fiori distribuiti è 288. Le Ninfe son 6; e quindi di 48 fiori è composto ogni mazzo .

Per giungere a tali risultati notiamo prima d' ogni altro , che sebbene sieno 3 le cose cercate , pure il problema non è che a un' incognita sola (490), poichè noto il numero de' fiori colti , tutto il resto è pur noto : infatti il numero de' fiori dati alla prima Ninfa , ossia il 1.° mazzo è 8 più la settima parte del numero totale diminuito di 8, e a questo è per ipotesi eguale il numero de' fiori di ciascun' altro mazzo . Quante volte poi il numero de' fiori componenti un mazzo è contenuto nel numero totale , tanti i mazzi , o le Ninfe saranno . Tutto il quesito riducesi dunque alla ricerca del numero de' fiori colti , che faremo $= x$. Ora per le stabilite condizioni

I. *mazzo* è $8 + \frac{x-8}{7}$, ovvero (fatto $8=a$, e $7=d$) è

$$a + \frac{x-a}{d} = \frac{ad+x-a}{d} = \frac{(d-1)a+x}{d}$$

II. *mazzo* è $$2a + \frac{x-2a-\frac{(d-1)a+x}{d}}{d} = \frac{(2d^2-3d+1)a+(d-1)x}{d^2}$$

III. è $$3a + \frac{x-3a-\frac{(d-1)a+x}{d}-\frac{(2d^2-3d+1)a+(d-1)x}{d^2}}{d} =$$

$$\frac{(3d^3-6d^2+4d-1)\ a + (d^2-2d+1)\ x}{d^3}$$

E similmente operando può trovarsi l' espressione algebrica del numero de' fiori componenti il 4.°, il 5.° mazzo, ec. , e queste determinazioni riesciranno per esercizio di calcolo assai utili agli allievi .

Per la soluzione del problema basta però averne due ; e le più semplici, quali sono quelle del 1°, e 2° mazzo sono le più comode . Infatti dovendo i mazzi esser eguali , abbiamo il primo mazzo eguale al secondo , cioè

$$\frac{(d-1)a+x}{d} = \frac{(2d^2-3d+1)a+\ (d-1)\ x}{d^2}$$

e ridotto il 1.° membro allo stesso denominator del 2.°, sviluppate le parentesi si ha finalmente

$$x=(d^2-2d+1)a = (d-1)^2a$$

522. Potea però egualmente istituirsi l' equazione tra l'espressione del 1.°, e 3.° mazzo , del 2.°, e del 3.°, del 3.° e 4.°, ec. e in ogni caso si sarebbe ottenuto sempre il medesimo risultato $x = (d-1)^2a$. Or questo e simili problemi a un' incognita , ne' quali v' è più d' una equazione, per di cui mezzo si può ottenere lo stesso identico valore di x , siccome ci offrono più strade per cui giungere alla sua determinazione , sono perciò chiamati *problemi più che determinati* .

523. Frattanto la risoluzione dell' equazione ci ha dato il numero totale de' fiori , cioè $x=(d-1)^2\ a = (7-1)^2 8 = 288$ nel nostro caso particolare .

Il numero de' fiori del 1,° e di ciascun mazzo essendo $\frac{(d-1)a+x}{d}$, sarà $\frac{(d-1)a+\ (d-1)^2a}{d} =$

$(d-1)\,a = (7-1)8 = 48.$

Il numero de' mazzi, o delle Ninfe è il numero totale de' fiori diviso pel numero de' fiori componenti un mazzo, ossia è

$$\frac{(d-1)^2 a}{(d-1)\,a} = \frac{(d-1)\,(d-1)a}{(d-1)\,a} = d-1 = 6$$

524. Or questi risultati ci annunciano I. che un numero affine possa a tenor dell' indicata legge colla quale si sono i fiori distribuiti ripartirsi in tante parti tutte eguali, premessa la dichiarazione, che noi chiamiamo col nome di *divisore* quella quantità costante (7 nel caso nostro), che ci precisa la frazione del rimanente del numero totale, che a tenor della legge esister dee in ciascuna parte, fa d'uopo che sia $(d-1)^2 a$, che sia cioè il quadrato del divisore già diminuito di 1 moltiplicato per quella quantità, che trovasi semplice nella 1.ª parte, duplicata nella 2.ª triplicata nella 3.ª ec. II. che il numero delle unità di ciascuna parte è $(d-1)\,a$, è cioè il divisore diminuito di 1 moltiplicato per quella quantità che vien presa semplice nella prima parte, che vien duplicata nella 2.ª, ec. III. che il numero delle parti è $(d-1)$ è cioè lo stesso divisore diminuito di 1.

525. E dopo queste notizie veggiamo pur chiaramente che se nel problema (521) oltre alle condizioni, che il 1.º mazzo di fiori sia eguale al 2.º, al 3.º ec, si fosse aggiunta p. e. quest' altra condizione, *che il numero totale de' fiori fosse il quadrato del numero de' mazzi, o delle Ninfe*, per soddisfare a questa converrebbe si avesse $x = (d-1)^2$, mentre per soddisfare alle altre fa d'uopo che $x = (d-1)^2 a$; e perciò essendo assurdo, che una stessa quantità sia eguale ad un

tempo a due grandezze diverse, la condizione aggiunta sarebbe colle altre incompatibile, e quindi renderebbe il *problema impossibile*.

526. Finalmente non è difficile l' accorgersi, che l' eguaglianza di tutte le parti, che si ottengono nell' indicato ripartimento dipende da una proprietà del quadrato del binomio $(n-1)$; ed è che *se si divida il quadrato del binomio* $(n-1)$ *in parti formate con questa legge, che la prima risulti di* 1 *più l' ennesimo del resto, la* 2.^{a} *di* 2 *più l' ennesimo del resto*, ec. *finchè il resto divenga zero, ciascuna di queste parti, che prese insieme formano il quadrato esprime la sua radice*. *Ed infatti*

La I. parte è $1+\dfrac{(n-1)^2-1}{n}=n-1$

La II. parte è $2+\dfrac{(n-1)^2-(n-1)-2}{n}=n-1$

La III. parte è $3+\dfrac{(n-1)^2-2(n-1)-3}{n}=n-1$

ec. ec.

527. *Un padre distribuisce una vincita fatta al lotto ai suoi figli dando al primo lire* 500 *e un undicesimo del resto: al secondo lire* 1000 *e un undicesimo del resto: al terzo lire* 1500 *e un undicesimo del resto ec., e tutti i figli trovansi egualmente beneficati. A che monta la vincita: quanti sono i figli: e quanto tocca a ciascuno?* Risultato: la vincita è lire 50000: i figli son 10, e ciascuno ha auto in dono lire 5000.

Se il primo figlio riceuto avesse un quarto di scudo, e un settimo del rimanente, il secondo due quarti e un settimo del rimanente, ec, la vincita sarebbe di scudi 9: i figli sarebbero 6, e ognuno avrebbe riceuto scudi 1 e mezzo.

Se il primo figlio riceuto avesse un venticinquesimo di scudo e la sesta parte del rimanente, ec., la somma distribuita sarebbe

uno scudo, cinque sarebbero i figli, e un quinto di scudo la loro parte.

528. *In una contrada di Londra il gas destinato per la notturna illuminazione contenuto in un gran serbatojo può a piacimento diramarsi per mezzo di tubi forniti di rubinetto a tre termolampade. Ardendo isolatamente la 1.ª lo consuma tutto in ore 60, la 2.ª in ore 30, la 3.ª in ore 10. Ardendo tutte e tre contemporaneamente, basterà il gas per la illuminazione d'una notte intera?* Risultato: l' illuminazione durerà per ore $6\ ^2/_3$, ossia per ore 6, e minuti 40.

La somma delle 3 quantità di gas consumato dalle 3 termolampade pel numero x di ore in cui hanno durato ad ardere insieme, è uguale a tutto il gas contenuto nel serbatojo, e che faremo $= 1$.

La 1.ª termolampada impiegando ore 60 pel consumo totale del gas, in un' ora ne consuma $^1/_{60}$, e perciò in un numero x di ore in cui arde simultaneamente alle altre ne consuma $^1/_{60}$ ripetuto per quanto è il nnmero x delle ore, ne consuma cioè $^1/_{60} \times x = {}^x/_{60}$; e in simil guisa ragionando sulle altre due, e facendo $60 = a$, $30 = c$, $10 = m$, conchiuder possiamo, che nel numero di ore x necessario alla total combustione del gas per la simultanea combustione delle 3 termolampade

La I. consuma di gas $^x/_{60} = {}^x/_a$

La II. $^x/_{30} = {}^x/_c$

La III. $^x/_{10} = {}^x/_m$

Ma la somma di tutte e 3 queste porzioni è uguale ad 1. Dunque $^x/_a + {}^x/_c + {}^x/_m = 1$, donde

$$x = \frac{1}{^1/_a + {}^1/_c + {}^1/_m} = \frac{acm}{cm + am + ac} = 6 + {}^2/_3 \text{ giusto valore}$$

perchè converte in identità la fondamentale equazione.

529. *Per empiere una vasca l' acqua impiega ore 8 se vi cade escendo per l' orificio A : impiega ore 4, se vi cade escendo per l' orificio B. Escendo per ambedue simultaneamente, quanto tempo vi impiegherà?* Risultato: Ore 2 e minuti 40.

Se l' acqua escendo solo per A impiegasse ore 2; e ore 3 e minuti 20 escendo solo per B, quanto tempo impiegherebbe se per ambedue gli orificii simultaneamente cadesse nella vasca? Risultato: Ore una, e un quarto.

530. Frattanto la risoluzione letterale tradotta in parole ci esprime questa regola generale « *che il tempo necessario affinchè diversi oggetti compiano simultaneamente quell' azione, per la quale ciascun di essi impiegherebbe un determinato tempo diverso, è dato dal prodotto di tutti questi tempi diversi diviso pella somma o dei diversi tempi se son due soli, o di tutti i vari prodotti, che si hanno col moltiplicare tra loro tutti questi tempi diversi a due a due se son tre, a tre a tre se son quattro, ec.* »

531. Che tempo si esige per empiere un vaso, che mentre riceve acqua per un' orificio, la perde per un' altro, sapendosi che se fosse aperto il primo soltanto si empirebbe in ore 6, e se dopo esser pieno aperto avesse solo il secondo, si vuoterebbe in ore 9? Risultato: ore 18.

Non giunge ad empiersi il vaso finchè il volume dell' acqua entrata meno quello dell' acqua sortita non sia eguale alla capacità del vaso, che faremo $=1$.

Or l' acqua, che entra nella vasca in un' ora è $^1/_6$: l' acqua che in un' ora sorte dalla vasca è $^1/_9$ della sua capacità; e fatto $6=a$, $9=c$, e chiamato x il numero d' ore necessario perchè la vasca si empia, il volume di acqua, che in questo tempo è entrato nella vasca sarà $^1/_6 \times x = {}^x/_6 = {}^x/_a$; e il volume d' acqua che

nel medesimo tempo è sortita sarà $^1/_9 \times x = ^x/_9 = ^x/_c$; e perciò dovendo l'acqua entrata nel tempo x meno l' acqua sortita nel tempo stesso esser eguale alla capacità del vaso, cioè ad 1, avremo

$$^x/_a - ^x/_c = 1, \text{ donde } x = \frac{1}{^1/_a - ^1/_c} = \frac{ac}{c-a} = 18,$$

valore che sostituito ad x nell' equazione fondamentale, la converte in identità.

532. E frattanto notiamo, che la formola $x = \dfrac{ac}{c-a}$ ci esprime, che « il *tempo necessario per empiere un vaso che mentre riceve per un' orificio A perde per B, è uguale al prodotto de' due tempi necessarii per isolatamente empire, e vuotare il vaso diviso per l' eccesso del 2.° tempo sul 1.°* »

533. *Si cerchi ora il tempo che si esigerebbe per empiere una vasca, che mentre riceve acqua per un' orificio la perde per un' altro, sapendosi che lo stesso tempo impiegherebbe sì per empiersi, che per vuotarsi per un solo di essi, sapendosi cioè che* $a = c$.

L' impossibilità di questo problema ci vien tosto manifestata dall' equazione fondamentale $^x/_a - ^x/_c = 1$, che nella nostra ipotesi di $a = c$ diventa $^x/_a - ^x/_a = 1$; giacchè qualunque sia x, il primo membro è sempre zero, e perciò l' equazione è una *supposizione d' eguaglianza impossibile*, impossibile essendo che il volume dell' acqua esistente nella vasca in fine di qualsivoglia tempo, volume che nella nostra ipotesi è zero perchè ne esce sempre quanta ne entra, possa esser eguale ad 1, che è la capacità della vasca.

Ma se l' assurdità del quesito non si fosse ravvisa-

ta nell' equazione fondamentale, come le tante volte accade, chiaramente vien poi palesata dalla equazione finale $x = \frac{ac}{c-a}$, che nel nostro caso è $x = \frac{a^2}{a-a} = \frac{a^2}{0} = \infty$ (§ 362); poichè essa ci addita che il valore di x è l' infinito, che cioè si esige un tempo infinito perchè la vasca si empia, e poichè l' infinito è impossibile a realizzarsi, la risoluzione dell' equazione ci mostra, che non potrà mai giungere istante, in cui la vasca si trovi piena.

534. Se nello stesso problema (533) in vece di supporre $a=c$, supponiamo $a>c$, e p. e. $a=$ ore 90, $c=$ ore 30, l' assurdità del problema ci viene egualmente manifestata dalla equazione fondamentale $x/_a - x/_c = 1$, che nel nostro caso diventa $x/_{90} - x/_{30} = 1$ ovvero $-x/_{45} = 1$ *supposizione di eguaglianza impossibile*, impossibile essendo che una quantità negativa qual' è il 1.° membro possa essere eguale alla quantità positiva 1, da cui è costituito il 2.° Ed infatti avendo presa di mira nel calcolo, e riguardata perciò come positiva l' acqua, che entra, e tende ad empier la vasca, se l' acqua che sortir potrebbe è maggior di quella che entra, il primo membro che dovrebbe esser costituito dall' eccesso dell' acqua che entra su quella che esce, essendo espresso nel nostro caso da una quantità negativa, ci mostra (169) che una quantità d' acqua a lei eguale sarebbe d' uopo entrasse nella vasca oltre quella che vi è caduta, perchè si avesse zero per risultato, appunto perchè ne sarebbe allora entrata per mezzo dell' orificio A una quantità eguale a quella, che è in grado di

sortire per B: tanto è assurdo che a tenore delle stabilite condizioni possa il 1.° membro essere uguale al 2.°

Ma l'assurdità del quesito se non si fosse osservata nell'equazion fondamentale, ci sarebbe additata dall' equazione finale $x = \frac{ac}{c-a}$, che nel nostro caso diventa $x = -45$, poichè a tenor dell' idea formataci delle quantità negative (170) il valor negativo di x esprime una quantità opposta a quella presa in mira nel calcolo: ci mostra cioè che il risultato, che ci eravamo prefissi di ritrovare, il tempo cioè necessario, onde la vasca si empia sotto le stabilite condizioni è un'assurdo, e che in vece è una quantità ad esso opposta quella, che dalle date condizioni risulta: ma di quantità opposta al tempo noi non sappiamo formarci idea alcuna: dunque l'enunciato del problema non è suscettibile di alcuna modificazione, ed il problema resta impossibile; e quindi il ritrovato valor negativo di x non può soddisfare che alle *condizioni algebriche astratte* dell' equazione fondamentale.

535. E' però interessante cosa il notare, che la stessa equazione $x/_{90} - x/_{30} = 1$, che ci ha recato ad un risultato assurdo nel problema ora sciolto, può benissimo recarci ad un risultato reale, quando essa sia l' espressione algebrica delle condizioni di un problema d' altra indole, in cui cioè possa idearsi una quantità opposta a quella, che ci eravamo prefissi di ricercare, qual' è il seguente. « *Si suppone che un sensale pel premio accordatogli di* $^1/_{30}$ *dell' intero valore di 90 staja di grano di cui ha procurato la vendita, abbia ricevuto uno stajo meno uno scudo, e cercasi a*

che prezzo il grano è stato venduto . » Riflettendo sull' enunciato del problema ben si vede una contraddizione nelle condizioni , impossibile essendo che il valore qualunque esso sia d' uno stajo , che è sempre $^1/_{90}$ di tutta la somma , possa esser eguale ad una quantità maggiore, qual' è $^1/_{30}$ delle somma stessa , quando in vece di essere accresciuto venga questo valor dello stajo diminuito di 1. E queste contraddizioni ci vengono come nell' altro problema indicate dai risultati algebrici , poichè

Fatta la somma de' scudi ritratti dalla vendita $= x$
Il prezzo d' uno stajo sarà $= {}^x/_{90}$
Questo prezzo meno uno scudo è per condizione $= {}^x/_{30}$
Dunque $^x/_{90} - 1 = {}^x/_{30}$, ossia $^x/_{90} - {}^x/_{30} = 1$
equazione identica a quella del problema antecedente riconosciuto assurdo , e da cui perciò si scende alla stessa equazione finale $x = -45$.

Ma se questo valor negativo di x ci indica , che sotto le date condizioni è assurda la ricerca del denaro ritratto dalla vendita, siccome in questo problema a differenza dell'antecedente possiamo ben formarci idea d' una cosa opposta alla cercata, l'ottenuto risultato negativo non solo come nel l' ora sciolto quesito serve a farci conoscere , che noi siamo in errore che cioè è falso che x rappresenti la somma de' scudi ritratti dalla vendita , ma di più rettifica la nostra erronea supposizione ; mostrandoci che esso esprime una cosa opposta , cioè la somma de' scudi impiegati in vece in una compra .

Sostituito perciò ad x il suo valore nell' equazion fondamentale , essa allora diventa $-{}^{45}/_{90} - 1 = -{}^{45}/_{30}$ e il suo 1.° termine $-{}^{45}/_{90}$ esprime il prezzo dello stajo di grano comprato , poichè la stessa quantità positiva espresso avrebbe il prezzo del grano venduto ; il 2.°

termine —1 essendo della stessa natura delle unità, che compongono la somma —45 che si *spende*, debbe essere unitá di scudo, che *spendesi* anch' essa; e il 2.° membro $-{}^{45}/_{30}$ è ben chiaro che è il trentesimo della somma spesa per l' acquisto del grano, subito che se fosse stato positivo espresso avrebbe il trentesimo della somma guadagnata nella vendita: quindi è che questi termini negativi ci obbligano a cambiare l' enunciato del problema impossibile a verificarsi a tenore delle condizioni stabilite, e ci fanno conoscere che il *Sensale* del contratto ha riceuto pella parte trentesima dell' intero valore che per patto gli si era assegnata, non già il prezzo d' uno stajo meno uno scudo dal venditore, il che era un' assurdo, ma in vece il prezzo d' uno stajo più uno scudo dal compratore, e perciò conviene sostituire all' enunciato del problema il seguente, che sebben vi abbia relazione è però ben diverso. Un Sensale *pel convenuto premio di* $^{1}/_{30}$ *del valore di* 90 *staja di grano di cui ha procurato l' acquisto riceve dal compratore uno stajo più uno scudo. Quanto si è pagato lo stajo?* » Passando alla soluzione dopo di aver così modificata l' enunciazione del problema, è ben chiaro, che essendo ora il denaro impiegato per la compra la cosa presa in mira nel calcolo, positivo, e non negativo debbe risultare il valore di x.

536. Con questi esempii abbiamo acquistate esatte idee intorno alle così dette *soluzioni negative*, intorno cioè al vero significato dei valori negativi delle incognite. Essi derivan sempre da un' assurdo ammesso nelle condizioni de' problemi, le quali non possono verificarsi senza ammettere, che l' incognita sia d' una natura opposta a quella, che si era ideata. Questo assurdo nelle condizioni con facilità rilevavasi nei pro-

blemi citati dalla stessa loro enunciazione: ma a misura che cresce la loro complicazione, la enunciazione de' quesiti nel comune linguaggio divien sempre meno acconcia per dimostrare di per se stessa se vi sieno o no contraddizioni nei dati, e talvolta nemmeno se ne avrebbe sospetto, se non ce ne avvertisse il valor negativo, che nell' equazione finale ci offre l' incognita.

Ed ecco uno fra i tanti preziosi vantaggi, che l' algebra ci offre manifestandoci forze assai superiori a quelle dell' aritmetica.

Infatti per mezzo de' valori negativi a cui ci reca in grazia della precisione, e generalità de' suoi segni, essa ci fa accorgere delle contraddizioni che rimanevan latenti nella enunciazione de' problemi. Non basta: essa ci fa riconoscere l' irrimediabile impossibilità della soluzione, quando la natura delle cose concrete che ricerchiamo è tale, che il loro opposto non è concepibile come nel problema (534); e d' altronde essa rettifica le nostre false supposizioni affacciando alla nostra mente de' nuovi rapporti, e le soluzioni di nuovi problemi, che sebben dipendenti dagli altri impossibili che avevamo enunciato, ci offrono però un' aspetto, cui per l' addietro non si era affatto pensato, quando tali sono le cose che ricerchiamo, che le lor contrarie son possibili come nell' esempio (535).

ARTICOLO IV.

Risoluzione delle equazioni di 1.° grado a più incognite.

Diamo principio dalle equazioni a due incognite

sole, notando, che quando per A, B, C si intendano quantità qualunque, monomie, o polinomie, positive o negative, intere o frazionarie, la loro formola generale è

$$Ax + By + C = 0.$$

Or se cerchiamo per primo il valore di x, e colle note operazioni passiamo ad isolarlo nel 1.° membro, otteniamo

$$(M)\ x = \frac{-C-By}{A}.$$

equazione da cui non risulta il valore di x, come in quelle a un incognita sola per l' esistenza nel 2.° membro dell' altra incognita y.

Egualmente se nella fondamentale equazione isoliamo y, otteniamo

$$y = \frac{-C-Ax}{B}$$

in cui parimenti il valore di y resta indeterminato, perchè il 2.° membro, che lo esprime contiene la incognita x.

Se dunque si ha un problema a due incognite, e le sue condizioni non ci danno che una sola equazione, noi siamo nella impossibilità di ottenere una soluzione determinata, perchè l' espressione di qualunque delle due incognite isolata nella finale equazione tiene inclusa l' altra: e perciò non fa che avvertirci, che la x dipende dalla y, e la y dalla x in modo che cambiando l' una di valore necessariamente dee cambiarlo anche l' altra.

Ma se le condizioni del problema ci danno anche un' altra equazione, contenente ambe le incognite p.

e. $A'x+B'y+C'=0$, comprendiamo facilmente, che sostituendo in questa ad x il suo valore che abbiamo dalla prima ottenuto isolando la x come se il resto fosse tutto noto, abbiamo in vece un' equazione, dove l' incognita x è eliminata, e dove non rimane, che la sola ignota y, che perciò può trovarsi col metodo (498). Il trovato valore di y sostituito poi ad y nell' equazione finale (M) renderà noto anche il valore di x, e il problema sarà completamente risoluto.

538. Con simile ragionamento rileviamo, che non può aversi una soluzione determinata di un problema a 3 incognite, quando ci offra due sole equazioni ciascuna a 3 incognite, mentre sostituendo nella 2.ª il valor della x, che avremo nella 1.ª isolato, otterremo un' equazione, ove la x è eliminata, ma dove esistono però altre due incognite, il cui valore non è determinabile senza il sussidio di un' altra equazione (537) Ma se ce ne offra una 3.ª parimenti a 3 incognite allora sostituendo anche in questa il valor della x ottenuto dalla 1.ª, avremo così convertita la 2.ª, e 3.ª equazione in equazioni a due sole incognite, e perciò risolvibili col metodo (537): e gli ottenuti valori di queste due incognite sostituiti nella equazione finale di x tratta dalla prima, ce ne determineranno il valore, e così compiuta sarà la soluzione del quesito.

539. Un problema a 4 incognite non è risolvibile se non si hanno 4 equazioni tra esse: poichè allor solo sostituendo il valore di x dedotto dalla prima nelle altre tre a 4 incognite, le convertiamo per mezzo della eliminazione di x in equazioni a 3 sole incognite, risolvibili perciò col metodo (538); e finalmente in genere *un problema a più incognite non è suscettibile d' una*

soluzione determinata, se le equazioni tra esse non sono altrettante.

540. Per la eliminazione delle incognite può anche usarsi un'altro metodo generale talvolta più espediente dell'or indicato. Esso consiste nella *sottrazione d'una equazione dall'altra* dopo aver reso eguale nel caso che nol fosse il coefficiente di una stessa incognita in ambedue le equazioni.

Infatti se si hanno due equazioni a due incognite in ciascuna delle quali sia identico il coefficiente di x, p. e.

I. $Ax+By+C=o$, II $Ax+B'y+C'=o$,

sottraendo la 2.ª dalla 1.ª, i due primi termini si elidono, ed otteniamo l'equazione a una sola incognita

$$(B-B')y+C-C'=o\text{, donde } y=\frac{-C+C'}{B-B'}$$

Se tali poi son le equazioni, che ciascuna delle due incognite ha nella prima un coefficiente diverso da quello, che ha nella seconda p. e.

I. $Ax+By+C=o$; II. $A'x+B'y+C'=o$;

in tal caso è ben facile render eguali in ambedue le equazioni i coefficienti d'una di esse, p. e. della x, moltiplicando i due membri di ciascuna equazione pel coefficiente, che la x ha nell'altra. Così operando abbiamo

I. $A'Ax+A'By+A'C=o$; II. $AA'x+AB'y+AC'=o$:

e sottraendo la 2.ª dalla 1.ª si ottiene

$$(A'B-AB')y+A'C-AC'=o,$$

$$\text{donde} \ldots\ldots\ldots y=\frac{-A'C+AC'}{A'B-AB'}$$

541. Così operando su due alla volta in tutte le possibili combinazioni delle 3, 4, ... n equazioni a 3,

4, ...*n* incognite, si perviene di mano in mano ad equazioni, che contengono una ignota di meno, e su queste convien ripetere simili operazioni finchè giungiamo ad un' equazione ad un' incognita sola.

542. Altri metodi di *eliminazione* più compendiosi, ma non generali sono suggeriti dalla particolar indole de' problemi, specialmente quando tutte le incognite non esistono in ciascuna loro equazione, ma di qualunque di essi uso si faccia, conchiudiamo che la soluzione de' problemi a più incognite tutta dipende dalla soluzione de' problemi a un incognita sola, e non esige di più che quell' artificio detto eliminazione delle incognite in cui da equazioni a molte, si giunge ad una equazione a un' ignota soltanto.

ARTICOLO V.

Applicazioni della risoluzione delle equazioni di 1.° grado a più incognite ai problemi.

543. *Silvio s' accorge, che al suo sigillo d' oro del peso di denari* 19 *è stato sostituito altro sigillo della stessa forma, e volume, ma di lega di rame e d' oro, e del peso di denari* 10. *Quanto è l' oro, e il rame che lo compongono* posto che un sigillo di egual volume tutto di rame pesi denari 7? — Risultato den. 5 $^1/_4$ di rame, e den. 4 $^3/_4$ di oro.

Per sciogliere questo problema a due incognite si esigono due equazioni, ed una infatti ne ricaviamo dal confronto de' volumi, l' altra dal confronto de' pesi.

Fatta astrazione da quel lieve cambiamento di volume, che subiscono i componenti nella chimica loro

combinazione, dir possiamo che il volume del rame detto x più il volume dell' oro detto y, che entrano nel sigillo sieno eguali all' intero volume, che chiameremo 1, ed ecco una equazione.

$$\text{I. } x+y=1, \text{ donde } x=1-y.$$

Or se nel sigillo di lega v' è di rame o $^1/_2$, o $^1/_3$, o in genere una frazione x dell' intero volume, esser vi debbe egualmente o $^1/_2$, o $^1/_3$, o una frazione x di tutto il peso, che avrebbe il sigillo, se fosse tutto di rame, cioè di 7 denari, perchè in una stessa sorte di materia i pesi sono come i volumi. Dunque se il volume del rame esistente nel sigillo è espresso dalla frazione x dell' intero volume 1 del sigillo stesso, il peso di questo rame sarà parimenti la frazione x di tutto il peso, che avrebbe il sigillo, se fosse di puro rame, sarà cioè la frazione x di 7 denari, ossia $x\times 7$, ossia $7x$. Per simili ragioni il peso dell' oro contenuto nel sigillo di lega esser dee $19y$. Ma questi due pesi presi insieme fanno il peso del sigillo intero, che è 10 denari: dunque ecco la 2.ª equazione.

$$\text{II. } 7x+19y=10.$$

Sostituendo in questa il valor di x dedotto dalla I avremo . . . . . . $7(1-y) + 19y=10$,

donde . . . . . . $y=\dfrac{10-7}{19-7}=\,^1/_4$,

e quindi . . . . $x=1-y=1-\,^1/_4=\,^3/_4$.

Perciò nel sigillo il peso del rame che è $7x$ è $7\times{}^3/_4=$ den. $5+{}^1/_4$; e il peso dell'oro che è $19y$ sarà $19\times{}^1/_4 =$ den. $4+{}^3/_4$:
e questi valori è ben facile rilevare, che soddisfano ad ambe le condizioni del problema.

544. Se si vuò dare al problema un' aspetto gene-

rico, poichè chiamansi *specifici* i pesi, che sotto uno stesso volume ci presentano i diversi corpi, la sua enunciazione vien modificata così « *Noto il peso specifico d' una lega, e il p. sp. de' metalli, che la compongono, trovare il volume, e il peso de' suoi componenti.* »

Infatti serbato il nome di 1 al volume della lega, di x alla frazione in volume del metallo meno denso nella lega esistente, e di y alla frazione in volume del metallo più denso, che parimenti nella lega esiste, abbiamo come sopra.

$$\text{I. } x+y=1\text{, donde } x=1-y$$

Il peso specifico della lega, che nell' esposto esempio era den. 10, sia p.

Il peso sp. del metallo meno denso, che era 7 nel nostro esempio (chiamata d la sua differenza col peso sp. della lega) sarà $p-d$.

Il peso sp. del metallo più denso, che era 19 nel nostro caso (chiamata d' la sua differenza col peso sp. della lega) sarà $p+d'$.

Il peso del metallo meno denso esistente nel peso p della lega, che nel citato esempio era $7x$ sarà $(p-d)x$.

Il peso del metallo più denso esistente nel peso p della lega, che nel citato esempio era $19y$ sarà $(p+d')y$

Dunque la 2.^{a} equazione $7x+19y=10$ diventa

$$\text{II. } (p-d)x+(p+d')y=p$$

e in essa sostituendo ad x il suo valore $1-y$, risulta

$$(p-d)(1-y)+(p+d')y=p \quad .$$

donde (A) $y=\dfrac{d}{d+d'}$, e quindi (B) $x=\dfrac{d'}{d+d'}$,

e questi valori generici di y e di x soddisfano alle condizioni perchè convertono in identità le fondamentali

equazioni I.^{a}, e II.^{a}; e al tempo stesso ci esprimono questa regola generale « *che il volume di ciascun metallo nella lega è dato dalla differenza de' pesi sp. dell' altro metallo, e della lega, divisa per la somma delle differenze de' pesi sp. tra ciascun metallo e la lega*.

Quindi il peso di ciascun metallo nella lega è il suo volume moltiplicato pel suo peso sp.; poichè il peso del metallo meno denso è come si è veduto $(p-d)x$, il peso del metallo più denso è $(p+d')y$.

545. *Un Calice di lega d' argento, e d' oro pesa libre 7 e mezzo, mentre sotto egual volume l' argento pesa 5 libre, e libre 9 e mezzo l' oro. Quant' oro e argento esistono nel calice?* Risultato: Oro lib. 5, onc. 3, den. 8: Argento lib. 2, onc. 2. den. 16.

546. *Quanto grano del prezzo di scudi* 9,60 *al rubbio, e quanto del prezzo di scudi* 6,40 *dovremo alligare per avere un rubbio al prezzo di scudi* 7,90?— Risultato: Staja 4 $^1/_4$ dell' inferiore: staja 3 $^3/_4$ del migliore.

La soluzione generale di questo problema è la stessa del problema (544), sol che i prezzi vengano sostituiti ai pesi specifici, e alle loro differenze le differenze de' prezzi, cosicchè si giunge alle stesse formole finali (A), (B), le quali tradotte in parole ci esprimono questa regola prattica. « *Il volume* (e dicasi lo stesso del peso) *di ciascun de' due generi, che entrano in una data unità di misura è la differenza tra il prezzo dell' altro genere, e del misto, divisa per la somma delle differenze tra il prezzo di ciascun genere e quello del misto*.

547. *Si hanno* 3 *sorte di caffè: la* 1.^{a} *è da* 50 *soldi, la* 2.^{a} *da* 38, *la* 3.^{a} *da* 24 *soldi la libra. Di quanto di ciascuna sorte dovrà risultare una libra per venderla a* 30 *soldi?*

Chiaminsi x, y, z le rispettive frazioni della 1.ª, 2.ª, 3.ª qualità di caffè, che formar debbono una libra del misto, ed avremo

I. $x+y+z=1$ donde (F) $x=1-y-z$;

e d'altronde, poichè la somma de' prezzi delle 3 frazioni costituenti la libra esser debbe soldi 30, avrem pure

II. $50x+38y+24z=30$.

Per quanto poi si studino le condizioni del problema non possiamo estricar fuori da esse oltre le due esposte altra equazione, e perciò il problema ha meno equazioni, che incognite, e queste per conseguenza non potendo ricevere un valore determinato (539), fanno s che *indeterminato* si chiami il problema. Sostituendo infatti nella 2.ª equazione ad x il suo valore trovato in (F) risulta

$$50-50y-50z+38y+24z=30$$

donde $y=\frac{-20+26z}{-12}$, ovvero (G) $y=\frac{20-26z}{12}$

la qual'ultima espressione è derivata dalla antecedente in cui si son moltiplicati per la stessa quantità -1 ambi i termini della frazione costituente il 2.° membro, onde render positivo il denominatore.

Ora in (G) il valore di y è indeterminato, poichè dipende da un' altra incognita quel' è z che contien tra i suoi termini il 2.° membro dell' equazione; e poichè a qualunque operazione si assoggettino le date equazioni, mezzo non troviamo da precisare il valore di alcuna incognita, conchiudiamo, che il problema qual vien enunciato senza l' aggiunta di qualche dato non è suscettibile di soluzione. Rileviamo però fa-

cilmente, che mentre in (F) x dipende da y, e z, mentre in (G) y dipende dalla sola z, z poi non dipende da alcun'altra incognita, e può perciò ne' limiti prescritti dalle condizioni del problema prendere quel valore, che più ci piaccia.

Quando dunque si dà a z un valore arbitrario; si fissa cioè la quantità del caffè infimo che debbe esser contenuta in una libra, resta tosto determinato il valore di y in (G), e quindi di x in (F); poichè col dare a z un valore, siamo venuti a toglier z dalle quantità incognite, e quindi abbiam reso a due sole incognite, e a due equazioni, ossia abbiam reso determinato quel problema, che prima non lo era perchè a due sole equazioni, e a 3 incognite.

548, Ed è pur chiaro che per ogni diverso valore che noi accordiamo a z, diverso è pure il valore, che acquista y, ed x, cosicchè comunemente si dice » *che quanti sono i diversi valori che sta in nostro arbitrio di accordare a z, e tante diverse soluzioni acquista il problema indeterminato*.

Questa espressione è però inesatta, poichè a rigore l'indicato problema non solo come appartenente alla classe di 1.° grado non può aver più d'una soluzione (mentre ne hanno più d'una i problemi soltanto di grado maggiore, come vedremo), ma anzi finchè resta indeterminato non può averne veruna. Quindi piuttosto che dire « *poter un problema indeterminato ricever tante diverse soluzioni quanti sono i diversi valori, che diamo a z* » a tenor dell'esposto ci esprimeremo più esattamente dicendo « che un problema indeterminato senza variazione alcuna dei dati che sono espressi nella enunciazione passa ad esprimere tan-

ti diversi particolari problemi determinati per ciascun de' quali riceve un' unica soluzione diversa, quanti sono i diversi valori che accordar possiamo nel nostro caso a z, ed in genere a quella, o a quelle quantità, che l' *enunciazione incompleta* del problema indeterminato ci offre come incognite, non perchè tali debbano riguardarsi, mentre allora il problema non sarebbe risolvibile, ma perchè vengan prese come altri dati, che il problema lascia per lo più entro certi limiti al nostro arbitrio.

549. Il numero de' diversi valori, che dar possiamo ai dati arbitrarii talvolta è *limitato*, talvolta è *indefinito*; e tale è nel nostro caso, sebbene le condizioni del problema lo circoscrivano in assai angusti confini. Infatti essi esigono, che z sia fornita di 3 requisiti; e I che z sia una *vera frazione*, perchè l' equazione $x+y+z=1$ esige che ogni incognita sia minore dell' unità: II che sia *una frazione non troppo grande*, ma tale che moltiplicata per 26 dia un prodotto minor di 20, onde y nell' equazione $y=\frac{20-26z}{12}$ nè si annulli, nè divenga negativa: III che sia *una frazione non troppo piccola*, ma tale che il suo prodotto per 26 sottratto da 20 non solo dia un residuo minor di 12, affinchè anche y abbia un valor minore dell'unità; ma concilii ad y un tal valor frazionario che unito a z dia una somma minore di 1, sicchè possa anche x ricevere un qualche valore, onde si verifichi $x+y+z=1$. Così poichè z esser debbe una frazione, esplorando p. e. fra i decimi troviamo, che per le richieste condizioni fa d' uopo che z abbia un valore nè minore di $^6/_{10}$, nè maggiore di $^7/_{10}$; quantunque però questi limi-

ti sieno assai ristretti, indefinito è il numero de' valori, che può ricevere z, siccome indefinito è il numero de' diversi valori che può presentarci $^6/_{10}$, ricevendo in aumento le diverse quantità non maggiori di $^1/_{10}$ (onde non acquisti un valor maggiore di $^7/_{10}$) quali sono $^1/_{11}$; $^1/_{12}$; $^1/_{13}$; $^1/_{14}$; ... ec. all' infinito.

Se diamo a z il valore p. e. di $^7/_{10}$, sostituito questo valore in (G), abbiamo $y = ^3/_{20}$, e quindi posti in (F) i valori di z ed y, abbiamo $x = ^3/_{20}$; e questi 3 valori verificano esattamente le condizioni del problema. Se diamo a z il valor di $^6/_{10}$, otteniamo $y = ^{11}/_{30}$ $x = ^1/_{30}$: e questi valori soddisfano anch' essi al quesito, ma se diamo a z un valore in decimi o minor di *sei* o maggiore di *sette decimi*, nel 1.° caso la somma di z, e di y supera l' unità, nel 2.° y acquista un valor negativo, risultati che sono esclusi dalle condizioni del problema.

550. *Una partita di carne suina di libre 6456 risultante per 4108 libre da animali di peso doppio così detto, cioè superiore a libre 200, e per libre 2348 da animali di peso inferiore il cui prezzo valutasi a $^9/_{10}$ del prezzo degli altri, è stata indistintamente pagata a ragione di scudi 0,04 la libra. A quanto per libra si son venduti gli animali doppii, e gli altri?* Risultato: il prezzo degli animali doppii è scudi 0,0415 per libra, ossia scudi 4,15 al cento: il prezzo degli altri è scudi 0,03736 per libra, ossia scudi 3,736 al cento.

Ed in vero posto y pel prezzo a libra degli animali doppii, ed x pel prezzo degli altri, essendo per ipotesi $x = ^9/_{10} y$, facendo $^9/_{10} = p$ si avrà I. $x = py$.

E poichè in libre 6456 dell' insieme esiston libre 2348 di carne inferiore, e 4108 dell' altra, in una li-

bra sola avremo dell' una, e dell' altra una quantità 6456 volte più piccola, avremo cioè $^{2348}/_{6456}$ della carne inferiore, che faremo $=a$, e quindi il valore di questa frazione di libra sará il prezzo x della libra moltiplicato per questa frazione, cioè ax; e dell' altra carne avremo $^{4108}/_{6456}$ di libra, che faremo $=b$, e quindi il valore di questa frazione di libra sarà by.

Ma la somma de' valori delle due frazioni di carne inferiore, e migliore costituenti la libra è uguale a scudi 0,04$=$c: Dunque II. $ax+by=c$, e sostituito in questa il valore di x, che ci offre la I. equazione, abbiamo $apy+by=c$, donde $y=\dfrac{c}{ap+b}=$ scudi 0,0415:

quindi la I diventa $x=\dfrac{cp}{ap+b}=$ scudi 0,03736.

551, Tutti gli ora sciolti problemi non sono che casi particolari delle *Regole di Alligazione* date dagli aritmetici principalmente per queste 3 importanti ricerche.

I. Trovare il prezzo medio, o ragguagliato di un' unità di misura composta di due, o più generi diversi, quando di ciascun di essi è dato il *prezzo*, e la *quantità* con cui entra nell' unità di misura: *e questo prezzo medio è dato dalla somma de' valori delle frazioni de' rispettivi generi, che la formano*.

II. Trovar la frazione che di ciascun di due diversi generi convien prendere per formar l' unità di misura del miscuglio, quando o non ve ne sono che due (546), o se son più di due i generi diversi venga lasciata all' arbitrio, entro però certi limiti, la frazione degli altri, come nel problema (547); ed abbiam già osservato negli indicati paragrafi, come si ottenga in tali casi l' intento.

III. Trovare i prezzi di ciascuno di 2, o più generi, che sotto un dato peso, o volume sono in alligazione nell' unità di misura, quando si conosca un qualche rapporto di un prezzo all' altro; e la soluzione del problema (550) ce ne addita le regole.

552. *Scudi* 96 *sono stati spesi in un viaggio da*

una comitiva di 36 tra uomini adulti , donne, e fanciulli, essendo stato tassato ogni adulto per scudi 5, ogni donna per scudi 2, ogni fanciullo per scudi 1. Quanti eran gli adulti , le donne , i fanciulli ?

Questo problema è indeterminato , perchè ci offre 3 incognite , e due sole equazioni . Infatti date le seguenti denominazioni

N. degli Adulti x	*Somma da essi sborsata* $5x$
N. delle Donne y	*Somma da esse sborsata* $2y$
N. de' Fanciulli z	*Somma da essi sborsata* z

si ha I. $x+y+z=36$ II. $5x+2y+z=96$

Dalla 1.^{a} si ottiene (P) $x=36-y-z$, e questo valore di x sostituito nella 2.^{a} la converte in

$5(36-y-z)+2y+z=96$, donde (Q) $y=28-4/3\ z$.

Or col dare a z un valor arbitrario , che non si opponga alle condizioni del problema otteniamo tosto da (Q) il valore di y , e da (P) il valore di x .

553. Affinchè poi z che esprime il numero de' fanciulli soddisfi alle condizioni del problema , conviene 1.°, che sia positiva , ed intera : 2.°, che sia tale che in (Q) renda sempre positiva la y , e per tale oggetto dee essere minor di 21 : 3.°, che sia tale , che in (Q) renda sempre y intera, e per tale oggetto fa d' uopo sia divisibile per 3. Dunque la z non può ricevere altri valori che il 3, e tutti i suoi multipli sino al 18, e perciò soli 6 sono i problemi particolari determinati, in cui si converte l'enunciato, e che gli allievi potranno per esercizio sciogliere verificando poi le soluzioni , e confrontando i loro risultati col quadro , che qui esponiamo

Soluzione I. Posto	$z=3$ si ha	$x=9$	, $y=24$
II.	$z=6$	$x=10$	, $y=20$
III.	$z=9$	$x=11$	, $y=16$
IV.	$z=12$	$x=12$	, $y=12$
V.	$z=15$	$x=13$	, $y=8$
VI.	$z=18$	$x=14$	, $y=4$
VII.	$z=21$	$x=15$	, $y=0$
VIII.	$z=24$	$x=16$	, $y=-4$

dal quale risulta , che sei sole sono le soluzioni appartenenti al problema , poichè per ammettere la settima conviene escluder le donne, che nel problema son contemplate , e per ammetter l' ottava , convien riferirla a un quesito , che ha relazione col dato , ma è da lui ben diverso in grazia del valor negativo , che ci presenta la y . Infatti questa ottava soluzione ci mostra , che *se si cercasse il numero degli uomini adulti , e delle donne esistenti in una comitiva di* 36 *individui* , 24 *de' quali sono fanciulli , posto che per la spesa di scudi* 96 *ogni fanciullo abbia contribuito uno scudo , ogni donna* 2, *e* 5 *ogni adulto*, il problema sarebbe impossibile, perchè col darci $y=-4$ ci mostra essere impossibile , che anche le donne paghino , come l' enunciato suppone : la stessa soluzione però il modo ci suggerisce di render possibile il problema colla rettificazione di alcuni dati , col dare cioè ad y una maniera di essere opposta , ossia facendoci conoscere , che nella comitiva in vece di esservi donne che paghino la lor porzione , vi sono donne addette alla cura de' fanciulli , che percepiscono quella somma che erroneamente credeasi , che esse sborsassero ; ond' è che il problema per divenir possibile convien che cambii d'aspetto , e sia invece così concepito . « *Le spese del viaggio ascendenti a scudi* 96 , *e del sa-*

lario dato alle fantesche a ragione di scudi due l' una, son ripartite fra gli uomini adulti a ragione di scudi 5, *e tra i* 24 *fanciulli a ragione di scudi* 1 *per ciascheduno. Quanti sono gli adulti, e le fantesche?* » Ed ecco ne' problemi ancora a più incognite un esempio di quelle rettificazioni, che l' arguta analisi algebrica introduce modificando le dapprima mal concepite, ed impossibili condizioni.

554. Il problema stesso (552) che è indeterminato diverrebbe determinato se si aggiungesse un' altra condizione p. e. *che gli adulti e i fanciulli insieme formino un numero eguale alla metà del numero delle donne*, cioè (R) $x+z=\frac{y}{2}$, mentre in tal caso il numero delle equazioni eguaglia quello delle incognite, e perciò sostituito anche in quest' ultima ad x il suo valore trovato in (P), la (R) si converte in $36-y-z+z=\frac{y}{2}$, donde $y=24$. Sostituendo il valore di y or trovato in (Q), e quindi isolando la z, otteniamo $z=3$; e ponendo in (P) i valori di y e z, otteniamo $x=9$.

555. Se al problema stesso (552) oltre la condizione ora annessavi soggiungessimo, *che il numero de' fanciulli è* $^1/_{11}$ *della somma degli adulti e delle donne, che cioè* $z=\frac{x}{11}+\frac{y}{11}$, il problema chiamasi allora più che determinato, perchè il numero delle equazioni supera allora quel delle incognite; e in tal caso con tre qualunque delle 4 equazioni si giunge ad ottener sempre il medesimo intento come possono gli studenti per esercizio verificare.

556. Lo stesso problema (552) poi in vece di divenire più che determinato diverrebbe impossibile, se la quarta condizione fosse incompatibile con qualcuna delle altre, p. e. se si volesse, *che il triplo degli adulti più il numero de' fanciulli eguagliasse il numero delle donne*, cioè $3x+z=y$; perchè essendovi l' altra equazione $x+z=\frac{y}{2}$ donde $2x+2z=y$; dovrebbe verificarsi (paragonando insieme i valori di y qui ottenuti) che $3x+z=2x+2z$, donde $x=z$, il che è in contraddizione coi risultati che si ottengono sciogliendo il problema colle prime 3 equazioni, mentre si è allora ottenuto $x=9$, e $z=3$ (554).

557. Tutti questi problemi sono stati sciolti coi metodi di eliminazione comuni: altri ve ne sono però che possono sciogliersi con metodi più compendiosi suggeriti dalla stessa indole de' problemi, quando siasi formato quell' occhio algebrico, che dipende dal criterio, e dall' esercizio. Eccone alcuni.

558. *Tirsi e Clori hanno de' pomi. Tirsi ne dona uno a Clori, e così ambedue ne hanno un numero eguale: se Clori ne avesse in vece regalati due a Tirsi, Tirsi ne avrebbe auti il doppio di Clori.* Quanti pomi aveano entrambi? Risultato: 10 Tirsi, ed 8 Clori.

Sieno x i pomi di Tirsi, y quelli di Clori.

Per la 1.ª condizione $x-1=y+1$

Per la 2.ª $x+2=2(y-2)$.

Or senza seguire i metodi generali ci accorgiamo, che sottraendo la 1.ª dalla 2.ª equazione, si ha

$x+2-x+1=2y-4-y-1$, donde $y=8$,

e con questo valor di y la prima equazione ci dà $x=10$.

559. Così sommando le 2 equazioni del problema (154), cioè I $x+y=s$, II $y-x=d$, otteniamo tosto $y=\frac{s}{2}+\frac{d}{2}$; ed $x=\frac{s}{2}-\frac{d}{2}$ sottraendo la II. dalla I.

560. Ed è per rapporto a questo problema a marcarsi, che ne' diversi casi particolari cui sono applicabili le due formole generali ora esposte, quando s è un numero pari e d è dispari, o viceversa, i due numeri x, y divengono frazionarii, e in tal caso a tenore della particolar indole de' problemi questi valori frazionarii sono possibili, od impossibili.

Così gli stessi valori 27 $^1/_2$, e 22 $^1/_2$, che noi otteniamo dall' equazione $x+y=50$, $x-y=5$ sono reali quando le equazioni derivano da questo problema: « *Dividere una tavola di 50 piedi in due parti l' una di 5 piedi più lunga dell' altra* » ma sono impossibili, se le istesse equazioni sono la traduzione di quest' altro problema: « *far che siano 50 i commensali fra uomini, e donne, e che il numero di queste ecceda di 5 quello degli uomini* » poichè 27 donne e mezzo, e 22 uomini, e mezzo sono un' assurdo.

561. *Problema determinato a 3 incognite. Un padre indagando le perdite fatte al giuoco dai suoi 3 figli ha scoperto I. che la perdita del 1.° più la semisomma delle perdite fatte dagli altri 2 è lire 102. II. che la perdita del 2.° più $^1/_3$ della somma delle perdite degli altri due è lire 68 III. che la perdita del 3.° più il quarto della somma delle perdite de-*

gli altri due è 34. Potrà conoscere la perdita di ciascuno ? — Risultato : Il 1.° ha perduto 80 lire, 40 il 2.°, e 4 il 3.°

Chiamando x, y, z le perdite fatte dal 1.°, 2.°, 3.° figlio, e fatto $102=a$, $68=m$, $34=c$ avremo

$$\text{I. } x+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=a, \text{ donde (A) } x=a-\frac{y}{2}-\frac{z}{2}$$

$$\text{II. } y+\frac{x}{3}+\frac{z}{3}=m \quad \text{III. } z+\frac{x}{4}+\frac{y}{4}=c$$

Nella II. e III. equazione sostituendo ad x il suo valore ricavato dalla I., e fatte le debite riduzioni, avremo

$$\text{IV. } \frac{5y}{6}+\frac{a}{3}+\frac{z}{6}=m, \text{ e V } \frac{7z}{8}+\frac{a}{4}+\frac{y}{8}=c$$

Ora isolando y nella IV.. otteniamo

$$\text{VI. } y=\frac{6m-2a-z}{5},$$

e ponendo l' or trovato valore di y nella V., e riducendo si ha

$$\text{VII. } {}^{17}/_{20}\, z+{}^{1}/_{5}a+{}^{3}/_{20}\, m=c;$$

e finalmente isolando la sola incognita rimasta in questa equazione, otteniamo

$$z=\frac{20c-4a-3m}{17}, \text{ ovvero } z=4.$$

Sostituito il valor di z nella VI. otteniamo

$$y=\frac{21m-6a-4c}{17}, \text{ ovvero } y=40.$$

Sostituiti i valori di y, e z nell' (A), avremo

$$x=\frac{22a-9m-8c}{17}, \text{ ovvero } x=80;$$

e tutti e tre questi valori pienamente soddisfano alle 3 date condizioni, come può ognuno verificare.

562. Vediamo ora come la soluzione di questo stesso problema, che abbiamo ora sciolto coi metodi generali venga condotta a termine più brevemente in grazia di alcuni particolari artificii suggeriti dalla natura delle sue equazioni. Facendo sparire i denominatori dalle 3 fondamentali equazioni avremo convertita.

$$x+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=a \text{ nella I. } 2x+y+z=2a$$

$$y+\frac{x}{3}+\frac{z}{3}=m \text{ nella II. } x=3y+z=3m$$

$$z+\frac{x}{4}+\frac{y}{4}=c \text{ nella III. } x+y+4z=4c\,;$$

e sottraendo la I. dalla II. viene IV. $2y-x=3m-2a$

Togliendo la III. dalla II. già moltiplicata per 4 ad oggetto, che per mezzo della sottrazione sparisca la z, avremo la V. $3x+11y=12m-4c$.

Sommando la V. colla IV. già moltiplicata per 3 onde sparisca la x, otteniamo la VI. $17y=21m-6a-4c$,

e quindi $y=\dfrac{21m-6a-4c}{17}=40$, valore, che sostituito nella IV. dà $x=80$; e finalmente sostituendo i valori di x, e y in una qualunque delle 3 prime, otteniamo $z=4$.

563. Se in questo problema i numeri dati fossero diversi, p. e. se fosse $a=51$, $m=17$, $c=34$, sostituiti i numeri alle lettere nelle equazioni finali, noi troveremmo $x=41$; $y=-5$, $z=25$; e poichè il valor positivo delle incognite esprime perdite, è chiaro che

il valor negativo di y esprime vincita, e ci fa rilevare che mentre il 1.° figlio ha perduto lire 51, ed il 3.° lire 34, il 2.° non ha perduto come supponevasi, ma ha vinto lire 5, ed ecco anche in questo caso rettificate dall' algebra le assurde supposizioni del problema.

564. *Si son comprati un Microscopio un Telescopio, e un Circolo ripetitore a prezzo tale, che il microscopio col quinto della somma de' prezzi del telescopio, e circolo ripetitore vale 164 zecchini: il telescopio con un quarto della somma de' prezzi degli altri 2 strumenti vale 195 zecchini: il circolo ripetitore colla semisomma de' prezzi degli altri due vale zecchini 310. Quanto è il prezzo di ciascun istrumento?* Risultato: il microscopio costa zecchini 100: il telescopio 120: il circolo ripetitore 200.

ARTICOLO VI.

Nozioni su i problemi indeterminati semideterminati determinati, e più che determinati sì ad una che a più incognite.

Aduniamo or qui sotto un sol punto di vista le interessanti notizie all' opportunità indicate, e sparse nella soluzione di diversi problemi.

Problemi di primo grado a un' incognita

565. *Problemi determinati*. Diconsi *determinati* i problemi di 1.° grado, quando per mezzo d'una *reale* equazione, a cui ci conducono le loro condizioni, possiamo giungere a dare ad x un *unico determinato valore.*

566. *Problemi più che determinati*. Diconsi più che determinati quando tale è l' indole delle loro condizioni che ci somministrano più d' una equazione da

ciascuna delle quali può trarsi lo stesso identico valòre dell' unica incognita x. Tale è il *problema de'fiori* (522) ·

567. *Problemi indeterminati*. Vi sono alcuni problemi nella cui soluzione invece di giungere alla solita equazion finale che ci determina il valore di x, otteniamo l' *inane identità* $x=x$ ovvero $x-x=0$, da cui nulla di noto risulta. Tal' è p. e. il seguente problema « *Si cerca un numero che sia eguale alla somma del suo sesto, terzo, e metà* » che tradotto in linguaggio algebrico diventa $x={}^x/_6+{}^x/_3+{}^x/_2$, donde $x=x$, ovvero $x-x=0$.

E poichè interessa conoscere in quali casi a tale scoglio si giunga sul termine della soluzione de' quesiti, notiamo che ciò accade in tutte quelle eguaglianze in cui o non v' è termine senza incognita, come nel citato esempio, o tali senza incognita ve ne sono, che trasportati tutti in un membro si elidono come nella seguente $x+{}^3/_{10}+{}^1/_5={}^x/_2+{}^x/_3+{}^x/_6+{}^1/_2$. Simili eguaglianze reputar si possono infatti come la stessa inane identità $x=x$ trasformata col far subire ad uno, o a ciascuno de' suoi membri delle modificazioni, che ne alterino l' aspetto senza altcrarne il valore. Così moltiplicando e dividendo p. e. per 6 il solo 2.° membro dell' identità $x=x$, abbiamo invece $x={}^6/_6x$. Onde meglio nascondere l' identità di questi due membri, spezzando il numeratore in più parti scriver possiamo invece $x={}^1/_6x+{}^2/_6x+{}^3/_6x$, e riducendo le frazioni ai menomi termini, risulta $x={}^x/_6+{}^x/_3+{}^x/_2$; ed ecco l' identità $x=x$ trasformata in un apparente equazione, che è la traduzione algebrica del proposto problema.

Ma se l' analisi in questi, e simili problemi col recarci ad $x=x$ non ci determina il valor dell' incognita

pur con questa stessa identità $x=x$ ci rende di qualche cosa avvertiti, ci esprime cioè, che per soddisfare alle condizioni del problema il valore di x non dipende da altre quantità, che da x ossia la quantità che si cerca d' altro non abbisogna, che di essere quella che è; e poichè tal requisito è proprio di qualunque quantità, così qualunque quantità, può esser presa per x, e soddisfare al problema.

Or tutti que' problemi ad una incognita, le cui condizioni tradotte in algebrico linguaggio ci recano ad un rapporto d' eguaglianza, che non mostra alcun intimo vincolo tra quantità note ed incognite, e non è che l' inane identità $x=x$ trasformata, motivo per cui non merita il nome di equazione (487), sono problemi che può ben dirsi aver meno equazioni che incognite, perchè hanno un' incognita, e niuna equazione; e perciò siccome sotto questo aspetto considerati, e come tali da non permettere che x riceva un determinato valore, ci offrono delle proprietà simili a que' problemi, che si sono chiamati indeterminati (547, 548) per analogia possono chiamarsi *problemi indeterminati a un incognita*, finchè, sotto aspetto di problemi riguardinsi.

E però a notarsi che siccome ogni numero soddisfa alle condizioni richieste da problemi di tal natura, a più ragione *il loro enunciato* merita di esser convertito in *teorema*; e così piuttosto che dire « *Si cerca un numero che sia eguale alla somma del suo sesto, terzo, e metà* » poichè non v' è numero in cui tal proprietà non si scorga, sarà più esatto dire in vece « *Qualunque numero è uguale alla somma del suo sesto, terzo, e metà*.

568. Questi diconsi *determinati* quando per mezzo di un numero *di vere, e indipendenti* equazioni eguale a quello delle incognite determinar possiamo l'unico valor di ciascuna.

569. *Diconsi più che determinati*, quando il numero delle *vere, e indipendenti* equazioni supera quello delle incognite, di modo che ve ne è qualcuna superflua, ed allora per la soluzione del problema sono valevoli qualunque delle date, purchè sieno in numero eguale alle incognite, e queste si trovino tutte in ciascuna equazione. Per brevità di calcolo giova però sempre scieglierе le men complicate.

570. Diconsi all' opposto indeterminati i problemi, quando il numero delle *vere, e indipendenti* equazioni è minor del numero delle incognite, o quando le equazioni, sebbene in numero eguale, e anche maggior delle incognite, sono di tal indole, e specialmente per la non esistenza di tutte le incognite in ciascuna di esse, da non poter dar luogo alla totale loro eliminazione. In tal caso i problemi son risolvibili quando o ad una, o a più incognite si dà un valore arbitrario.

Or se questo arbitrario valore quantunque entro certi limiti circoscritto dalle condizioni, può variare indefinitamente sicchè senza alterazione de' suoi dati il problema indeterminato può convertirsi in un *numero indefinito* di problemi determinati come accade nel quesito del caffè (547), o come accadrebbe nella ricerca di 2 numeri la cui somma in senso algebrico (199) fosse 8, i problemi chiamansi allora *propriamente indeterminati*.

571. Se poi tale è l' indole delle condizioni che a

soddisfarle non vale che un *numero limitato* di valori arbitrarii, che p. e. è 6 nel problema de' viaggiatori (553), che nella ricerca di 2 numeri *positivi ed interi* la cui somma fosse 8, sarebbe 7, come il seguente specchio ci offre

Supposizioni possibili $x=1,2,3,4,5,6,7$

Soluzioni corrispondenti $y=7,6,5,4,3,2,1$;

in tali casi i problemi si chiamano *semideterminati*: ed è a notarsi che in taluni di essi il numero delle diverse soluzioni riducesi ad 1 (come accaderebbe se la somma di 137 paoli formar si volesse con mezzi scudi, e zecchini, cioè con monete da 5, e da 22 paoli), e anche a zero (come nel caso che colle stesse monete far si volesse una somma di paoli 45.)

572. Dall' aver poi veduto, che per decidere a qual classe appartenga un problema, se cioè ai determinati, o più che determinati, o indeterminati, convien conoscere il numero delle loro *vere*, *e indipendenti* equazioni, chiara risulta la necessità di ben distinguere le equazioni *vere* dalle *apparenti*, e le *indipendenti* dalle *derivate*, poichè un problema può apparir determinato, e anche più che determinato, e non esserlo, allorchè per vera e indipendente si prenda una qualche sua equazione *apparente o derivata*.

Infatti sia p. e. un problema a due incognite, e due equazioni. Se una di queste è *apparente*, è cioè un *inane identità trasformata* (567), p. e. $x+2y=$ $\frac{1}{2}x+\frac{2}{5}x+\frac{1}{10}x+2y$, noi da questa ricavar non possiamo che o $x=x$, ovvero $y=y$, espressioni, che a nulla valgono, e resta perciò il problema indeterminato. Se poi un equazione è dipendente dall' altra, è cioè *derivata* o per moltiplicazione, o divisione, come p. e.

$$4x-12y=18 \text{ ; e } 2x-6y=9 \text{ ,}$$

delle quali la 1.ª non è che la 2.ª moltiplicata per 2, chiaro risulta dalle operazioni, che si deggiono eseguire per isolare la x, che il valor di y ottennto nell' una, e sostituito nell' altra dà all' equazione tal forma, che necessariamente ci reca ad $x=x$, equazione finale inservibile al discoprimento delle incognite, e perciò anche in questo 2.º caso indeterminato resta il problema; cosicchè conchiudiamo, che i rapporti di eguaglianza *derivati o da una inane identità di incognite*, *o da un altra equazione* nulla influiscono per la soluzione de' problemi, perchè o immediatamente, o mediatamente ci recano ad $x=x$.

573. Nella ripartizione de' problemi or fatta col prendere in considerazione il numero delle incognite, e delle equazioni era indispensabile dare un' idea de' problemi indeterminati. Si è perciò di essi dato un cenno per incidenza, e sol perchè nuova non riesca del tutto anche nello studio degli elementi la loro denominazione. Del resto il lor trattamento, ossia l' *analisi indeterminata* è un ramo oggidì assai esteso, ed interessante dell' Algebra superiore.

ARTICOLO VII.

Nozioni sull' impossibilità de' problemi di 1.º grado.

574. Due sorte d' impossibilità giova distinguere ne' problemi l' una inerente solo alle *condizioni concrete del problema*, l' altra inerente alle *condizioni astratte delle equazioni*, in cui il problema è tradotto.

575. La prima impossibilità, che dir possiamo *relativa* accade quando le equazioni in cui son tradotti i problemi ci recano a dei valori negativi, che non hanno alcun significato nel proposto quesito come nel problema della vasca (534), ovvero ci conducono a valori frazionarii, quando le condizioni esigono numeri

interi, come nel problema del pescatore (501), o ci danno valori interi quando le condizioni gli esigono frazionarii come nel problema (547) del Caffè, che esige $x+y+z=1$. E chiamiamo relativa questa impossibilità, perchè gli stessi valori o negativi, o frazionarii, o interi che sono impossibili pel dato problema non solo soddisfano alle condizioni astratte ossia alle condizioni puramente numeriche dell' equazione, che vien da essi convertita in vera identità, ma anche alle condizioni concrete di altri problemi talvolta anche di diversa indole e senza relazione alcuna col proposto, che pur vengono algebricamente espressi dalla stessa equazione.

576. L' altra impossibilità detta *assoluta* perchè inerente alla stessa natura astratta delle equazioni dipende o dalla *assurdità*, o dalla *incompatibilità* delle condizioni, cioè I. o perchè è impossibile una qualche condizione del problema: II. o perchè di condizioni tutte possibili separatamente considerate è impossibile la coesistenza.

577. La I. sorte d' impossibilità assoluta può rinvenirsi sì ne' problemi ad una, che a più incognite, quando essi ci offrono un' equazione assurda, quando cioè il loro ennunciato ci obbliga ad ammettere un rapporto d' eguaglianza fra due quantità, o membri diseguali, il che va a ridursi a supporre eguale a zero l' eccesso d' un membro sull' altro, sia che questo eccesso sia costituito da una quantità cognita, o da una ignota. Se si dà il 1.° caso, l'equazione assurda prende la forma di $x=x+c$ donde $x-x=c$ da cui risulta $0=c$, o immediatamente, perchè $x-x=0$; o mediatamente perchè $x-x=x(1-1)$, ond' è che da $x-x=c$ scende $x=c/_{1-1}=c/_0$, cioè l' assurdo che l' incognita sia eguale all' infinito (e in questo caso è il *problema* (533)

della vasca); e finalmente da $x = {}^c/_0$ scende $x \times 0 = c$, ossia $0 = c$. Se si da il 2.° caso, cioè se l'eccesso di un membro sull'altro è costituito dall'incognita, allor l'equazione assurda prende l'aspetto di $x + c = c$, donde $x = c - c$, e da questa risulta $x = 0$ o immediatamente, o mediatamente come nel 1.° caso si ha $c = 0$.

578. La II. sorte d'impossibilità assoluta fondata sulla *incompatibilità delle condizioni* non può aver luogo che ne' problemi, che ci offrono più equazioni, cioè nei *problemi a più incognite, e nei più che determinati* semplicemente fra quelli a un incognita sola; e in tal caso ciascuna equazione del problema impossibile isolatamente considerata non offre assurdo alcuno.

Così nel problema de' viaggiatori (556) non v'è dificoltà alcuna ad ammettere la quarta condizione, *che il triplo degli Uomini adulti più il numero de' fanciulli eguagli il numero delle donne*; niuna difficoltà pure ad ammettere contemporaneamente questa quarta condizione, e la terza, la qual ci esprime *che il numero degli adulti, e de' fanciulli insieme è la metà del numero delle donne* (554) dalle quali due condizioni risulta che $x = z$, ossia che il numero degli adulti è uguale a quel de' fanciulli (556): niuna difficoltà ad ammettere le prime 3 condizioni nell'enunciato esposte dalle quali risulta essere $x = 9$, e $z = 3$ (554): ma allora solo l'impossibile nasce, quando si vuò la coesistenza della 4.ª condizione colle altre tutte; poichè allor pretendiamo l'impossibile, che x sia eguale a z, ciò esigendolo la 3.ª, e 4.ª condizione, e sia al tempo stesso il suo triplo, siccome lo esigono le 3 prime.

Compiuto il trattato delle equazioni di primo grado, converrebbe passare ora alla soluzione delle equazioni di secondo grado: ma poichè questa esige la cognizione del trattato delle potenze, e delle radici, convien che prima ci occupiamo di queste.

CAPO VIII.

Teoria delle quantità potenziali, e precisamente formazione, e risoluzione delle potenze.

579. Se una qualsiasi quantità o venga presa una volta, o una o più volte di seguito venga moltiplicata per se medesima, si è già veduto (81, 140, 183), che il prodotto che ne risulta è *potenza*, ed è *radice* la quantità che lo genera, entrambe del grado espresso dal numero delle volte che la grandezza genetrice è ripetuta come fattor nel prodotto; cosicchè appellansi del grado 1.°, 2.°, 3.°.., *ennesimo*, se la radice è scritta come fattore 1, 2, 3...n volte, o ciò che è lo stesso (183), se la radice o non è mai moltiplicata per se, ma invece per l' unità, o è moltiplicata una volta, o due volte, o $n—1$ volte per se medesima.

580. Ciò posto una stessa quantità, qualunque ella sia, può da noi riguardarsi e come *radice* e come *potenza* di qualunque grado ci piaccia: come *radice*, purchè si riferisca ad una quantità in cui essa vi sia ripetuta come fattore per un numero di volte eguale al numero indicante il voluto grado della radice: come *potenza* purchè si concepisca come prodotta da una quantità generatrice ripetuta come fattore per un numero di volte eguale al voluto grado della potenza.

581. *Che una stessa quantità possa considerarsi come radice* 1.ª, o 2.ª, o 3.ª, ec. eccone un esempio. Lo stesso 3, o c è *radice prima* di 3, o di c, perchè 3, o c può reputarsi prodotto da 3, o da c scritto una volta come fattore, cioè non moltiplicato mai per se stesso, ma invece per l' unità. Lo stesso 3, o c è *ra-*

dice seconda di 9 o di c^2, perchè 9 può reputarsi prodotto da 3×3, e c^2 da $c \times c$: è *radice terza* di 27, o di c^3, perchè $27 = 3 \times 3 \times 3$, e $c^3 = c \times c \times c$; ec, ec.

582. *Che una stessa quantità possa considerarsi come potenza o* 1.ª, o 2.ª, o 3.ª, ec, eccone un esempio. Lo stesso 256, o a^4 è *potenza prima* di 256, o di a^4, perchè può riguardarsi prodotto dalla stessa quantità moltiplicata per 1 : è *potenza seconda* di 16 o di c^2, perchè può riguardarsi come formato da 16×16, o da $c^2 \times c^2$: è *potenza quarta* di 4 o di c, perchè può riguardarsi come formato da $4 \times 4 \times 4 \times 4$, ovvero da $c \times c \times c \times c$.

583. *Che una stessa quantità possa considerarsi e come radice, e come potenza* eccone un' esempio. Lo stesso 8, o g^3 è *radice terza*, quando si riferisce a 512, o a g^9, poichè $512 = 8 \times 8 \times 8$; e $g^9 = g^3 \times g^3 \times g^3$. Lo stesso 8, o g^3 è *potenza terza* se si riferisce a 2, o a g perchè può riguardarsi come formato da $2 \times 2 \times 2$, ovvero d $g \times g \times g$.

584. E dalle esposte nozioni rileviamo I. che la proprietá di esser potenza, o radice, e di esserlo d' un grado piuttosto che d' un' altro non è intrinseca alla quantità, che si prende di mira, ma dipende dalla quantità cui la riferiamo : II. che ogni quantità può riguardarsi e come potenza 1.ª, e come radice prima di se, come potenza riguardandola qual prodotto, come radice riguardandola quale fattore, allorchè per una abusiva analogia si considera anche l' unità per moltiplicatore, sicchè sotto un diverso concetto *radice prima*, e *potenza prima* esprimono la cosa stessa : III. che 1 esprime qualunque potenza, e qualunque radice di 1, perchè $1 \times 1 \times 1 \times 1 .... = 1$; mentre in ogni altro caso

le potenze diverse, o le diverse radici di un numero stesso è ben chiaro che esser deggiono quantità diverse, che possono ignorarsi, e costituir l' oggetto delle nostre ricerche.

585. Or quell' operazione sintetica per di cui mezzo data una quantità qualunque, che si considera come radice di un grado ennesimo, si trova la sua corrispondente ignota potenza, chiamasi *Elevazione a potenza*. L' operazione analitica direttamente contraria, per di cui mezzo data una quantità qualunque, che si considera come potenza ennesima, giungiamo a trarvi fuori quel germe, o fattore incognito che moltiplicato $n-1$ volte di seguito per se la produce, chiamasi *Risoluzione delle potenze*, o *Estraziono di radici*.

586. Il grado della potenza cui vuò innalzarsi una quantità (la quale in tal caso viene ad esser considerata per radice) è indicato da un' esponente posto in alto a destra di una linea orizzontale che cuopre, o di una parentesi (e questo è il mezzo il più esatto) che racchiude la quantità. Così $(a)^5$, $(a^2)^5$, $(-m^2p^3)^5$, $\left(\frac{a}{p}\right)^5$, $(m^2-c)^5$ sono espressioni, che indicano doversi il monomio semplice a, il potenziale a^2, il prodotto $-m^2p^3$, il frazionario $\frac{a}{p}$, e il binomio (m^2-c) innalzarsi *alla potenza quinta*, ossia moltiplicarsi 4 volte di seguito per se stesso.

587. Il grado della radice, che vogliamo estrarre da una data quantità (la quale in tal caso viene ad esser considerata per potenza) è indicato da un numero detto *indice*, o *esponente* della radice, che si colloca

nell' apertura del segno $\sqrt{}$, che appellasi *radicale*, e che si pone innanzi alla quantità considerata come potenza d'un grado corrispondente a quella radice, che vogliamo estrarvi. Così $\sqrt[3]{c}$ si enunzia *radice terza di c*, e significa, che considerata *c* come terza potenza, si vuò da essa trarre la radice che l' ha prodotta. Così $\sqrt[3]{a^6}$ si enunzia *radice terza di* a^6, e significa che considerata a^6 come non già potenza di quel grado, che è indicato dal suo esponente 6, ma come potenza del grado espresso dall' esponente del radicale sotto cui è posta, noi cerchiamo la radice terza, o quella quantità che moltiplicata due volte di seguito per se l' ha prodotta, e che vedremo esser a^2; ond' è che l' *indice della radice è anche l' indice del grado della potenza cognita esistente sotto il segno radicale* qualunque sia l' esponente della quantità che per la data potenza prendiamo. Se poi la quantità da cui vuò estrarsi la radice è complessa, o si prolunga la destra gamba del segno radicale orizzontalmente piegata al di sopra di tutti i termini del polinomio, o si chiude tra parentesi (e questo è il mezzo più esatto) la quantità da cui la radice vuò estrarsi così $\sqrt[3]{(ac^2+m-n)}$. Se nell' apertura del segno radicale non trovasi esponente alcuno, vi si sottintende il 2.

588. Conosciuto così il valor convenzionale accordato dagli Algebristi ai simboli indicati, intende ognuno che p. e. $\sqrt{(3)^2}=3$, e in genere $\sqrt[n]{(c)^n}=c$, poichè $\sqrt{(3)^2}$ altro non significa che *la radice seconda di quella seconda potenza la cui radice seconda è* 3; e l' espressione $\sqrt[n]{(c)^n}$ tradotta in parole ci dice « *La ra-*

dice ennesima di quella potenza ennesima, la cui radice ennesima è c». Così egualmente $(\sqrt{4})^2=4$; $(\sqrt[3]{4})^3=4$, ec. $(\sqrt[n]{c})^n=c$ poichè $(\sqrt{4})^2$ altro non è *che il quadrato di quella radice il cui quadrato è 4; ec. $(\sqrt[n]{c})^n$ è la potenza ennesima di quella radice la cui potenza ennesima è c.*

589. Nella *formazione*, e *risoluzione delle potenze* tutto s' aggira questo capo de' potenziali; e poichè le quantità date a considerarsi per radici o potenze, esser possono sì monomie che polinomie, così in 4 articoli sara diviso: il I. tratterà dell' elevazione a potenza, il II. dell' estrazione delle radici delle quantità monomie; quindi il III. dell' elevazione a potenze, e il IV. dell' estrazione delle radici delle quantità polinomie.

ARTICOLO I.

Formazione delle potenze de' Monomii.

590. Un monomio, qualunque egli sia, quando ne' casi particolari si sostituiscono alle lettere i lor valori aritmetici diventa un numero; ed un numero viene elevato ad una potenza qualsiasi moltiplicandolo per se tante volte meno 1 quante unità sono nell' esponente della richiesta potenza (183). Così p. e. $5^4 = 5\cdot5\cdot5\cdot5 = 625$; e così si sono ottenute le successive potenze di tutti i numeri semplici, che dalla prima sino alla quinta la seguente tavola ci offre.

1ª	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2ª	1	4	9	16	25	36	49	64	81
3ª	1	8	27	64	125	216	343	512	729
4ª	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561
5ª	1	32	243	1024	3125	7776	16807	32768	59049

591. Dopo di aver veduto come si eleva a potenza qualunque *quantità numerica*, passiamo a dar le regole per qualunque *monomio algebrico* in cui considerar conviene *segni*, *lettere*, *e lor coefficienti*, *ed esponenti*. E poichè l' elevar a potenza non è che un moltiplicar ripetutamente una quantità per se stessa, noi dall' attento esame del modo con cui giungiamo a formar così le richieste potenze, dedurre possiamo un metodo prattico compendioso per ottenerle, senza passare ogni volta per la tediosa trafila delle successive moltiplicazioni.

Regola pei segni.

592. Poichè $+a\times+a=+a^2$; $+a^2\times+a=+a^3$; $+a^3\times+a=+a^4$; ec: (227); poiche cioè una quantità positiva qualsiasi moltiplicata per se un numero qualunque di volte dà sempre un prodotto positivo, può conchiudersi che *qualsiasi potenza di qualsivoglia quantità positiva è sempre affetta dal segno* $+$.

593. Poichè $-a\times-a=+a^2$; $+a^2\times-a=-a^3$; $-a^3\times-a=+a^4$; $+a^4\times-a=-a^5$; ec. (227); poichè cioè una stessa quantità negativa se è presa per fattore un dato numero *pari* di volte dà sempre un pro-

dotto positivo, e dà un prodotto negativo se è presa per fattore un numero *dispari* di volte, il che accade perchè il prodotto dell' ultima moltiplicazione risulta sempre di fattori affetti ambedue dal segno — nel 1.°, e da segni contrarii nel 2.° caso, si può conchiudere che *le potenze pari di una quantità negativa son sempre affette dal segno +, le potenze dispari dal segno —.*

594. E conseguenza delle 2 or citate osservazioni è che le *potenze pari* hanno tutte il segno + o la radice sia *positiva*, o sia *negativa*: le *dispari* hanno tutte il segno stesso della loro radice.

Regola per le lettere, lor coefficienti, ed esponenti

595 La radice monomia da elevarsi a potenza I. può esser *semplice* come a; e poichè $(a)^2 = a \times a = a^2$; $(a)^3 = a \times a \times a = a^3$; ec., avremo in genere $(a)^n = a^n$: II. può esser affetta da un esponente, può esser cioè potenziale semplice, come a^5; e in tal caso poichè $(a^5)^2 = a^5 \times a^5 = a^{5+5} = a^{5.2}$ (§ 230); poichè $(a^5)^3 = a^5 \times a^5 \times a^5 = a^{5+5+5} = a^{5.3}$, ec., avremo in genere $(a^r)^n = a^{rn}$: III. può esser composta di più lettere, ossia prodotta da più fattori come a^4cm^3; e in tal caso poichè $(a^4cm^3)^2 = a^4cm^3 \times a^4cm^3 = a^4a^4ccm^3m^3 = a^{4+4}c^{1+1}m^{3+3} = a^{4.2}c^2m^{3.2}$, poichè $(a^4cm^3)^3 = a^4cm^3 \times a^4cm^3 \times a^4cm^3 = a^4a^4a^4cccm^3 m^3m^3$ (§ 230) $= a^{4.3}c^3m^{3.3}$; ec. ec., avremo in genere $(a^mc^r)^n = a^{mn}c^{rn}$: IV. può esser affetta da coefficiente, come $7a^4c$; e in tal caso poichè $(7a^4c)^2 = 7a^4c \times 7a^4c = 7 \cdot 7a^4a^4cc = 7^2a^{4.2}c^2$; poichè $(7a^4c)^3 = 7a^4c \times 7a^4c \times 7a^4c = 7 \cdot 7 \cdot 7a^4a^4a^4ccc = 7^3a^{4.3}c^3$; ec. avremo in genere $(7a^4c)^n = 7^na^{4n}c^n$; ond' è che da tutti questi esempii rileviamo che *un monomio si eleva a potenza col moltiplicar l'*

esponente di ciascun suo fattore numerico e algebrico per l'esponente della potenza . E così se la radice è una potenziale semplice , la sua potenza non è che la stessa radice con un esponente , che è il prodotto del proprio esponente per quello che indica il grado della chiesta potenza; se la radice è un prodotto di più fattori , la rispettiva potenza risulta degli stessi fattori della radice, ciascun de' quali ha un esponente , che è il prodotto del proprio esponente per quello indicante il voluto grado della potenza .

596. Quindi per mandare ad effetto tutte le indicate operazioni eseguibili nell' elevazione a potenza di un monomio, notiamo « *che il coefficiente va realmente elevato alla voluta potenza colle regole stabilite pei numeri* (590) : *che alle lettere, che non hanno esponente espresso, ossia che hanno per esponente l' unità va dato l' esponente della potenza , e a quelle che l' hanno va dato per esponente il prodotto dell' esponente proprio per quello della potenza .*

597. Fin quì dell' elevazione a potenza de' monomii positivi e negativi , semplici e potenziali , e prodotti da più fattori, e affetti da coefficiente , ma sempre *interi* . Le stesse regole valgono però anche pei monomii *frazionarii*, poichè se elevare a potenza una frazione non è che un moltiplicarla un dato numero di volte per se stessa , a tenor delle regole della moltiplicazione (334) , ciò non esige se non che si elevino al voluto grado due monomii interi, quali sono il numeratore, e denominatore . Così $\left(\frac{a}{c}\right)^2 = \frac{a}{c} \times \frac{a}{c} = \frac{a^2}{c^2}$.

Così $\left(\frac{a}{c}\right)^3 = \frac{a}{c} \times \frac{a}{c} \times \frac{a}{c} = \frac{a^3}{c^3}$. Così in genere $\left(\frac{a}{c}\right)^n = \frac{a^n}{c^n}$, cioè si eleva *una frazione al grado ennesimo a quel grado elevando ambi i suoi termini*; il che, avvertiamo fin d' ora, debbe verificarsi anche quando i suoi termini son polinomii.

Ecco l'applicazione delle esposte regole all' elevazione a potenza di varii monomii sì interi che frazionarii.

Monomii interi	*Monomii frazionarii*
$(5a^2gh^3)^4 = 625a^8g^4h^{12}$	$\left(\frac{4c^2m}{3hp^3}\right)^2 = \frac{16c^4m^2}{9h^2p^6}$
$(7cf^3)^5 = 16807c^5f^{15}$	$\left(-\frac{6c^3h^2}{8m}\right)^3 = -\frac{216c^9h^6}{512m^3}$
$(9m^2p)^n = 9^n m^{2n} p^n$	$\left(-\frac{9a^2}{11}\right)^4 = \frac{6561a^8}{14641}$
$(-2a^2ch)^4 = 16a^8c^4h^4$	
$(-9cf^2g^3)^3 = -729f^6g^9$	
$(-3a^2c^n)^r = \pm 3^r a^{2r} c^{nr}$ (a)	

ARTICOLO II.

Risoluzione delle potenze o estrazione delle radici de' Monomii.

598. L' estrazione delle radici è un' operazione

(a) Si è posto il doppio segno a questa espressione, perchè ignorandosi se r sia un numero pari, o dispari, intendiamo che vada preso il segno superiore se r è pari, l' inferiore se è dispari.

diametralmente opposta alla elevazione a potenza che decompone ciò che questa ha costruito, e perciò il suo processo tutto deducesi dall'esame di ciò che si è fatto nell'esecuzione di quest'ultima, come accade della divisione rispetto alla moltiplicazione.

599. Se la quantità data a considerarsi per potenza di un dato grado è puramente numerica, in tal caso se il numero è realmente una qualche potenza di qualcun de' numeri semplici, che riguardar possiamo come monomii numerici, si trarrà allora dalla tavola (590) la sua radice colle avvertenze date al § 656 in caso diverso si otterrà coi metodi che daremo nell'articolo sull'estrazione delle radici de' polinomii.

600. Se la quantità considerata come potenza è un monomio algebrico, per dedurne la sua rispettiva radice convien dar regole e per rapporto ai *segni*, e per rapporto alle *lettere*, *lor coefficienti*; *ed esponenti*.

Regole pei segni

601. Quando da una quantità estrarre vogliamo una radice dispari risulta dal § 594 che « *Nei gradi dispari la radice debbe aver sempre lo stesso segno della potenza*.

Quando estrarre vogliamo una radice di grado pari da una quantità, convien notare se dessa sia positiva, o negativa.

602. I Se la quantità è negativa; la supposizione che sia una potenza di grado pari è un'assurdo: è cioè un assurdo il supporre, che possa essere stata prodotta da una radice pari; poichè la radice esser non potrebbe che o positiva, o negativa, e nell'uno, o l'

altro caso elevata ad un grado pari darebbe un prodotto positivo, e non negativo come è la quantità data. Così $\sqrt{-a^2}$ non è nè $+a$ nè $-a$, poichè entrambe alzate a quadrato danno $+a^2$, e non $-a^2$, come l' ipotesi esigerebbe. Non esistono dunque radici pari di quantità negative. Perciò diamo il nome di *Simbolo immaginario* a ogni radicale di grado pari, che comprende una quantità negativa, ed esprimiamo l' impossibilità dell' esistenza di queste radici col dire che « *Ne' gradi pari le radici delle quantità negative sono immaginarie*.

603. II. Se la quantità è positiva, siamo incerti se sia stata prodotta da una radice affetta dal segno $+$ o dal segno $-$, poichè la stessa potenza pari positiva è prodotta dalla rispettiva radice, sia che questa si prenda affetta dal $+$ o dal $-$: e perciò per indicare che la radice può avere tanto il valor positivo, che il negativo, la facciamo precedere dal doppio segno $\pm$. Così $\sqrt{a^2}=\pm a$; e conchiudiamo che « *Ne' gradi pari le radici delle potenze positive deggiono essere affette dal doppio segno*.

Regole per le lettere, lor coefficienti, ed esponenti.

604. Se p. e. elevando alla terza potenza la radice a^5 veggiamo che $(a^5)^3=a^{5.3}=a^{15}$; volendo ora dalla potenza a^{15} ritornare alla radice che l' ha prodotta, sarà $\sqrt[3]{a^{15}}=a^{\frac{15}{3}}=a^5$. Così se $(q^n)^r=q^{nr}$, sarà $\sqrt[r]{q^{nr}}=q^{\frac{nr}{r}}=q^n$. E se dalle quantità di cui conoscevamo antecedentemente la radice passiamo in genere a qualunque quantità semplice, che ci piaccia di considerar per potenza di un dato grado, di cui la radice si ignori, è chiaro

che la potenza non può differir dalla sua radice, se non nel solo esponente (595), e poichè l' esponente di una potenza non è che il prodotto dell' esponente della radice moltiplicato per l' esponente indicante il suo grado (595), è chiaro che dividendo questo prodotto per uno de' suoi fattori, cioè per l' esponente indicante il grado, risultar dovrà l' altro fattore (98), cioè l' esponente proprio della radice, ond' è che data la potenza di un monomio semplice, si ottiene la sua radice collo scrivere la potenza stessa con un esponente, che sia il proprio diviso pell' esponente indicante il grado della voluta radice. Così $\sqrt[n]{c^r}=c^{\frac{r}{n}}$.

Se poi la quantità che consideriamo per potenza è un prodotto di più fattori, siccome nna radice perchè divenga potenza altro non esige se non che sia moltiplicato l' esponente d' ogni suo fattore pel grado della richiesta potenza (595), così perchè una potenza divenga radice, basta che in tal caso l' esponente di ogni suo fattore sia diviso pel grado della richiesta radice. Così

$$\sqrt[n]{c^r h p^m}=(c^r h^1 p^m)^{\frac{1}{n}}= c^{\frac{r}{n}} h^{\frac{1}{n}} p^{\frac{m}{n}}.$$

605. E poichè $c^{\frac{r}{n}}=\sqrt[n]{c^r}$; $h^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{h}$; $p^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{p^m}$, può anche dirsi che $\sqrt[n]{c^r h p^m}=c^{\frac{r}{n}} h^{\frac{1}{n}} p^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{c^r}\times\sqrt[n]{h}\times\sqrt[n]{h^m}$ cioè *la radice di un prodotto di più fattori è uguale al prodotto delle radici di tutti e singoli i suoi fattori*.

606. Se uno de' fattori è numerico, se cioè la potenza da cui si vuò estrarre la radice ha un coefficiente, siccome il coefficiente di una potenza è il coefficien-

te della radice realmente elevato al di lei grado, conviene da esso far regresso alla radice a tenor del § 599.

Così $\sqrt[4]{81a^4c^8} = \sqrt[4]{81} \times \sqrt[4]{a^4} \times \sqrt[4]{c^8} = \pm 3ac^2$; e così conchiudiamo che *si estrae la radice da un monomio estraendo realmente la radice dal coefficiente, e dividendo l'esponente di ciascuna lettera pel grado della radice richiesta*.

607. Si estraggono poi le radici dai monomii frazionarii, estraendo separatamente la radice dal numeratore, e denominatore, siccome entrambi si elevano al dato grado quando una radice frazionaria si vuò convertire in potenza (597).

Così $\sqrt{\frac{a^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{c^2}} = \frac{a}{c}$, e $\sqrt[n]{\frac{a^r}{c^m}} = \frac{a^{\frac{r}{n}}}{c^{\frac{m}{n}}}$

Ed è ben chiaro che la stessa dimostrazione val pure per le quantità polinomie.

608. Ecco l' applicazione delle indicate regole all' estrazione delle radici di varii monomii interi, e frazionarii

$\sqrt{c^6p^2} = \pm c^3p$

$\sqrt[3]{8a^6m^3} = + 2a^2m$

$\sqrt[4]{256a^8c^{12}} = \pm 4a^2c^3$

$\sqrt{-4a^2c^4}$ è immaginaria

$\sqrt[3]{-27g^3h^6} = - 3gh^2$

$\sqrt[5]{-32f^5g^5} = - 2fg$

$\sqrt[3]{\frac{8a^9}{27c^3}} = \frac{2a^3}{3c}$

$\sqrt[4]{\frac{81a^8c^4}{m^4p^8r^8}} = \pm\frac{3a^2c}{mp^2r^2}$

$\sqrt[5]{-\frac{c^5f^5g^{10}}{1024a^5}} = -\frac{cfg^2}{4a}$

609. In tutti i citati esempii si è potuto eseguire l' estrazione delle radici sulla parte letterale de' monomii, perchè ciascuno degli esponenti era divisibile per quello indicante il grado della radice. Quando nol fosse, come nel caso si avesse $\sqrt[3]{c^2}$, in allora passando a cercar la radice a tenor delle regole stabilite otteniamo $\sqrt[3]{c^2}=c^{\frac{2}{3}}$; e questa forma necessariamente frazionaria, che prende allora l' esponente del risultato, indica che l' estrazione della radice non è algebricamente possibile; e poichè un' esponente col divenir fratto perde il suo primitivo significato, non potendo più esprimere quante volte la quantità vada scritta come fattore (183), altre idee non ci offre che quelle, che ci presenta il segno radicale, cosicchè

$$\sqrt[3]{c^2},\ \text{e}\ c^{\frac{2}{3}},\ \text{e in genere}\ \sqrt[n]{a^m}\ \text{ed}\ a^{\frac{m}{n}}$$

deggiono prendersi per espressioni equivalenti sul riflesso, che come la esecuzione della divisione degli esponenti quando ha luogo corrisponde alla estrazione di radice, così al simbolo della stessa operazione dee corrispondere la semplice indicazione della divisione degli esponenti, e conchiuder possiamo che una quantità innalzata a un' esponente frazionario è una radice il cui grado è espresso dal denominatore dell' esponente, mentre il numeratore è l' esponente della quantità, da cui la radice vuò estrarsi. Così $c^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{c^1}=\sqrt[3]{c}$; così $(fg^2)^{\frac{2}{3}}$ $=\sqrt[3]{(fg^2)^2}=\sqrt[3]{f^2g^4}$.

Come dunque gli esponenti interi indicano eleva-

zioni a potenze, così i fratti esprimono estrazioni di radici. Nè si stimi inutile il simbolo degli esponenti fratti, siccome equivalente al segno radicale, che può far le sue veci, giacchè gli esponenti fratti avendo un' intimo legame coll' operazione da cui son generati (mentre il segno radicale non vi è associato che per pura convenzione) in forza dell' analogia che hanno cogli esponenti interi, assoggettandosi nel calcolo alle stesse regole stabilite per questi, ci recano per vie più spedite e senza bisogno di nuovi ragionamenti a dei risultati per ottenere i quali fa d' uopo di particolari dimostrazioni quando ci serviamo del segno radicale, come nella prossima teorìa de' radicali può rilevarsi.

Idea delle quantità affette da esponenti di diversa natura.

610. Traendo motivo dagli esponenti fratti di cui ci è occorso di far parola notiamo, che le convenzioni stabilite sulla maniera di esprimere le potenze, sebbene ci mostrino, che nel lor primigenio significato gli *esponenti* (183) esser non possono che numeri interi, e non suscettibili di +, e di —, pur nell' esecuzione di alcune operazioni ci recano per analogia a delle quantità affette da esponenti non solo interi, ma ancor frazionarii, e positivi, e negativi, e uguali a zero; e in que' casi ne' quali gli esponenti sono di tal natura da non poter esprimere la *ripetizione di uno stesso fattore*, alla quale indicazione furono in prima origine addetti, le quantità che ne sono affette sono *simboli particolari equivalenti ad altre espressioni* delle quali convien apprezzare il valore.

611. Si è or veduto (609) che dall' estrazione delle

radici nascono gli esponenti fratti, e che al simbolo $c^{\frac{r}{n}}$ corrisponde $\sqrt[n]{c^r}$.

612. Già vedemmo (242) che dalla divisione d' una potenziale per se stessa nasce il simbolo $a^0=1$.

613. Notiamo ora, che dalle regole stesse della divisione, e sottrazione deducesi un nuovo simbolo, di cui nella divisione sugli interi algebrici non parlossi, perchè si escluse il caso di un divisore, che avesse una lettera con esponente maggiore che nel dividendo, caso che ci reca a frazioni delle cui proprietà non avevamo allora come abbiam' ora chiare nozioni. Si abbia dunque $\frac{c^3}{c^5}$. Considerando questa espressione come frazione, abbiamo $\frac{c^3}{c^5}=\frac{1}{c^2}$ (§ 295): considerandola come indicazione di divisione e ponendo in prattica la regola data al § 241, abbiamo $\frac{c^3}{c^5}=c^{3-5}=c^{-2}$. Dunque $c^{-2}=\frac{1}{c^2}$. E ciò è consono al significato delle quantità negative: poichè a tenor di questo una quantità coll' esponente -2 significa quantità tale che ha d' uopo che in essa comparisca un' esponente 2 positivo, perchè si abbia zero per esponente, ossia perchè si abbia una quantità eguale ad 1; e questa quantità, la quale esige che in lei comparisca un c^2, che esige cioè di esser moltiplicata per c^2 ond' esser eguale ad 1, non può esser altra che $\frac{1}{c^2}$. In generale $\frac{a^m}{a^{m+n}}=\frac{1}{a^n}$ (§ 295):

d' altronde $\frac{a^m}{a^{m+n}} = a^{m-m-n}$ (§ 241) $= a^{-n}$: dunque

a^{-n} ed $\frac{1}{a^n}$ sono equivalenti; cioè *una quantità coll' esponente intero negativo è uguale ad* 1 *diviso pella quantità stessa sol che coll' esponente positivo*.

Per conseguenza $c^2m^{-3}q = c^2q\,\frac{1}{m^3} = \frac{c^2q}{m^3}$, cioè *quando una quantità contiene fattori affetti da esponenti negativi, questi si trasportano coll' esponente positivo nel denominatore*.

All' opposto $\frac{a^2c^5}{m^2p^3} = a^2c^5 \times \frac{1}{m^2} \times \frac{1}{p^3} =$ $a^2c^5m^{-2}p^{-3}$; *cioè si possono far passare nel numeratore tutti i fattori del denominatore, dando il segno — ai loro esponenti*.

614. Possono darsi anche quantità affette da esponente negativo frazionario. Infatti $\frac{c}{\sqrt[n]{c^{n+m}}} = \frac{c}{c^{\frac{n+m}{n}}}$

$= c^{1-\frac{n}{n}-\frac{m}{n}} = c^{-\frac{m}{n}}$ (§ 241); e al tempo stesso

$\frac{c}{\sqrt[n]{c^{n+m}}} = \frac{c}{c^{\frac{n+m}{n}}} = \frac{c^1}{c^1 . c^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{c^{\frac{m}{n}}}$ (295). Dunque

$c^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{c^{\frac{m}{n}}}$, cioè *una quantità coll' esponente frat-*

to negativo è uguale all' unità divisa pella stessa quantità ma coll' esponente positivo.

E perciò $a^2c^{-\frac{2}{3}}p^4 = a^2p^4 \times \frac{1}{c^{\frac{2}{3}}} = \frac{a^2p^4}{c^{\frac{2}{3}}} =$

$\frac{a^2p^4}{\sqrt[3]{c^2}}$; e viceversa $\frac{ch^2}{\sqrt[3]{m^2n}} = \frac{ch^2}{m^{\frac{2}{3}}\ n^{\frac{1}{3}}} =$

$$ch^2 \times \frac{1}{m^{\frac{2}{3}}} \times \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} = ch^2m^{-\frac{2}{3}}n^{-\frac{1}{3}}$$

615. È conseguenza de' stabiliti principii è pure che 1 *diviso per una quantità affetta da esponente negativo intero, o rotto che sia, è uguale alla quantità stessa sol che coll' esponente positivo.*

Infatti $\frac{1}{c^{-3}} = \frac{1}{\frac{1}{c^3}}$ (§ 613) $= \frac{c^3}{1}$ (§ 360) $= c^3$.

Parimenti $\frac{1}{c^{-\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\frac{1}{c^{\frac{2}{3}}}}$ (§ 614) $= \frac{c^{\frac{2}{3}}}{1}$ (§ 360) $= c^{\frac{2}{3}}$;

e perciò $\frac{m^2p}{c^{-3}} = m^2p \times \frac{1}{c^{-3}} = m^2pc^3$,

come pure $\frac{fg^3}{c^{-\frac{2}{3}}} = fg^3c^{\frac{2}{3}} = fg^3\sqrt[3]{c^2}$.

ARTICOLO III.

Formazione delle potenze de' Polinomii .

616. Bastano le semplici regole della moltiplicazione de' polinomii per poter elevare a una potenza *ennesima* un polinomio qualunque ; poichè si ha solo a moltiplicare $n-1$ volte di seguito per se stesso (579, 586). Ma se il grado della potenza è piuttosto alto , le numerose moltiplicazioni de' successivi prodotti (che si rendono sempre più complicati) per lo stesso dato polinomio , riescono assai incommode , ed è perciò che gli algebristi vi han trovato un compenso .

Elevazione a potenze de' Binomii .

Diamo principio al trattato dell' elevazione , a potenze delle quantità complesse dai binomii , e perchè sono essi i polinomii meno complicati , e perchè le regole che li riguardano servon di norma per tutti gli altri .

Elevazione de' binomii alla seconda potenza , o al quadrato

617. Per dar principio dall' elevazione de' binomi alla meno alta real potenza qual è la 2.^{a}, chiamando per a, e c i due termini di qualunque binomio onde far uso di una espressione la più semplice , notiamo che se ambedue i termini son positivi si ha la formola

$$(a+c)^2 = (a+c)\ (a+c) = a^2+2ac+c^2:$$

se ambedue i termini son negativi , si ha la formola

$$(-a-c)^2 = (-a-c)\ (-a-c) = a^2+2ac+c^2:$$

se l' un termine è positivo, e negativo l' altro si ha

$$(a-c)^2 = (a-c)\ (a-c) = a^2-2ac+c^2,$$

dal che conchiudiamo che il quadrato di un binomio ordinato rispetto alla stessa lettera per cui è ordinata la radice, risulta sempre di 3 termini cioè *del quadrato del 1.° termine, del doppio prodotto del 1.° nel 2.°, e del quadrato del 2.°, e tutti questi sono affetti dal segno + se ambi i termini del binomio hanno lo stesso segno sia positivo sia negativo, e il solo doppio prodotto è negativo, se i termini del binomio hanno segni contrarii*.

618. Applicando questi principii ai binomii composti di termini diversi sì interi che frazionarii col sostituire ad a e c i valori che il caso particolare ci offre troviamo p. e. che

$$(ax+mz)^2 = a^2x^2+2amxz+m^2z^2$$

$$(4a^2c+a^3)^2 = 16a^4c^2+8a^5c+a^6$$

$$(2am^2-3m)^2 = 4a^2m^4-12am^3+9m^2$$

$$\left(c^3+\frac{a}{2}\right)^2 = c^6+ac^3+\frac{a^2}{4}$$

$$\left(\frac{g^2}{3}+\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{g^4}{9}+\frac{g^2}{2}+\frac{9}{16}$$

$$(20+6)^2 = 400+240+36=676$$

619. Il teorema (617) che ci espone le parti di cui risulta un binomio qualunque, ci offre il mezzo di dimostrare delle proprietà interessanti, che ci offrono i quadrati de' *numeri naturali*.

E primieramente se desideriamo una formola la quale ci mostri in un modo generico, ossia algebrico la differenza che passa fra il quadrato d' un numero qualunque, e il quadrato del numero immediatamente pros-

simo di lui maggiore, chiamato a il primo, ed $a+1$ il secondo, questa differenza si avrà col sottrarre il quadrato del primo cioè a^2 dal quadrato del secondo che è $(a+1)^2 = a^2+2a+1$ (§. 617); e sarà perciò $a^2+2a+1-a^2=2a+1$

Dunque $2a+1$, ossia *il doppio del dato numero più 1 è la differenza che passa tra il suo quadrato e il quadrato del numero che immediatamente lo segue*. Così la differenza tra il quadrato di 4, e di 5 ossia tra 16 e 25, è appunto 9 doppio di 4 più 1: così la differenza tra il quadrato di 5, e di 6, ossia tra 25, e 36 è appunto 11 doppio di 5 più 1; e in genere *nella serie de' numeri naturali il doppio d'un qualunque termine più 1 esprime la differenza tra il suo quadrato, e il quadrato del termine che lo segue*

620. E poichè data la serie de' numeri naturali

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ec.

col moltiplicare ogni suo termine n per 2 si ha $2n$ per formola de' numeri pari, la cui serie è

0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ec.

e quindi coll'aggiunger 1 a ciascun d'essi espresso da $2n$ si forma $2n+1$ che è la formola degli impari stessi la cui serie è

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, ec.

la quale come la serie de' numeri pari ha 2 per differenza costante fra un termine e l' altro, dalla genesi di queste serie risulta che 1 primo termine de' numeri impari è il doppio del primo termine zero della serie de' numeri naturali più 1: il 3 secondo termine de' numeri impari è il doppio del secondo termine 1 della serie de' numeri naturali più 1: il 5 terzo termine de' numeri impari è il doppio del terzo termine 2 della serie de' numeri naturali più 1; e così all' infinito ogni

termine progressivo della serie dei dispari è il doppio del rispettivo termine della serie de' numeri naturali più 1: ma il doppio di ciascun termine progressivo della serie de' numeri naturali più 1 esprime la differenza che passa tra i quadrati di quel termine, e del conseguente (619); *dunque i termini della serie de' numeri impari esprimono le successive differenze tra i quadrati de' numeri naturali, come la seguente tavola mostra.*

$0,\ 1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2,\ 6^2,\ 7^2,\ 8^2..$
$0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64$
$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15$

621. Siccome poi la serie de' numeri impari ha 2 per differenza costante, ha cioè tali i suoi termini, che ciascun d' essi supera di 2 l' antecedente (620), così è chiaro che la differenza de' quadrati di due numeri consecutivi va di 2 in 2 aumentandosi per ogni posto, che ci allontaniamo dalla origine della serie.

622. Dalle dimostrate verità scende ancor la seguente. Il primo termine della serie de' numeri impari 1 esprimendo la differenza tra il quadrato di zero, e di 1 primi termini delle serie naturale è necessariamente uguale allo stesso quadrato di 1. Il 2.° termine 3 della serie de' dispari indica la differenza tra il quadrato di 1 e di 2: e perciò se ad 1 primo termine della serie de' dispari indicante il quadrato di 1 aggiungiamo il 2.° termine 3, che indica ciò che manca al quadrato di 1 per esser eguale al quadrato di 2, formeremo il quadrato di 2. Se alla somma 4 de' due primi termini della serie de' dispari esprimente il quadrato di 2 aggiungiamo il 3.° termine 5 esprimente ciò che manca al quadrato di 2 per divenir quadrato di 3, formeremo il quadrato di 3: se al 9 somma dei tre pri-

mi termini dispari, somma che esprime il quadrato di 3 aggiungiamo il 4.° termine 7 esprimente ciò che manca al quadrato di 3 per divenir quadrato di 4, formeremo il quadrato di 4; e così indefinitamente progredendo dovrà verificarsi che « *La somma di tutti i termini progressivi della serie de' numeri impari dal primo sino ad un qualunque di essi è uguale al quadrato del numero de' termini sommati* ; e sì questo che l' antecedente teorema hanno in fisica un'utilissima applicazione specialmente nelle leggi della gravità.

Elevazione de' Binomii alla terza potenza, o al cubo.

623. Nell' elevazione a cubo di un binomio qualunque notiamo che

Se ambedue i termini son positivi si ha

$$(a+c)^3 = (a+c)\,(a+c)\,(a+c) = (a+c)^2\,(a+c)$$
$$= (a^2+2ac+c^2)\,(a+c) = a^3+3a^2c+3ac^2+c^3.$$

Se ambedue i termini son negativi, si ha

$$(-a-c)^3 = (-a-c)\,(-a-c)\,(-a-c) = (-a-c)^2 \times$$
$$(-a-c) = (a^2+2ac+c^2)\,(-a-c) = -a^3$$
$$-3a^2c-3ac^2-c^3.$$

Se l' un de' termini è positivo, e negativo l'altro si ha

$$(a-c)^3 = (a-c)\,(a-c)\,(a-c) = (a-c^2)\,(a-c) =$$
$$(a^2-2ac+c^2)\,(a-c) = a^3-3a^2c+3ac^2-c^3;$$

sicchè conchiudiamo che il cubo di un binomio risulta sempre di 4 termini, cioè *del cubo del* 1.° *termine, del triplo quadrato del primo termine nel* 2.°, *del triplo del primo nel quadrato del* 2.°, *e del cubo del* 2.° *termine: e tutti questi termini sono affetti dal segno stesso de' termini del binomio quando ambedue l' hanno eguale, son cioè tutti positivi, o negativi, se positivi o negativi sono ambedue i termini del bi-*

nomio ; e sono alternativamente positivi e negativi i termini del cubo quando i termini del binomio hanno segni contrarii , essendo in tal caso negativi solo que' termini , che contengono le potenze impari di quel termine del binomio , che è negativo (594) .

624. Applicando il dimostrato teorema , che l' analisi ci offre delle parti di cui risulta il cubo di un binomio, ai diversi casi particolari in cui a , e c hanno diversi valori sì interi che frazionarii, troviamo p. e. che

$$(3f^3+4c^2)^3 = 27f^9+108c^2f^6+144c^4f^3+64c^6$$

$$(2g^2-3g)^3 = 8g^6-36g^5+54g^4-27g^3$$

$$\left(\frac{h}{2}+\frac{2g^2}{3h}\right)^3 = \frac{h^3}{8}+\frac{g^2h}{2}+\frac{2g^4}{3h}+\frac{8g^6}{27h^3}$$

$$\left(\frac{m}{3}-\frac{m}{9}\right)^3 = \frac{m^3}{81} - \frac{m^3}{729} = \frac{8m^3}{729}$$

$$(20+2)^3 = 8000+2400+240+8=10648 .$$

625. Dallo stesso teorema scende pure la formola che ci mostra la differenza tra il cubo d' un numero qualunque a , e del numero che immediatamente il segue , cioè di $a+1$. Questa differenza infatti si ha sottraendo a^3 da $(a+1)^3$, ossia da a^3+3a^2+3a+1, e risultato di questa sottrazione è $a^3+3a^2+3a+1-a^3 = 3a^2+3a+1$. Dunque $3a^2+3a+1$, ossia *la somma di 1 più il triplo del dato numero , più il triplo del suo quadrato , è sempre la differenza che passa tra il cubo del dato numero e dell' immediatamente prossimo* . Così la differenza tra il cubo di 2, e di 3, cioè tra 8, e 27 , è appunto 19, che nasce dalla somma di 1 col triplo di 2 che è 6 più il triplo del suo quadrato 4, che è il 12: così la differenza tra il cubo di 3 e

di 4, cioè tra 27 e 64 è 37, che nasce appunto dalla somma di 1 più il triplo di 3 che è 9, più il triplo del suo quadrato che è 27.

Innalzamento de' binomii a qualsivoglia potenza per mezzo della formola del binomio Newtoniano.

626. Moltiplicando il cubo o di $(a+c)$, o di $-a-c)$, o di $(a-c)$ pel binomio stesso fatte le debite riduzioni si ha per risultato la quarta potenza, e questo risultato tradotto in parole ci indica di quante e quali parti è costituita la quarta potenza di un binomio qualunque.

Moltiplicando pel binomio stesso l' ottenuta sua quarta potenza, si ottiene un risultato che ci indica di quali e quante parti è costituita la quinta potenza, ec., come la seguente tavola ci offre.

$$(a+c)^1 = a+c$$
$$(a+c)^2 = a^2+2ac+c^2$$
$$(a+c)^3 = a^3+3a^2c+3ac^2+c^3$$
$$(a+c)^4 = a^4+4a^3c+6a^2c^2+4ac^3+c^4$$
$$(a+c)^5 = a^5+5a^4c+10a^3c^2+10a^2c^3+5ac^4+c^5$$

ec. ec.

Incommodo però riescirebbe alla nostra mente il ritenere a memoria tanti distinti teoremi, quanti ne abbiamo circa la costituzione delle successive potenze che sono tanto più complicate quanto più alto è il lor grado, come pur tediosa ci riescirebbe l' esecuzione di tante moltiplicazioni quante ne occorrerebbero per giungere alle richieste potenze passando per tutte quelle, che sono ad esse inferiori.

A questi inconvenienti porge riparo l' utilissima

formola inventata dal genio di Newton, la quale perchè prestasi alla formazione di qualsiasi alta potenza di qualunque binomio precisandoci di *quanti*, *e quali* termini essa risulti, dal suo inventore ha riceuto il nome di *formola del binomio Newtoniano*, formola che per analogia dedurremo dall' esame delle successive potenze del binomio $a+c$, che abbiam nella tavola ora espresse.

627. Dall' analitica ispezione di questa tavola rileviamo primieramente, che il numero de' termini costituenti lo sviluppo di qualunque potenza supera di 1 il grado della potenza stessa, sicchè pari è il numero de' termini delle potenze dispari, e dispari è il numero de' termini delle potenze pari. Precisato il *numero* de' termini di qualunque potenza, conviene ora precisarne la *qualità*, stabilendo per ciascun di essi delle regole relative a ciascuno degli elementi di cui risultano cioè ai *segni* alle *lettere* lor *coefficienti*, ed *esponenti*, facendo sì che tutte queste regole indicate ci vengano da una semplice formola.

Regole pei segni

628. Per non rendere troppo complicate le espressioni, ci siamo contentati di scrivere nella tavola (626) lo sviluppo delle successive potenze del binomio nella sola ipotesi che ambedue i suoi termini sien positivi, poichè rammentando che le sole potenze dispari de' monomii negativi son negative (594), è facile lo stabilire rapporto ai segni i seguenti canoni per ciascuno dei tre distinti casi che possono darsi.

I. Se ambo i termini del binomio son positivi, positivi son tutti i termini di qualsiasi potenza come osserviam nella tavola.

II. Se ambo i termini del binomio son negativi, positivi riescono i termini tutti delle potenze pari, e negativi i termini tutti delle potenze dispari.

III. Se l' un de' termini del binomio è positivo, e negativo l' altro, sono alternativi i termini delle potenze, avendo il segno — sol quelli ove trovansi le potenze dispari del termine negativo del binomio.

Regola per le lettere.

629. In tutti i termini di qualunque potenza del binomio $a+c$ esistono a, e c moltiplicate una per l' altra, poichè se manca c nel 1.° ed a nell' ultimo termine di qualsiasi potenza, come rilevasi nella tavola (626), noi per un utile uniformità intendiamo che vi sieno elevate alla potenza zero (242).

Regola per gli esponenti.

630. E dall' esame della stessa tavola rileviamo I. che nel 1.° termine dello sviluppo l' esponente del primo termine a è lo stesso esponente m cui deve tutto il binomio innalzarsi, e va scemando di un grado di termine in termine successivo sino a divenir zero nell' ultimo. II. Che l' esponente di c va poi al contrario con ordine inverso, è cioè zero nel primo termine dello sviluppo, e va di termine in termine aumentando di un grado, finchè giunge ad essere nell' ultimo termine lo stesso m, che a aveva nel primo. III. Che perciò tutti i termini dello sviluppo sono omogenei, è cioè sempre eguale in ciascun di essi la somma degli esponenti di a e c, somma che è sempre lo stesso esponente m della potenza cercata; poichè quando a ha per espo-

nente m, c ha per esponente *zero*; e ne' termini successivi cresce l'esponente di c di quanto scema l'esponente di a, cosicchè qualunque sia la potenza, ecco l'ordine con cui compariscono ne' successivi termini le potenze di a, e c.

$$a^m c^0,\ a^{m-1}c^1,\ a^{m-2}c^2,\ a^{m-3}c^3 \ldots a^0 c^m.$$

IV. finalmente che i termini di qualunque potenza come ce li presenta la serie ora espressa, e la tavola (626) costituiscono un polinomio *ordinato* rispetto alla lettera a, mentre il costituirebbero ordinato riguardo alla lettera c, se fossero scritti in ordine retrogrado.

Regola pei coefficienti.

631. Ben analizzando la legge con cui in ciascuna delle potenze esposte (626) procedono i coefficienti, troviamo I. che il coefficiente del primo, ed ultimo termine dello sviluppo è 1. II. Che il coefficiente di ogni altro termine è sempre il coefficiente del termine anteriore moltiplicato per l'esponente che vi ha a, e diviso pel numero d'ordine dello stesso termine antecedente, di modo che ecco la *serie de' coefficienti* de' successivi termini di qualunque potenza

$$1,\ \frac{m}{1},\ \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2},\ \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3},\ldots 1 \text{ ovvero}$$

$$1,\ m,\ \frac{m(m-1)}{2},\ \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3},\ldots 1$$

III. che non solo il coefficiente del 1.° ed ultimo termine sono eguali, ma eguali pur sono i coefficienti de' termini equidistanti dagli estremi di modo che quando trattasi di potenze pari, il numero de' cui termini

è perciò impari (627), dopo il coefficiente massimo tornano gli stessi coefficienti precedenti con ordine inverso; e quando trattasi di potenze impari il numero de' cui termini è pari, dopo la precisa metà de' termini, ossia dopo il primo de' due medii compariscono pei termini successivi gli stessi coefficienti precedenti con ordine inverso, il che risparmia la metà della fatica per la lor formazione: nè ciò può andar altrimenti poichè se invece di elevar a potenza $a+c$ eleviamo $c+a$, si ottiene per la voluta potenza lo stesso polinomio solchè scritto con ordine inverso, in modo cioè che l' ultimo diventa primo termine, secondo il penultimo, terzo l' antepenultimo, ec. e poichè nell' uno e nell' altro caso il coefficiente di ciascun termine dipende solo dal coefficiente del termine antecedente, e dall' esponente delle prima sua parte (nulla interessando se questa sia a, o c) è chiaro che i termini che possono barattar posto aver deggiono il medesimo coefficiente, onde intatta rimanga la legge che regna nella lor formazione, e che non può esser dal suddetto cambiamento di posto alterata.

632. E dopo queste osservazioni generali sui segni, lettere, esponenti, e coefficienti de' successivi termini di qualunque potenza m di un binomio, siamo naturalmenti condotti alla seguente così detta *formola del binomio Newtoniano*

$$(a \pm c)^m = a^m \pm m a^{m-1} c + \frac{m\,(m-1)}{2} a^{m-2} c^2 \pm$$

$$\frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{2 \cdot 3} a^{m-3} c^3 \ldots\ldots \text{(a)}$$

(a) Questa formola non abbraccia il caso in cui ambedue i

la quale da quanto si è esposto può dirsi formata così. » *Il* 1.° *termine è* $a^m c^o$. *Ogni altro si forma da quel che il precede con queste modificazioni : si moltiplica il suo coefficiente per l' esponente di a , e si divide pel numero indicante il suo posto : si diminuisce di* 1 *l' esponente di a , e di* 1 *si accresce l' esponente di c .* »

633. Se ottener per es. vogliamo lo sviluppo di $(a+c)^5$ altro far non dobbiamo che sostituire ad m il 5 nella formola (632) ; ovvero mettere direttamente in prattica l' or esposta regola per la formazione di ciascun termine : così troviamo che

Il. I. termine è $1\, a^5c^o$, ovvero a^5
Il II. è $^5/_1\, a^4c^1$, ovvero $5a^4c$
Il III. è $^{5.4}/_2\, a^3c^2$, ovvero $10a^3c^2$
Il IV. è $^{10.3}/_3\, a^2c^3$, ovvero $10a^2c^3$
Il V. è $^{10.2}/_4\, a^1c^4$, ovvero $5ac^4$
Il VI. è $^{5.1}/_5\, a^oc^5$, ovvero c^5

E che qui abbia fine lo sviluppo ne siamo avvertiti dalla stessa regola o formola , poichè proseguendo ad applicarla al termin seguente ci dà zero per risultato : infatti il coefficiente del settimo termine risulta del coefficiente del sesto che è l' unità moltiplicata per l' esponente di a nel termine stesso , esponente che

---

termini del binomio sien negativi , e riputiamo inutile lo scriverla anche per questa ipotesi, bastando il riflesso che se m è numero pari tutti i termini son positivi , e tutti negativi se è dispari (628) . Accenniamo inoltre che la formola dello sviluppo di $(a+c)$ elevato all' esponente m si applica a tutti i valori dell' esponente m, cioè anche al caso in cui m sia frazionario , e negativo ; ma queste sue applicazioni , e la stessa sua rigorosa e generale dimostrazione appartengono all' algebra superiore .

è zero, e che perciò zero rende il prodotto di qualunque quantità venga per esso moltiplicata.

Riunendo ora tutti i termini ottenuti con questa formola o regola abbiamo

$$(a+c)^5 = a^5+5a^4c+10a^3c^2+10a^2c^3+5ac^4+c^5,$$

sviluppo identico al prodotto ottenuto per mezzo delle successive moltiplicazioni nella tavola (626).

634. Colla stessa regola o formola non solo qualunque potenza del binomio $(a+c)$, ma qualunque potenza può ottenersi di qualunque binomio, quando ad m si sostituisca il grado della voluta potenza, e ad a, e c i valori particolari, che ci offrono il 1.°, e 2.° termine del dato binomio, il che per esercizio di calcolo gioverà agli allievi in varii esempii eseguire.

Elevazione a potenze di qualunque Polinomio

635. Lo sviluppo delle potenze di un polinomio qualunque riducesi allo sviluppo delle potenze di un binomio, di modo che non esige che una continua applicazione delle regole stabilite per questo; laonde è inutile l' aggravar la memoria di nuovi particolari teoremi per l'elevazione a potenze de' trinomii, quadrimii, ec. come in alcuni corsi si pratica.

Elevazione de' trinomii, quadrinomii, ec. al quadrato

636. Se il polinomio che debbe elevarsi a quadrato è il trinomio $f+g+h$, è chiaro che possiamo ridurlo ad un binomio facendo $f+g=a$ mentre avremo allora

$$(f+g+h)^2 = (a+h)^2 = a^2+2ah+h^2. \ (617),$$

e sostituendo in quest' ultima espressione ad a il da lei rappresentato binomio $f+g$, si avrà

(A) $(f+g+h)^2 = (f+g)^2 + 2(f+g)h + h^2$; e finalmente sviluppando le parentesi.

(B) $(f+g+h)^2 = f^2+2fg+g^2+2fh+2gh+h^2$; e se p, e. $f=300$, $g=20$, $h=4$, sarà $(300+20+4)^2 = (320+4)^2 = 320^2+2\cdot320\times4+4^2 = (300+20)^2+2\cdot320\times4+4^2 = 300^2+2.300\times20+20^2+2\cdot320\times4+4^2$

637. Se il polinomio da elevarsi alla 2.^{a} potenza è il quadrinomio $f+g+h+i$, riducesi anch' esso ad un binomio, quando facciasi $(f+g+h)=a$, mentre allora si avrà

$$(f+g+h+i)^2 = (a+i)^2 = a^2+2ai+i^2,$$

nella qual' ultima espressione sostituendo ad a il trinomio che rappresenta, avremo $(f+g+h+i)^2 =$

(C) $(f+g+h)^2 + 2(f+g+h)i + i^2 =$

(D) $(f+g)^2 + 2(f+g)h + h^2 + 2(f+g+h)i + i^2$ (§ 636)$=$

(E) $f^2+2fg+g^2+2(f+g)h+h^2+2(f+g+h)i+i^2$,

e similmente si opera in casi anche più complicati.

638. Frattanto le ottenute espressioni ben analizzate ci offrono alcune proprietà assai interessanti, che riguardano i quadrati delle radici polinomie, e son le seguenti

I. Qualunque sia il numero de' termini d' una radice polinomia, il primo termine della sua 2.^{a} potenza ordinata per rapporto alla stessa lettera per cui è ordinata la radice è sempre il quadrato del 1.º termine della radice, come rileviamo in (B), ed in (E).

639. II. Il 2.º termine del quadrato è sempre il doppio prodotto del 1.º in un' altro termine della radice, che riguardar possiamo come il 2.º a tenor della disposizione che presentano i termini nel quadrato, come egualmente rilevasi in (B), ed in (E).

640. III. Esiste sempre nel quadrato totale il quadrato della somma dei primi 2 termini della radice come ci manifestano (A), e (D).

641. IV. Se poi la radice ha più di due termini, esiste nel di lei quadrato il quadrato de' primi due termini, più il doppio dei primi due moltiplicato pel terzo, più il quadrato del terzo, con che si viene a costituire il quadrato de' primi tre termini della radice, ossia di tutti se dessa è trinomia, come rilevasi in (A).

642. V. Se la radice ha più di 3 termini, nel suo quadrato esiste sempre non solo il quadrato de' suoi primi tre termini di cui è una parte il quadrato dei primi due, ma v' è di più il doppio prodotto de' primi 3 termini pel 4.° ed il quadrato del 4.° con che si viene a costituire il quadrato de' primi 4 termini della radice, ossia di tutti se è quadrinomia come rilevasi in (c): che se dessa di più termini risultasse, è ormai ben caratterizzata la legge con che proseguono ad esser formati i residuali termini che mancano a completare il quadrato.

643. E tutte queste osservazioni ci portano a conchiudere, che il quadrato di qualunque radice polinomia contiene il quadrato del suo primo, de' suoi primi due, de' suoi primi tre ec. termini, e questi quadrati derivano l' un dall' altro con una legge uniforme, sicchè per formare il quadrato d' una radice polinomia qualunque, piuttosto che servirci del lungo metodo (636, 637) che esige delle successive sostituzioni, possiamo in vece servirci della seguente graduata costruzione.

Si alza a quadrato il 1.° termine della radice: il di lui doppio si moltiplica pel 2.°: si alza a qua-

drato il 2.°, ed in questo assieme ecco il quadrato de' primi due termini della radice (617, 640) ossia di tutti se dessa è binomia.

Si aggiunge a questo quadrato il doppio prodotto dei primi due termini pel terzo, e il quadrato del terzo; ed ecco compiuto il quadrato dei primi 3 *termini della radice* (641), ossia di tutti, se dessa è trinomia. *A questo quadrato si aggiunge il prodotto de' primi* 3 *termini pel* 4.° *più il quadrato del* 4.°, ed ecco compiuto il quadrato de' primi 4 termini della radice, se dessa è quadrinomia (642).

E finalmente dopo aver così operando ottenuto il quadrato della somma di tutti i termini della radice meno l' ultimo, *aggiungendo a questo il doppio di tutti i termini della radice moltiplicato per l' ultimo più il suo quadrato, si ha il completo quadrato di tutta quanta è la polinomia radice.*

Considerando in tal guisa i successivi quadrati de' primi due, dei primi tre, dei primi 4, ec. termini della radice come il quadrato della prima parte d' un binomio, lo sviluppo del quadrato d' un polinomio sia pur complicatissimo è sempre ridotto allo sviluppo di un binomio, e perciò non esige che la replica delle stesse operazioni.

644. Frattanto riescirà agli allievi utilissimo l' esercitarsi nella formazione de' quadrati de' polinomii sì col metodo (636, 637) che coll' ora esposto, notando la coincidenza de' risultati.

Così p. e. $2a^2+c^3+3h$ alzato a quadrato sì coll'un metodo che coll' altro ci dà per ultimo risultato

$$4a^4+4a^2c^3+c^6+12a^2h+6c^3h+9h^2.$$

645. È poi finalmente a notarsi che qualunque sia

l' ordine con cui sono disposti i termini d' una radice polinomia, il suo quadrato è sempre lo stesso non solo per rapporto al *valore*, il che è evidente, quando riflettasi che per essere p. es. $f+g+h = h+g+f = g+h+f =$ ec, debbe essere anche $(f+g+h)^2 = (h+g+f)^2 = (g+h+f)^2 =$ ec; ma è lo stesso ancora per rapporto alla sua *costituzione*.

Infatti nel quadrato ordinato a tenor della disposizione (qualunque ella sia) de' termini della radice, debbe sempre verificarsi, che il 1.° termine è il quadrato del 1.° termine della radice (638): che il 2.° è il doppio prodotto del 1.° termine nel 2.° termine della radice (639): che in esso è contenuto il quadrato dei primi due, dei primi tre, ec. termini della radice (643), poichè la dimostrazione data siccome indipendente dal particolar valore de' termini della radice, è sempre la stessa per qualunque loro disposizione, dal che deriva che l' *ordinamento de' termini d' un polinomio quadrato fatto per una piuttosto che per un' altra lettera non porta diversità che nel solo ordine in cui concepir dobbiamo disposti i termini della radice che lo produce*. Le quali cose tutte verificar possiamo alzando a quadrato il trinomio $2a^2+c^3+3h$ in tutte le sei possibili diverse relative collocazioni de' suoi 3 termini.

Elevazione de' trinomii, quadrinomii, ec. al cubo

646. Se il trinomio $f+g+h$ è il polinomio che debbe elevarsi a cubo, si converta in binomio sostituendo a ad $f+g$; e si avrà (623)

$$(f+g+h)^3 = (a+h)^3 = a^3+3a^2h+3ah^2+h^3,$$

e sostituendo ora ad a il binomio che rappresenta, avremo

$(f+g+h)^3 = (f+g)^3 + 3(f+g)^2h+3(f+g)h^2+h^3$

espressione il cui completo sviluppo non esige altre regole oltre quelle, che già conosciamo:

e se p. e. $f=300$, $g=20$, $h=4$, sarà

$(300+20+4)^3 = (320+4)^3 = 320^3+3\cdot320^2\times4$
$+3\cdot320\times4^2+4^3 = (300+20)^3+3\cdot320^2\times4$
$+3\cdot320\times4^2+4^3 = 300^3+3\cdot300^2\times20+$
$3.300\times20^2+20^3+3\cdot320^2\times4+3\cdot320\times4^2+4^3$.

E similmente si opera per l'elevazione a cubo di polinomii anche più complicati.

647. Frattanto un' analisi simile a quella che fatta abbiamo sui quadrati delle radici polinomie ci porta a conoscere che il cubo di qualunque polinomio può ottenersi come segue.

Si alza a cubo il primo termine: si moltiplica il triplo quadrato del 1.° *pel* 2.°, *il triplo del primo pel quadrato del* 2.°; *e si alza a cubo il* 2.° *termine*; e con ciò si ha il cubo de' primi due termini della radice, ossia di tutta se essa è binomia.

A questo cubo de' primi due termini si aggiunge il triplo quadrato de' primi due moltiplicato pel terzo, il triplo de' primi due moltiplicato pel quadrato del terzo, e il cubo del terzo termine; ed ecco così compiuto il cubo de' primi tre termini della radice, o di tutta la radice se dessa è trinomia ec.

Così il trinomio $2a^2+c^3+3h$ alzato a cubo con tal metodo ci dà $8a^6+12a^4c^3+6a^2c^6+c^9+3(2a^2+c^3)^2 3h$ $+3(2a^2+c^3)9h^2+27h^3$.

Elevazione de' trinomii, quadrinomii, ec. a qualunque potenza

648. Per elevare a qualunque potenza qualsivoglia polinomio il più complicato, convien prima d'ogni

altro ridurlo alla forma di binomio per mezzo di sostituzioni simili a quelle pratticate ai §. 636, 637; e poi elevare questo binomio alla potenza richiesta per mezzo della formola Newtoniana (634); e sviluppar quindi colle debite regole le quantità chiuse tra parentesi.

ARTICOLO IV.

Risoluzione delle potenze o estrazione delle radici de' Polinomii.

649. Sull' analisi delle parti di cui le diverse potenze de' polinomii risultano tutta riposa la loro risoluzione, ossia l' estrazione delle radici, di cui passiamo ora a tracciare le regole, avvertendo che come senza far ricorso agli sviluppi in serie le divisioni non possono eseguirsi che in quc' polinomii che sono realmente il prodotto d' una moltiplicazione in cui il divisore esiste come fattore, così le radici non possono trarsi che da que' polinomii che son realmente il risultato d' una elevazione a potenza.

Estrazione delle radici quadrate dei Polinomii algebrici

650. Poichè qualunque monomio alzato a quadrato, o ad altra qualsiasi potenza, non produce che un monomio (596), e qualunque binomio elevato a quadrato produce necessariamente un trinomio (617) è chiaro che un binomio non può esser prodotto nè da una radice monomia la quale dà un termine di meno, nè da una radice binomia la quale dà un termine di più. Dunque un binomio può contenere il quadrato di un mo-

nomio, può far parte del quadrato di un binomio, ma esser non può un quadrato perfetto, e non può perciò da esso trarsi la corrispondente radice. Così sebbene a sia la radice di a^2, e c di c^2, pur cadrebbe in errore chi credesse che $\sqrt{(a^2+c^2)}$ fosse $a+c$, poichè $a+c$ alzato a quadrato contiene oltre il dato binomio a^2+c^2 anche il termine $2ac$ (617).

Quindi è che i men complicati polinomii da cui può estrarsi la radice seconda sono i trinomii, e perciò da questi daremo principio.

Estrazione delle radici quadrate binomie.

651. Per estrarre dal quadrato $a^2+2ac+c^2$ la radice binomia che supponiamo di non conoscere, ragioniamo così. Il primo termine del quadrato di un binomio esser debbe il quadrato del 1.° termine della radice (617): dunque prendiamo la radice del primo termine a^2, e scriviamola a destra nel posto della radice sulla stessa linea in cui sta scritto il quadrato, come vedesi qui lateralmente. Alziamo a quadrato questo termine e sottraggasi dal dato polinomio. Il residuo sarà $2ac+c^2$. E siccome il $2ac$ primo termine del residuo è il secondo termine del dato quadrato, debbe esser perciò il doppio del 1.° termine della radice moltiplicato pel 2.°, che ancor non sappiamo cosa sia (617). Se però questo ignoto secondo termine della radice è fattore del prodotto $2ac$, di cui è dato l' altro fattore che è $2a$ doppio del 1.° termine, si otterrà tosto che si divi-

Quadrato	*Radice*
$a^2+2ac+c^2$	$a+c$
$-a^2$	*Divisore*
Residuo $2ac+c^2$	$2a+c$
$-2ac-c^2$	c
0 0	

da il $2ac$ per $2a$, poichè serve appunto la divisione per trovare il fattore ignoto d'un prodotto di cui è dato l'altro fattore (98).

Per ottener dunque questo 2.° termine della radice prenderemo il doppio del 1.° termine a, cioè $2a$, che segneremo nel posto del divisore, e divideremo il $2ac$ per questo $2a$ sicuri che il quoto c che risulta esprime il secondo termine della radice richiesta, la quale sarà così interamente determinata. Onde verificar poi se la ottenuta radice è esatta, dopo di aver scritto in 1.° *luogo* il termine c accanto ad a nel posto delle radici, si scrive in 2.° *luogo* a destra del divisore $2a$, e in 3.° *luogo* al di sotto del divisore per facilitare all'occhio la esecuzione della moltiplicazione, di $2ac+c$ per c. Il prodotto che ne risulta, e che esprime, come è chiaro le ultime due parti del quadrato del binomio $a+c$ (617), per sottrarlo si scrive coi segni opposti al di sotto di $2ac+c^2$ residuo ottenuto per la sottrazione del quadrato del 1.° termine dalla radice binomia dal di lei quadrato totale: e poichè fatta la riduzione si ha zero di resto, si conchiude che nulla rimanendo del dato polinomio $a^2+2ac+c^2$ dopo di avervi sottratte tutte le parti del quadrato di $a+c$, esso è il perfetto quadrato di $a+c$, e quindi $a+c$ è la sua esatta radice.

Estrarre ora si voglia p. e. la radice quadrata dal polinomio $4r^6+9c^2-12cr^3$. Ordinato il polinomio come vedesi quì a lato per rapporto alla lettera r, si estrae la radice dal 1.° termine, e il risultato $2r^3$ (§ 606) si segna nel posto delle radici,

Quadrato	*Radice*
$4r^6-12cr^3+9c^2$	$2r^3-3c$
$-4r^6$	*Divisore*
$-12cr^3+9c^2$	$4r^3-3c$
$+12cr^3-9c^2$	$-3c$
$0 \quad 0$	

e quindi proseguendo ad operare col dato metodo (651), si ottiene per radice $2r^3-3c$. Si noti però che se il trinomio si fosse ordinato per la lettera c, si sarebbe ottenuto per radice $3c-2r^3$, quantità eguale ma opposta alla radice ora ottenuta, perchè esprimente la differenza fra i due medesimi termini presi coi segni contrarii: ed infatti se applicando alle lettere valori numerici, la differenza fra i due termini costituenti la radice ossia la radice stessa è un numero positivo nel 1.° caso, nel 2.° caso è certamente lo stesso numero ma negativo, il che è in accordo colla proprietà che hanno i quadrati, e tutte le potenze pari di poter esser prodotte da radici tanto positive, che negative (603), ed è pur in accordo colla proprietà che hanno i quadrati de' polinomii, di non produrre la menoma alterazione nella loro radice per qualunque lettera sieno ordinati (645), poichè se l' attuale esempio sembra mostrarci che la radice ottenuta ordinando il polinomio per r è opposta a quella che si ottiene ordinandolo per c, si rifletta che questa apparente anomalia deriva dall' uso introdotto per brevità di non anteporre come a rigore si dovrebbe (603) il doppio segno a tutte le radici delle potenza pari positive, mentre se ciò si facesse si vedrebbe, che a rigore nel 1.° caso la radice sarebbe $\pm 2r^3 \mp 3c$; e nel 2.° $\pm 3c \mp 2r^3$, avrebbe cioè in ambedue i casi lo stesso doppio valore.

653. Se il trinomio da cui vuò ora estrarsi la radice è frazionario, è chiaro (597) che conviene separatamente estrarla dal numeratore, e denominatore. Così

$$\sqrt{\frac{g^2-4gh+4h^2}{4g^2-4gh+h^2}}=\frac{\sqrt{(g^2-4gh+4h^2)}}{\sqrt{(4g^2-4gh+h^2)}}=\frac{g-2h}{2g-h}$$

$$\sqrt{\frac{a^2c^2+a^2c+a^2/4}{a^2/9+am/3+m^2/4}}=\frac{\sqrt{(a^2c^2+a^2c+a^2/4)}}{\sqrt{(a^2/9+am/3+m^2/4)}}=\frac{ac+a/2}{a/3+m/2}$$

E util cosa sarà che gli allievi traggan per esercizio le radici seconde binomie dagli esatti quadrati del §. 618.

Estrazione delle radici quadrate polinomie qualunque, sì intere che frazionarie.

654. Dall' analitico esame della costituzione del quadrato di qualunque radice polinomia, come si è concepita al §. 643 fluisce spontaneamente il metodo che pratticar si debbe per estrarre la radice quadrata da qualsiasi polinomio il più complicato.

Si abbia p. e. la quantità $2p^2c^3+c^6+4a^4-4a^2c^3+p^4-4a^2p^2$. Per estrarvi la radice quadrata ecco l'operazione

Quadrato	Radice
$4a^4-4a^2c^3-4a^2p^2+c^6+2c^3p^2+p^4$	$2a^2-c^3-p^2$
$-4a^4$	Divisore
I. Resto $-4a^2c^3-4a^2p^2+c^6+2c^3p^2+p^4$	$4a^2-c^3$
$+4a^2c^3 \quad\quad -c^6$	$-c^3$
II. Resto $-4a^2p^2 \quad\quad +2c^3p^2+p^4$	$4a^2-2c^3-p^2$
$+4a^2p^2 \quad\quad -2c^3p^2-p^4$	$-p^2$
0 0 0	

Si ordina primieramente il polinomio rispetto ad una lettera qualunque p. e. ad a ond' esser certi, che il 1.° termine sia il quadrato del 1.° termine di sua radice (638).

Si cava la radice dal 1.° termine $4a^4$ e il $2a^2$ che si ottiene (606) è per conseguenza il 1.° termine della radice cercata, che perciò segniamo al suo posto. Si

alza questo termine a quadrato, e si sottrae dalla quantità proposta.

Il $-4a^2c^3$ 1.° termine dell' ottenuto residuo è il 2.° termine del dato quadrato, e quindi è il doppio del 1.° moltiplicato pel 2.° termine della radice (639), e ci darà perciò questo 2.° termine della radice cercato dividendolo pel doppio del 1.° Per tale oggetto duplichiamo il $2a^2$ primo termine della radice, segniamo il $4a^2$ che si ottiene nel posto del divisore e per lui dividendo il $-4a^2c^3$, risulterà $-c^3$ pel 2.° termine della radice, che scrivesi nel posto della radice, accanto e sotto al divisore. Per questo $-c^3$ secondo termine della radice si moltiplica tutto il doppio del 1.° più il 2.° termine stesso, e il risultato, per sottrarlo, si scrive coi segni opposti sotto il 1.° residuo su cui abbiamo operato.

In tal guisa dal proposto polinomio sottratte si sono le 3 parti costituenti il quadrato de' primi due termini della radice, sicchè fatta la riduzione, nel II *resto* che otteniamo, debbe esservi contenuto il doppio dei primi due moltiplicato pel terzo, e il quadrato del terzo termine della radice; poichè son queste le parti che col già sottratto quadrato de' primi due termini costituiscono il completo quadrato dei primi tre termini della radice, quadrato che esiste nel quadrato d' ogni polinomio che ha più di due termini (641); dividendo perciò questo resto pel doppio dei primi 2 ottenuti termini della radice risultar dovrà il terzo termine, che cerchiamo. A tale oggetto si duplicano i primi due termini della radice $2a^2-c^3$, e si ottiene $4a^2-2c^3$, che si scrive nella colonna de' divisori, cioè a destra del II *Resto* che debbesi per esso dividere; e il quoto $-p^2$

che risulta dividendo il 1.° termine $-4a^2p^2$ del II *Resto* pel 1.° termine $4a^2$ del nuovo divisore, è il 3.° termine della radice, che si scrive, come il 2.° in 3 posti, cioè nel posto della radice a destra degli altri due termini, poi a fianco dell' attual divisore, e sotto. Quindi per questo 3.° termine $-p^2$ si moltiplica tutto il $4a^2-2c^3-p^2$, onde avere e il doppio prodotto de' primi due termini pel terzo, e il quadrato del terzo, che col segno opposto si scrivono sotto il 2.° resto; e poichè per mezzo di tal sottrazione il II *Resto* viene interamente distrutto, conchiudiamo che la quantità proposta è il quadrato di $2a^2-c^3-p^2$, poichè nulla resta di essa dopo che abbiam da lei tolte tutte le parti costituenti il quadrato del trinomio $2a^2-c^3-p^2$; e per conseguenza $2a^2-c^3-p^2$ è la cercata radice.

Che se un resto avanzasse, dovrebbe in esso esser contenuto il doppio de' primi tre termini della radice moltiplicato pel quarto termine, e il quadrato del quarto, poichè son queste le parti, che col già sottratto quadrato dei primi tre termini formano il quadrato de' primi 4 termini della radice, quadrato che debbe esistere nel quadrato di ogni polinomio che ha più di 3 termini (642), e quindi per trarre fuori il quarto termine della radice converrebbe dividere il III *Resto* pel doppio de' primi 3 termini, e quindi proseguire le medesime operazioni. *Pel doppio in somma di ciò che sino allora si è trovato in radice, convien dividere ogni resto che si va successivamente ottenendo* finchè o si giunge a zero, il che accade in tutti i casi di quadrati perfetti, o ad un residuo non suscettibile d' ulterior divisione in tutti i casi in cui i polinomii non sono quadrati perfetti, ma contengono altri termini estranei al quadrato a cui solo appartiene la estratta radice,

Se il polinomio è frazionario convien allora con questo metodo trarre la radice da ambi i termini della frazione, e l'una per l' altra dividere. Ecco alcuni esempii per esercizio.

$$\sqrt{(16a^4-40a^3p+25a^2p^2-80ap^2r+64p^2r^2+64a^2pr)}$$
$$=4a^2-5ap+8pr$$

$$\sqrt{\frac{4p^6+16p^3q^2+16q^4}{4a^2-4ac+c^2+4ag^2-2cg^2+g^4}}=\frac{2p^3+4q^2}{2a-c+g^2}$$

$$\sqrt{\left(\frac{4a^4+4a^3c^2+a^2c^4}{36}+\frac{2a^2c+ac^3}{3}+c^2\right)}$$
$$=\frac{2a^2+ac^2}{6}+c$$

Estrazione delle radici quadrate de' numeri

655. Riguardando le diverse unità collettizie di cui risultano i numeri come tanti termini d' una quantità complessa, è ben chiaro che anche i quadrati de' numeri contengono le stesse parti di cui risultano i polinomii algebrici; e son perciò soggetti alle stesse regole di estrazione: se non che si esigono alcune avvertenze a motivo che nei numeri le diverse parti di cui risultano i quadrati non sono distinte come in algebra, ma confuse e aggruppate insieme in un tutto.

Estrazione delle radici quadrate de' numeri interi.

656. *Estrazione delle radici quadrate de' numeri espressi da non più di due cifre.* Non vi sono regole per questa estrazione. Serve all' uopo la tavola del § 590, per di cui mezzo se il numero dato è nella serie de' quadrati che vi sono scritti come 64, nella

prima fila de' numeri semplici trovasi superiormente ad esso la sua radice 8; e se il numero dato come p. e. 70 non trovasi fra i quadrati che la tavola ci presenta, segno è che 70 non è un quadrato perfetto: ma poichè rilevasi che esso è contenuto fra i due prossimi quadrati 64, e 81, al primo de' quali corrisponde la radice 8, conchiudesi che 8 è la radice prossima di 70 con che veniamo ad indicare che 8 è la radice del maggior quadrato contenuto in 70.

657. *Estrazione delle radici dai numeri decadici*. Poichè non v' è cifra che moltiplicata per se stessa dia un prodotto, che termini con zeri, nè cifra fuori di 1 che per se moltiplicata dia un prodotto, che cominci con la cifra 1, ne segue che i numeri decadici non possono esser quadrati che di numeri decadiei: ma i quadrati de' numeri decadici debbono esser la cifra 1 seguita dal doppio degli zeri delle loro radici (63, 69), e perciò deggiono essere la cifra 1 seguita da un numero pari di zeri (135): dunque *i numeri decadici* aventi un numero impari di zeri non son quadrati perfetti di alcuna quantità, e tutti i numeri decadici con numero pari di zeri son quadrati perfetti, le cui radici son numeri decadici aventi la metà de' loro zeri. Così senza calcolo veggiamo tosto che $\sqrt{100}$ è 10; $\sqrt{1000}$ è 100; $\sqrt{1000000}$ è 1000; e da questa proprietà derivano importanti conseguenze, che ci aprono la strada ai processi che praticar dobbiamo per estrarre le radici quadrate da un numero qualunque.

658. E primieramente fissar possiamo i limiti tra i quali sono comprese le radici di 1, di 2, di 3, ec. cifre così ragionando.

È 100 il più picciol numero che abbia una radice di due cifre qual' è 10 (§ 657) dunque da *uno* al

cento esclusivo si hanno numeri che hanno per radice una cifra sola.

10000 è il più piccol numero che abbia una radice di 3 cifre, qual'è 100 (§ 657): dunque tra *cento* e 10*mila* esclusivo son contenuti i numeri tutti, che hanno la radice di 2 cifre.

1000000 è il più piccol numero che abbia una radice di 4 cifre, qual'è 1000 (§ 657): dunque fra 10*mila* e il *milione* esclusivo compresi son tutti i numeri che hanno la radice di 3 cifre.

100000000 è il più picciol numero che abbia una radice di 5 cifre qual'è 10000 (657): dunque fra il *milione* e il *centomilioni* esclusivo si contengono tutti i numeri che hanno la radice di 4 cifre, ec.

E per dare a questa verità stessa una espressione più semplice, diciamo « *Hanno radici d'una cifra tutti i numeri che hanno non più di 2 cifre : hanno radici di 2 cifre tutti i numeri che hanno non meno di 3, e non più di 4 cifre : hanno radici di 3 cifre i numeri tutti, che hanno non meno di 5, e non più di 6 cifre : hanno radici di 4 cifre quelli che hanno non meno di 7, e non più di 8 cifre, ec.* » sicchè coll'osservar quante sono le cifre di un numero, rileviamo quanti sieno i termini, o cifre della sua *prossima*, o *esatta* radice.

659. Trattandosi di *radici esatte* notiamo inoltre che un numero prosegue ad esser radice d'un'altro se in fin gli si aggiungano tanti zeri quanti paja se ne sono aggiunti al suo quadrato. P. e. essendo 6 la radice di 36, è 60 la radice di 3600. Infatti $\sqrt{3600} = \sqrt{(36 \times 100)}$ (§ 63) $= \sqrt{36} \times \sqrt{100}$ (§ 605) $= 10\sqrt{36}$ (§ 657) $= 10 \cdot 6 = 60$. Essendo 3 la radice di 9, è 300

la radice di 90000, poichè $\sqrt{90000}=\sqrt{9}\times\sqrt{10000}$ $=3\times100=300$.

660. Trattandosi di *radici prossime* avvertiamo che *tante sono le unità costituenti la radice del maggior quadrato contenuto in un numero, e tante sono le decine della radice del maggior quadrato contenuto nel numero stesso reso centuplo*. Come p. e. son 5 le unità costituenti la radice del maggior quadrato contenuto in 35, così 5 e non più son le decine della radice del maggior quadrato contenuto in 3500. Infatti essendo $35>5^2=25$, ed essendo pure $35<(5+1)^2=6^2$ $=36$, ne segue ancora che

$35.100>5^2.100$, e $\sqrt{35\cdot100}>\sqrt{5^2\cdot100}>5\cdot10$ (605,657)
$35\cdot100<6^2.100$, e $\sqrt{35\cdot100}<\sqrt{6^2.100}<6\cdot10$,

dal che rilevasi che la radice di 35·100, ossia di 3500 essendo maggior di 50, e minore di 60, dee esser espressa dal 50 più un qualche numero di unità non maggiore di 9, sicchè verificasi che tante son le decine della radice del maggior quadrato contenuto in 3500, quante eran le unità costituenti la radice del maggior quadrato contenuto in 35. Collo stesso ragionamento troviamo che come 20 son le unità, che costituiscono la radice del maggior quadrato contenuto in 500, così 20 egualmente son le decine della radice del maggior quadrato contenuto in 50000: e lettere sostituendo ai numeri è ben facile generalizzare la data dimostrazione.

661. Finalmente prima d'accingerci all'estrazione della radice quadrata da un numero qualsivoglia; essendo le diverse parti di cui risulta un quadrato numerico tutte insieme confuse in un numero solo a differenza di quelle, che costituiscono i quadrati polinomii algebrici, procuriamo di scuoprire almeno i confini entro cui sono accolte; e a tale oggetto applichiamo per

maggior chiarezza ad un caso particolare le nostre osservazioni, e p. e. al 3370896, che è il quadrato di 1836, radice che risguardata come risultante di tanti termini quante son le sue cifre, dir possiamo esser un quadrinomio composto di 1000+800+30+6. E notiamo prima d'ogni altro che essendo 7 le cifre costituenti il 3370896, deggiono esser 4 le cifre costituenti la sua radice (658). Poi riflettendo che il quadrato d'un polinomio contiene il quadrato del 1.° non solo, ma de' primi 2, de' primi 3, ec. termini (643), passiamo a notare che mentre il quadrato di tutti i 4 termini costituenti la radice cioè di 1000+800+30+6, ossia di 1836 è contenuto in tutto il 3370896, separate con una virgola l'ultime 2 cifre a destra, solo nel rimanente 33708 centinaja ossia in 3370800 è tutto contenuto il quadrato de' primi 3 termini 1000+800+30, ossia di 1830; poichè avendo la somma dei 3 termini necessariamente uno zero alla fine per la mancanza del quarto, il di lei quadrato ne debbe aver due (69); e perciò non esiste con parte di se nel valore espresso dalle ultime due cifre a destra 96, che abbiam perciò segregate.

Se con una seconda virgola da destra procedendo verso sinistra togliamo nel dato numero altre due cifre sicchè restino staccate le 4 ultime, nel rimanente 337 *decine di migliaja*, ossia in 3370000 tutto è compreso il quadrato dei primi due termini della radice, cioè di 1000+800, poichè la somma de' primi due termini della radice cioè 1800 avendo per la mancanza degli ultimi due termini, o cifre necessariamente due zeri alla fine, ne ha 4 il di lei quadrato (69), e perciò esso non ha parte alcuna di se nel valore delle ultime 4 cifre 0896, che abbiam perciò staccate dal resto.

Se con una terza virgola proseguiamo a tagliare nel proposto numero altre 2 cifre, sicchè ne restino a destra separate le ultime 6, nell' ultima cifra rimasta 3 *milioni*, ossia in 3000000 sta tutto intero il quadrato del 1.° termine 1000, poichè avendo il 1.° termine della radice necessariamente 3 zeri per la mancanza delle ultime 3 cifre, il suo quadrato ne ha 6, e perciò con alcuna parte di se non esiste nel valore delle ultime sei cifre 370896, che abbiamo separate, sicchè veggiamo che dividendo il numero dato in *membri o periodi* di 2 cifre l' uno cominciando da destra a sinistra, nel 1.° membro a sinistra (che a differenza degli altri esser può ancora d' una cifra sola, come appunto nel nostro caso) è contenuto il quadrato del 1.° termine, nei primi 2 membri il quadrato dei primi due, nei primi 3 membri il quadrato de' primi 3 termini ec., sicchè la divisione in membri supplisce in parte alla real distinzione de' termini, che abbiamo in Algebra, e quanti i membri sono nel proposto quadrato, altrettanti sono i termini della radice.

662. E quì notiamo che se nel 1.° membro dell' intero quadrato tutto è contenuto il quadrato del primo termine della radice, non tutto il 1.° membro è costituito da lui. Infatti nel 1.° membro 3 *milioni* oltre 1 *milione*, che è il quadrato di 1000 primo termine della radice, vi son due altri milioni appartenenti alle altre parti del quadrato totale, ed è perciò che il 1.° membro non è un quadrato perfetto. Ma è però da avvertirsi puranche che per quanto sia grande nella radice la quantità che segue il suo primo termine, e che nel nostro caso è 836, pure in grazia della subordinazione decadica delle cifre, essendo sempre più piccola

d' una sola unità del posto che la precede, cioè di 1000 (391), ne segue, che quand' anche nel 1.° periodo 3 milioni il quadrato del 1.° termine 1000 fosse impinguato dalla massima parte del resto che con esso costituisce il completo quadrato di tutti i 4 termini, di cui pur una porzione è espressa dalle altre cifre significative della radice, ciò null' ostante non potrebbe con tutto questo aumento divenire un numero sì forte da potere contenere il quadrato della 1.ª cifra della radice aumentata di un' unità dello stesso suo ordine, cioè d' una unità di migliajo nel nostro esempio, poichè converrebbe ammetter l' assurdo che nel solo 1.° periodo del quadrato di 1836 contenuto fosse il quadrato di 2000, il quadrato cioè di ciò che diventa la 1ª cifra 1 (migliaja) accresciuta d' una unità del suo ordine, converrebbe ammetter cioè che in una parte fosse contenuta una quantità maggior del suo tutto. Se dunque è assurdo che il quadrato della prima cifra di un numero giunga a tale per l' aumento anche di tutto il resto, se fosse possibile, del quadrato del numero totale da divenir quadrato della stessa prima cifra accresciuta d' un' unità, egli è certo che la prima cifra della radice del maggior quadrato contenuto nel 1.° membro, il qual non risulta che del quadrato del primo termine più una sola frazione delle altre parti del quadrato totale, è pur anche la stessa 1ª cifra della richiesta radice.

663. Ripetiamo lo stesso ragionamento sulla somma de' due primi membri che nel nostro caso è 337 *decine di migliaja* in cui è contenuto il quadrato de' primi 2 termini della radice (661), cioè di 18 *centinaja*, poichè sebbene nella somma de' 2 primi membri, cioè

in 337 decine di migliaja vi sia il quadrato de' due primi termini, o cifre, cioè di 18 centinaja non già isolato ma in combinazione di altre parti del total quadrato di 1836, pur l' aumento che per esse riceve non può render sì forte la somma 337 da poter contenere il quadrato delle prime 2 cifre aumentate di un' unità dello stesso ordine dell' ultima di esse, non può cioè contenere il quadrato di 19 in vece di 18 centinaja, giacchè 19 centinaja ossia 1900 è un quadrato maggiore del dato 1836. Dunque i primi due termini della radice del maggior quadrato contenuto nella somma de' due primi periodi 337 *decine di migliaja* ossia di 3370000 sono i veri primi termini della cercata radice di 3370896.

E similmente ragionisi per la somma dei primi 3 membri, ec.

664. Corredati di tali notizie circa la costituzione de' quadrati numerici, dopo di avere come quì a lato diviso in periodi il dato numero 3370896 a norma del § 661, cominciamo l' estrazione col prender di mira il solo primo periodo costituito dal 3 come se solo esistesse.

```
.
3,37,08,96 | 1
2
```

La radice prossima di 3 è 1 (§ 656); e 1 si segni nel posto della radice. Si alzi a quadrato, e il risultato 1 sottraggasi dal 1.° membro 3, e si avrà 2 di residuo, sicchè nella supposizione che il solo 3 sia la quantità da cui dee estrarsi la radice, dir dobbiamo che 1 è la radice prossima di 3 con 2 di resto.

665. A fianco del resto 2 abbassiamo ora il 2.° membro 37, ed ecco che dal proposito di estrarre la radice dal solo 3 (1.° membro) passiamo ora nello specchio posto quì a lato all' altro di e-

```
. . .
3,37,08,96 | 18
23.7       | 28
13         |  8
```

strarre la radice dal 337, ossia dai primi soli 2 membri, che perciò aver deggiono una radice di 2 cifre (661).

Per estrarre la radice dalla somma di questi 2 membri rammentiamo che il quadrato del 1.° termine che debbe terminar con due zeri esiste tutto nel 1.° periodo 3 *centinaja* (661), e che sebbene questo 1.° periodo 3 del 337 contenga altra quantità oltre il quadrato, pure il 1.° termine della cercata radice è lo stesso del 1.° termine della radice del maggior quadrato contenuto in questo 1.° periodo (662). Ma il 1.° termine della radice del maggior quadrato contenuto nel 1.° periodo 300 è espresso dalla stessa cifra 1, che esprime le unità costituenti la radice di 3 (§. 660): dunque sebbene il 3 nella ora addottata supposizione abbia acquistato un valor centuplo, sia cioè divenuto 300, la cifra 1 già segnata per di lui radice nella prima ipotesi non dee cambiar per questo il suo valor *assoluto*, poichè è dessa che col ricevere ora una cifra dopo di se, cioè il 2.° termine, si rende decupla, e così diventa primo termine della radice di tutto il 337. E così l'aver sottratto il quadrato di 1 dal 3 allorchè ci eravamo proposti di estrarre la radice dal solo 3 ci avveggiamo (or che ci siamo prefissi l'estrazione della radice del 337) essere stato un togliere il quadrato 100 del 1.° termine della radice da tutto il 337, dopo di che ci è rimasto 237 pel doppio del 1.° termine moltiplicato nel 2.°, e pel quadrato del 2.° termine (617, 643). Ma poichè il 1.° termine 1 della radice quando essa risulta di 2 cifre non è 1 *unità semplice*, ma 1 *decina* ossia 10, così con uno zero dee pur terminare il suo doppio prodotto, sicchè l'ultima cifra 7 del 237 che per mezzo

di un punto si separa, non può far parte delle cifre significative appartenenti al doppio prodotto, il qual perciò si trova compreso nelle sole 23 decine. Se però il doppio prodotto delle decine nelle unità della radice è tutto nel 23, avvertiamo che in 23 oltre il doppio delle decine moltiplicato per le unità incognite, vi stanno accolte ancora tutte quelle decine, che nascono dall'alzare a quadrato le unità; sicchè come certi saremmo di ottenere il vero numero delle unità che si cercano col dividere il 23 pel doppio delle decine, se il 23 contenesse soltanto il doppio delle decine moltiplicato per le unità, questa certezza ci manca, potendo il quoto riescire un numero maggiore delle unità della radice, come appunto accade nel nostro caso. Questa divisione del 23 pel 2 doppio delle decine va dunque riguardata non come un mezzo sicuro che ci rechi direttamente al suo fine, ma come tale che col recarci ad un risultato, che se non è il vero termine che ricerchiamo, gli è però assai prossimo, ci pone in grado di ottenerlo dopo pochissimi tentativi. Dividendo infatti le 23 decine per le 2 decine doppio del 1.° termine della radice si ha 11 per quoto: ma noi certi d'altronde che le unità della radice non possono eccedere 9 (662) proviamo se è 9 il lor numero; e per tale oggetto seguiamo il 9 a fianco del 1.° termine della radice, accanto al divisore, e sotto, e quindi moltiplichiamo il 29 per 9 onde ottenere insieme e 81 quadrato delle unità e 180 doppio delle decine moltiplicato per le unità; e poichè il prodotto 261 è maggiore del residuo 237, in cui le altre 2 parti del quadrato deggiono esser contenute, conchiudiamo che il 9 è troppo grande, e perciò depennato il 9 poniamo a prova l' 8

segnandolo ne' tre posti in cui trovavasi il 9, e moltiplichiamo perciò il 28 per 8; e poichè il prodotto 224 è contenuto in 237 da cui mentalmente sottraendolo si ha 13 di resto, conchiudiamo che 8 è il vero 2.° termine esprimente le unità della radice, e che quindi 18 è la radice del maggior quadrato contenuto in 337 con 13 di resto; poichè dall' operato risulta, che in 337 son contenute le parti tutte costituenti il quadrato di 18, e non già quelle che costituiscono il quadrato di 19.

666. Accanto al residuo 13 abbassiamo ora il 3.° membro 08, e così colle operazioni che abbiamo fin quì eseguite ci troviamo già innoltrati nella estrazione a cui ora passiamo nello specchio posto quì a lato della radice del numero 33708, cioè de' primi tre membri della proposta quantità.

```
. . . . .
3,37,08,96 | 183
           |----
23.7       | 28
           |  8
130.8      | 363
           |   3
219        |
```

Infatti quantunque il 337, di cui ci eravamo occupati non sia più ora 337 unità, ma 33700, pure la sua radice 18 segnata al posto della radice non debbe alterarsi per rapporto al suo *assoluto* valore, poichè colla modificazione che va naturalmente a subire acquistando ora alla sua destra una cifra (quella cioè che dovrà esprimere il terzo termine della radice dovendo questa essere di 3 termini ora che 3 sono i membri del suo quadrato (661)) acquista il valore di 180, va cioè a costituire le prime 2 cifre esprimenti le decine della radice del maggior quadrato che esista in 33700 (660), che sono le stesse della radice cercata del maggiore quadrato contenuto in 33708 (§ 663); sicchè l'aver già sottratto da 337 il maggior quadrato che vi è contenu-

to cioè il quadrato di 18, pel nostro caso attuale è stato un aver tolto il quadrato di 18 decine, cioè il quadrato de' primi 2 termini della radice trinomia esistente in 33708, e si è ottenuto di residuo 1308, che dee contenere il doppio de' primi 2 termini pel terzo, più il quadrato del terzo, che sono gli altri 2 termini, che compiono il quadrato d'una radice trinomia (641).

Ma anche il doppio de' primi due termini moltiplicato pel terzo dee avere uno zero alla fine, poichè i primi 2 termini sono non più 18, ma 180: dunque la prima cifra 8 del 2.º resto 1308 non può far parte delle cifre significative del doppio prodotto, e perciò anch'essa per mezzo di un punto si separa onde escluderla nella divisione. Si prende ora il doppio della radice 18, e per questo doppio 36 che si scrive per 2.º divisore accanto al 1308, si divide il 130, e il quoto 3 che si ottiene si scrive nei 3 soliti posti: si moltiplica quindi tutto il 363 per 3, e poichè mentalmente sottraendo il prodotto 1089 dal 1308 si ha per residuo 219, conchiudiamo che 183 è la radice del maggior quadrato contenuto in 33708, e v' è 219 di resto.

667. Finalmente abbassando accanto al residuo 219 l'ultimo membro 96, colle fin qui eseguite operazioni ci troviamo inoltrati nella estrazione della radice di tutto il numero 3370896, poichè ripetendo lo stesso ragionamento come sopra, ci accorgiamo che dopo aver già sottratto da tutto il numero il quadrato de' primi 3 termini della sua radice quadrinomia, che era contenuto in 33708 centinaja (661), si è ottenuto di residuo 21996, che dee risultare del doppio de' primi 3 termini moltiplicato pel quarto più il quadrato del quarto termine (642). Separata perciò con un punto l'ultima

cifra 6, si prenda, come qui a lato si osserva, il doppio dei primi 3 termini noti della radice, cioè di 183 e per questo doppio 366 scritto per 3.° divisore a fianco del 21996 si divide il 2199, e il quoto 6, che si ottiene si scrive ne' tre soliti posti: si moltiplica quindi per 6 tutto il 3666; e poichè il prodotto mentalmente sottratto dal 21996 dà zero di resto, conchiudiamo che 1836 è la radice esatta di 3370896, poichè nulla rimane di questo numero dopo che da lui si son tolte tutte le parti che costituiscono il quadrato di 1836.

```
 . . . . . . .
3,37,08,96 | 1836
           |------
 23.7      | 28
           |  8
  130.8    | 363
           |   3
   2199.6  | 3666
    00000  |    6
```

Con simile procedimento l' operazione potrebbe spingersi quant' oltre piacesse uno alla volta abbassando accanto al residuo i membri successivi, poichè abbiam già rilevato che la radice completa di un numero passa ad esser sempre la radice del quadrato della somma di tutti i termini, meno l' ultimo, di un' altro numero che non sia che il 1.° accresciuto di un membro.

668. Il numero preso ora ad esempio era un quadrato perfetto: ma raro è che un numero preso a caso sia tale; e quando non lo è, invece di aver zero per residuo finale, si ottiene un numero che esprime l' eccesso del numero dato sul maggior quadrato che esso contiene e a cui appartiene la trovata radice. Eccone qui a lato un esempio. Nell'estrazione della radice del proposto numero osserviamo che zero è il residuo che si ottiene dalla sottrazione di 81

```
81,36,40,08,03 | 90201
               |--------
003.64.0       | 1802
               |    2
      360.80.3 | 180401
               |      1
        180402 |
```

(quadrato del 1.° termine 9) dal 1.° membro, e quindi abbassato accanto a questo resto zero il 2.° membro 36, e separata la cifra 6, resta 3 a dovcrsi dividere pel doppio della radice ossia per 18 ; e poichè si ha zero per quoto intero di tal divisione , zero si segna alla radice , e quindi si abbassa a fianco del 36 il seguente membro 40, e dopo di aver separata con un punto l' ultima cifra 0 , si divide il 364 pel doppio della radice 90, e colle solite regole si prosegue ferma l' avvertenza di segnar sempre alla radice o una cifra significativa , o zero per ogni membro che si abbassi , sicchè di tante cifre la radice risulti, quanti sono i membri del numero dato (661) , finchè si giunge al finale residuo 180402 , il quale costituisce l' cccesso del dato numero sovra il maggior quadrato di 90201, che è in lui contenuto .

669. Ma questo residuo è assai forte ; e se per esser tale si dubitasse che per errore di calcolo segnata si fosse una radice più piccola, ed un resto più grande del vero, ad eliminar tale sospetto facile è il criterio che l' algebra ci offre coll' avvertirci che *non è mai eccedente un resto* se non supera il doppio della radice . Ed infatti perchè il dato numero contener potesse il quadrato che ha per radice una sola unità di più di 90201 , converrebbe che nel residuo finale , che è 180402 (che esprime ciò che resta del numero dopo avervi tolto il quadrato di 90201) contenuto fosse il doppio della radice più 1 (§. 619) : ma 180402 non è che il doppio di 90201 : dunque nel nostro caso manca a 8136400803 un unità perchè contener possa un quadrato che abbia per radice un numero maggiore di un' unità del 90201 ;

dunque il quadrato di 90201 contenutovi è il massimo: dunque 90201 è la radice prossima di 8136400803.

670. In seguito di tutte le indicate avvertenze ecco il prattico processo, che dee tenersi nell' estrazione di qualunque radice quadrata numerica. *Si divide il numero in membri da 2 cifre l'uno da destra cominciando verso sinistra: indi si estrae la radice del 1.° membro, e si segna nel posto delle radici, e il suo quadrato si sottrae dal 1°. membro.*

A destra del resto si abbassa il 2.° membro, e separata con un punto l' ultima cifra, tutto il numero a sinistra del punto si divide pel doppio della trovata radice scritto come divisore al suo destro lato: il quoto si scrive accanto alla trovata radice, accanto al divisore, e sotto, e tutto il divisore più la cifra segnatagli a fianco si moltiplica per lo stesso quoto, e si sottrae mentalmente il prodotto dal 1.° resto seguito dal 2.° membro.

Accanto al resto che si ottiene si segna il 3.° membro, e la stessa serie di operazioni continuasi abbassando a destra de' successivi residui un membro alla volta sino all' ultimo sul quale operando o non si ottiene residuo, e il proposto numero è allora un quadrato perfetto, o si ha un residuo, ed allora il proposto numero non è un perfetto quadrato: e l' ottenuta radice appartiene al maggior quadrato, che vi è contenuto.

Estrazione delle radici quadrate dei numeri frazionarii

671, Se le quantità da cui debbe estrarsi la radice 2.ª son frazionarie, null' altra avvertenza occorre che

quella di estrarre separatamente la radice esatta o prossima dal numeratore, e denominatore (597, 607).

Così *esattamente*, perchè ambi i termini della frazione son quadrati perfetti, abbiamo

$$\sqrt{\frac{64}{81}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{81}} = \frac{8}{9} \text{; e } \sqrt{\frac{100}{121}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{121}} = \frac{10}{11}$$

Così *prossimamente*, perchè un sol termine della frazione è quadrato perfetto, abbiamo

$$\sqrt{\frac{26}{324}} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{324}} = \frac{5}{18} \text{; e } \sqrt{\frac{784}{845}} = \frac{\sqrt{784}}{\sqrt{845}} = \frac{28}{29}$$

Così *prossimamente*, perchè niun de' termini della frazione è quadrato perfetto, abbiamo

$$\sqrt{\frac{17}{27}} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{27}} = \frac{4}{5} \text{; e } \sqrt{\frac{1371}{1602}} = \frac{\sqrt{1371}}{\sqrt{1602}} = \frac{37}{40}$$

Così per rapporto anche alle frazioni decimali notiamo che si ha *esattamente* perchè ambi i termini della farzione son quadrati perfetti.

$\sqrt{0{,}01} = \sqrt{1/100} = 1/10 = 0{,}1$

$\sqrt{0{,}0001} = \sqrt{1/10000} = 1/100 = 0{,}01$

$\sqrt{420{,}25} = \sqrt{42025/100} = 205/10 = 20{,}5$;

e perchè è quadrato perfetto un sol termine della frazione si ha *prossimamente*

$\sqrt{0{,}0226} = \sqrt{226/10000} = 15/100 = 0{,}15$

$\sqrt{230{,}4} = \sqrt{2304/10} = 48/3$

$\sqrt{54{,}756} = \sqrt{54756/1000} = 234/31$

e perchè niun de' termini della frazione è quadrato perfetto si ha *prossimamente*

$\sqrt{0{,}2999825} = \sqrt{2999825/10000000} = 1732/3162$

672. Nelle frazioni decimali è poi cosa essenziale a notarsi, che quando esse hanno un numero pari di cifre dopo la virgola risulta una frazion decimale an-

che la loro radice: non così se il numero delle cifre dopo la virgola è dispari; poichè quando è pari il numero delle cifre dopo la virgola, pari è anche il numero de'zeri che ha il denominatore decadico della data frazion decimale (389), ed è perciò un quadrato perfetto, la cui radice è un numero decadico anch'essa avente la metà meno dei di lui zeri (657), sicchè si ha il vantaggio di non far ricorso al calcolo per ottenerla; e se la radice che si trae dal denominatore è un numero decadico, siccome essa costituisce il denominatore della frazionaria radice; è ben chiaro che la radice è una frazion decimale (381). Al contrario quando è dispari il numero delle cifre dopo la virgola, dispari è il numero de' zeri del denominatore decadico (389), quindi non è un quadrato perfetto, nè decadica è la sua radice (657); e perchè essa costitnisce il denominatore della radice frazionaria, la frazion radice non è decimale (381).

Siccome però interessa che le radici delle frazioni decimali sien frazioni decimali anch' esse, così questo intento si ottiene col render pari in quelle frazioni, che non l' hanno, il numero delle cifre dopo la virgola per mezzo dell' aggiunta d' uno zero, che il lor valore non altera (390).

Così p. e. dovendosi estrarre la radice dalla frazion decimale 51,9; se noi operiamo sulla frazione qual ci viene offerta, si ottiene allora $\sqrt{51,9} = \sqrt{519/10} = 22/3$ radice che non è decimale: ma se vi aggiungiam prima uno zero, abbiam $\sqrt{51,90} = \sqrt{5190/100} = 72/10 = 7,2$.

673. E da tutte queste osservazioni si trae la regola prattica, che *per estrarre la radice da una frazione decimale qualunque*, *sia vera sia spuria*, *reso*

pari con uno zero se non lo è il numero delle sue cifre dopo la virgola, si estrae la radice dal suo numeratore riguardandolo come numero intero, e si taglian tante cifre a destra quanta è la metà del numero delle cifre dopo la virgola contenute nella proposta frazione; poichè con questo taglio a tenore della scrittura decimale ad indicar veniamo il denominatore della radice.

Estrazione della radice quadrata dai numeri interi per approssimazione.

674. Un utilissima applicazione delle teorie relative alle radici decimali si ha ne l'estrazione delle radici de' numeri per approssimazione.

Non essendo p. e. 12 un quadrato perfetto prodotto da numeri interi poichè contenuto fra 9 radice di 3, e 16 radice di 4, noi diciamo che radice prossima di 12 è 3, e con ciò veniamo ad escludere dalla nostra ricerca il residuo finale, veniamo cioè a riferire la radice non al 12, ma solo al 9, a quella parte cioè del numero 12 che è il maggior quadrato in lui contenuto (666). Se però non di 9, ma realmente di 12 noi cerchiamo la radice, veggendo che 3 produce un quadrato minore, e 4 produce un quadrato maggiore di 12, conchiudiamo che la quantità che per se moltiplicata dà 12, sta fra il 3 ed il 4, e a questa radice avvicinarci quanto più ci piaccia possiamo, ottenendo risultati misti di interi e frazioni col semplice seguente artificio.

Se 4 è maggiore della vera radice di 12, il 3 non vi differisce di 1; ma se vogliamo che tal differenza sia anche minore p. e. di $^1/_8$, riduciamo 12 a frazione che abbia per denominatore il quadrato di 8, ossia 64; ed

avremo $12 = {}^{768}/_{64}$ (§ 279), e quindi $\sqrt{12} = \sqrt{{}^{768}/_{64}}$ $= {}^{27}/_{8}$ (§ 671) $= 3 + {}^{3}/_{8}$. Or se prossimamente la radice di 12 è ${}^{27}/_{8}$, noi abbiamo certezza, che questa radice non differisce dalla vera nemmeno di ${}^{1}/_{8}$ perchè se la vera radice di 12 potesse superar di ${}^{1}/_{8}$ il ${}^{27}/_{8}$, converrebbe cioè che 28, e non 27 fosse la radice di 768, il che non può essere, poichè se 27 è la radice del maggior quadrato contenuto in 768, con ciò stesso diciamo che non vi è contenuto il quadrato che ha per radice 28. Ed intanto l' ottenuta radice ${}^{27}/_{8}$ ossia $3 + {}^{3}/_{8}$ veggiamo che è minore della radice di 12, ma però più gli si accosta di quello che non gli sia prossimo il semplice 3. Infatti ${}^{27}/_{8} \times {}^{27}/_{8} = 11 + {}^{25}/_{64}$ molto più prossimo a 12 di quello che non è $3 \times 3 = 9$.

Se vogliamo una quantità che dalla vera radice di 12 non differisca nemmeno di ${}^{1}/_{10}$, riduciamo il 12 a frazione che abbia per denominatore il quadrato di 10 cioè 100, ed avremo allora $\sqrt{12} = \sqrt{{}^{1200}/_{100}} =$ ${}^{34}/_{10} = 3,4$; e siccome questa radice non potrebbe essere 3,5 pelle sovra indicate ragioni, è chiaro che la radice trovata 3,4 non differisce dal giusto di ${}^{1}/_{10}$; ed infatti. $3,4 \times 3,4 = 11,56$ quantità che è di ${}^{271}/_{1600}$ più prossima al 12 che non è $11 + {}^{25}/_{64}$ prodotto dall' antecedente radice $3 + {}^{3}/_{8}$.

E poichè le moltiplicazioni, e divisioni per numeri decadici si ottengono senza processo di calcolo, ognun vede essere assai più utile per avvicinarci al giusto valore delle radici de' numeri che non sono quadrati perfetti il convertirli in frazioni decimali piuttosto che in ordinarie, e così di fatto si pratica. Perciò se vogliamo ottenere un risultato che sia più vicino all' esatto valore della radice di 12 di quello che non è 3,4 che non vi differisce per ${}^{1}/_{10}$, troviamo un valore che non vi

differisca per $^{1}/_{100}$ riducendo il 12 a frazione, che abbia per denominatore il quadrato di 100 ossia 10000, con che abbiamo $\sqrt{12} = \sqrt{12,0000} = 3,46$. (673); che non differisce dal vero di $^{1}/_{100}$ perchè 3,47 sarebbe troppo grande; ed infatti $3,46 \times 3,46 = 11,9716$ quantità, che dal 12 che dovrebbe produrre differisce assai meno di quello vi differiva $3,4 \times 3,4 = 11,56$.

Se vogliamo che la radice di 12 dal vero non differisca nemmen di un millesimo riduciamo il 12 a frazione avente per denominatore il quadrato di mille, ossia il millione, ed avremo $\sqrt{12} = \sqrt{12,000000} = 3,464$ (673); ed infatti abbiamo $3,464 \times 3,464 = 11,999296$ che differisce assai meno dal 12 di quello che vi differisca $3,46 \times 3,46 = 11,9716$.

E in general conchiudiamo che *per estrarre per approssimazione la radice dai numeri interi, loro si aggiungono tanti paja di zeri quante sono le cifre decimali che vogliamo nella radice, e quindi nella radice ottenuta col metodo* (670) *si tagliano tante cifre a destra quante sono le paja de' zeri aggiunti* (673).

Così se per esercizio di calcolo trovar vogliamo la radice di 2. e di 3 espressa con 7 cifre decimali, onde assicurarci che dal giusto non differisca di un decimilionesimo senza materialmente segnare 7 paja, ossia 14 zeri a destra del 2, e del 3, si uniscono due alla volta ai successivi residui, che si vanno ottenendo durante il processo, e si ottiene per risultato

$$\sqrt{2} = 1,4142136, \text{ e } \sqrt{3} = 17320508$$

i quali valori non giungono a differire dal vero di un mezzo decimilionesimo il 1.° in più ed il 2.° in meno

Estrazione delle radici quadrate dai numeri rotti per approssimazione

675. Se trattasi di frazioni decimali conviene tanti zeri aggiugnere quanti ne occorrono perchè il numero delle cifre dopo la virgola sia doppio del numero delle cifre decimali, che vogliamo nella radice. Così volendo la radice prossima in centesimi della quantità decimale 4,3 troviamo

$$\sqrt{4,3} = \sqrt{4,3000} = 2,07 \text{ (§ 673)}.$$

Se trattasi di frazioni ordinarie i cui termini non son quadrati perfetti, come è p. e. $^3/_5$. si può estrarre la radice per approssimazione con tre diversi metodi

I. *Si trae per approssimazione la radice sì dal numeratore che dal denominatore e quindi si divide realmente la 1ª per la 2ª.*

$$\text{Così } \sqrt{^3/_5} = \frac{1,732}{2,236} = \frac{1732}{2236} = 0,774 \text{ (§ 411)}$$

II. *Si può risparmiare un' estrazione di radice riducendo un de' due termini della frazione a quadrato col moltiplicarli ambedue per quello de' termini, che può rendersi quadrato.*

$$\text{Così } \sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{3.3}{5.3}} = \sqrt{\frac{9}{15}} = \frac{3}{3,8729} =$$

$$\frac{30000}{38729} \text{ (§ 405)} = 0,774 \text{ (§ 411)}.$$

$$\text{Così } \sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{3.5}{5.5}} = \sqrt{\frac{15}{25}} = \frac{3,8729}{5} =$$

$$\frac{38729}{50000} \text{ (§ 405)} = 0,774 \text{ (§ 411)}.$$

III. *Si può anche convertire prima in decimale la frazione ordinaria, e quindi estrarvi la radice.* Così $\sqrt{3/5} = \sqrt{0,6}$ (411) $= 0,774$ (673).

Estrazione delle radici cubiche dai polinomii algebrici.

676. L'esame delle parti da cui è costituito il cubo d'un binomio, e quindi di un polinomio qualunque (623: 647) ci suggerisce il metodo, che convien praticare per l'estrazione delle radici cubiche di qualsivoglia numero di termini, e che poniamo in esecuzione nel seguente esempio

	Cubo	*Radice*
	$27a^3 - 54a^2c^2 + 36ac^4 - 8c^6$	$3a - 2c^2$
	$-27a^3$	*Divisore*
I. Resto	$-54a^2c^2 + 36ac^4 - 8c^6$	$27a^2$
	$+54a^2c^2 - 36ac^4 + 8c^6$	
II. Resto	0 0 0	

Ordinato il polinomio se non lo era, si estrae la radice cubica dal 1.° termine (606), che si scrive nel posto della radice. Si forma il cubo di questo primo termine della radice e si sottrae dal proposto polinomio, e quindi riflettendo che nel 1.° termin del resto che si ottiene dee contenersi il triplo quadrato del 1.° termine moltiplicato pel 2.° (647), onde ottenere il 2.° termine della radice, dividesi tosto il 1.° termine del residuo, cioè $-54a^2c^2$ pel triplo quadrato del 1.° termine della radice, cioè per $27a^2$, che segnasi nel posto del divisore, e il quoto $-2c^2$ si scrive alla radice.

Dal 1.° resto del polinomio che contener debbe il triplo quadrato del 1.° termin nel 2.°. il triplo del 1.° nel quadrato del 2.°, e il cubo del 2.° termine (623),

si sottraggono queste parti; e poichè si ha zero di risultato, conchiudesi che il dato polinomio è cubo perfetto della segnata radice, ossia dessa è la radice cubica cercata.

Che se si abbia in vece un residuo, p. e. $+27a^2m-36ac^2m+12c^4m+9am^2-6c^2m^2+m^3$, la radice ha allora più di due termini; ed essendo già estratti i primi due, e tolto il loro cubo dal dato polinomio, conviene il resto dividere pel triplo quadrato de' primi due, onde il terzo termine risulti, che si trova essere $+m$; convien quindi dal 2.° resto sottrarre il triplo quadrato de' primi due termini pel terzo, il triplo de' primi due pel quadrato del terzo, e il cubo del terzo (647); e poichè ciò fatto nulla rimane, l' operazione è compiuta; e $3a-2c^2+m$ è la cercata radice.

Che se un resto si avesse, converrebbe proseguir nello stesso modo il processo finchè si giungesse ad un residuo o *nullo* o tale da non permettere ulterior processo di calcolo.

677. Se il polinomio è frazionario convien estrarre la radice da ambi i termini della frazione, e dividere la radice del numeratore per quella del denominatore

Così $\sqrt[3]{\dfrac{8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3}{27c^3-27c^2x+9cx^2-x^3}}=\dfrac{2x-y}{3c-x}$

Estrazione delle radici cubiche dai numeri

Estrazione delle radici cube dai numeri interi.

678. Onde fissare i limiti tra cui son comprese le radici cubiche di 1, di 2, di 3 cifre ec., notiamo che

1000 è il più piccol numero che abbia una radice di 2 cifre qual' è 10. Dunque da 1 al *mille* esclusivo sono compresi tutti i numeri che hanno per radice terza una cifra sola, la quale si ottiene per mezzo della tavola (590).

1000000 è il più picciol numero, che abbia una radice di 3 cifre qual è 100: dunque dal *mille al milione* esclusivo son contenuti i numeri tutti, che hanno la radice di 2 cifre come dal *milione al mille milioni* esclusivo tutti quelli che hanno la radice di 3 cifre, ec., e ragionando in un modo consimile a quanto si è dettagliatamente esposto per le radici quadrate (661), conchiudiamo che per estrarre la radice cubica da un dato numero convien dividerlo in membri di 3 cifre da destra procedendo verso sinistra, e quanti sono i membri altrettante sono le cifre della radice.

689. Ciò posto vogliasi la radice cuba di 74088, che diviso in membri come qui sotto

Cubo	*Radice*
74,088	42
64	*Divisore*
I. Resto 100.88	48
100 88	9600 *Triplo quadrato delle decine per le unità*
II. Resto 00000	480 *Triplo delle decine pel quadrato delle unita*
	8 *Cubo delle unità*
	1088 *Somma*

ci mostra che la sua radice è di 2 cifre.

Nel 1.° membro 74 debbe esservi il cubo del 1.° termine; e poichè il maggior cubo contenuto in

74 è 64 cubo di 4, segnasi 4 alla radice (a). Si sottrae 64 cubo di 4 dal 74, e a destra del resto 10 si abbassa il 2.° membro: si separano le due ultime cifre 88 per mezzo d'un punto, e così siam certi che in ciò che rimane a sinistra, cioè nelle sole 100 centinaja è contenuto il triplo quadrato del 1.° termine 4 decine, cioè di 40 poichè debbe esso necessariamente terminar con due zeri, siccome (69) con due zeri termina il quadrato di qualunque decina perchè prodotto di due fattori aventi ognuno uno zero in fine (b). Pel triplo qua-

(a) Infatti con una dimostrazione analoga a quella data al § 662 possiamo accertarci che il cubo della più alta cifra della radice contenuta nel primo periodo non può mai divenire (per quella parte degli altri termini che vi si trova unita) una quantità tale da potervisi estrarre una radice cuba avente un unità di più nella prima sua cifra.

(b) E qui non sarà inutile eliminare un errore comunissimo ne' principianti qual' è quello di credere che il quadrato p. c. di 4 decine siccome formato da 4 decine per 4 decine esser debba 16 decine, ossia 160, e non 1600. A guardarci da sì falsa conseguenza valga il riflesso, che l' espressione « *Il quadrato è un prodotto di due fattori eguali, o di un fattore moltiplicato per se stesso* » è giusta nel solo senso che l' *eguaglianza* o l' *identita* de' fattori si riferisca al puro loro *quantitativo*, poichè pel resto son nel quadrato come in tutte le moltiplicazioni si diversi i fattori a tenore della diversità del loro ufficio, quanto il possono essere due numeri uno indicante *oggetti* qual' è il moltiplicando, e l' altro indicante *ripetizione* qual' è il moltiplicatore; ond' è che l' indicazione di quest' ultimo non può essere nè di *decine* nè di *centinaja* ec, ma solo delle *volte* che va ripetuto il moltiplicando, e che sono precisate dalle sue unità *semplici*, e non *collettizie* (15). Con tale avvertenza intende ognuno che per ottenere il quadrato di 4 decine vanno esse ripetute non 4 volte quante esse sono, ma tante volte quante sono le 40 semplici unità contenutevi. E questa stessa avvertenza ci offre motivo di rimarcare quanto l' esattezza e l' analitico sviluppo delle idee ne' primi crudimenti influisca a guardarci dagli errori ne' successivi progressi della scienza.

drato del 1.° termine 4 decine cioè per 48 centinaja si divide il 100, e così siam certi che il quoto 2 che si ottiene è la vera radice, o un numero che la supera per poche unità, e perciò fatta a parte la somma del triplo quadrato del 1.° termine pel 2.°, del triplo del 1.° moltiplicato pel 2.° e del cubo del 2.° se questa è contenuta in 10088, cioè in quel 1.° residuo che queste parti dee contenere (623) (come nel nostro caso accade in cui si ha zero di resto) la cifra 2 si segna accanto al 4 nel posto della radice, e se la somma di queste parti superasse il 1.° resto, la cifra sarebbe troppo grande, e converrebbe esplorare un numero successivamente minore d' una unità, finchè la somma delle suindicate parti si trovasse contenuta nel 1.° resto.

Se qualche cosa avanzasse dopo la sottrazione, segno sarebbe che il dato numero non fosse cubo perfetto; e siamo certi che l' *ottenuto resto non è eccedente quando non supera il triplo* della radice cuba più il triplo del suo quadrato (625).

Se altri membri vi fossero, uno alla volta accanto al residuo si abbasserebbero, e quindi tagliate 2 cifre a destra, si dividerebbe il numero rimanente a sinistra pel triplo quadrato di tutti i termini già ottenuti della radice. L' esame della costituzione del cubo di un polinomio, come è esposta al §. 647, rende ragione di questo processo.

Estrazione delle radici cube dai numeri rotti.

680. La radice cuba d' un rotto si estrae coll' estrarla dal numeratore, e dal denominatore, e col dividere l' una per l' altra.

Così se le frazioni sono ordinarie, abbiam p. e.

$\sqrt[3]{512/729} = 8/9$; $\sqrt[3]{32768/860085351} \doteq 32/951$

$\sqrt[3]{1/143877824} = 1/524$, ec.

681. Se le frazioni son decimali, poichè è ben facile il rilevare che il cubo di 10, ossia $10^3 = 10.10.10 = 1000$ (69), il cubo di 100 ossia $100^3 = 100.100.100 = 1000000$, e in genere il cubo di qualsivoglia numero decadico è l' unità seguìta dal triplo de'suoi zeri, ne segue che cubi perfetti son tutti i numeri decadici, che hanno o 3 zeri, o un numero di zeri triplo di 3, e che la radice di questi numeri è un numero decadico anch' esso avente il terzo de' zeri del suo quadrato, sicchè $\sqrt[3]{1000000} = 100$ $\sqrt[3]{1000000000} = 1000$, ec.

e perciò $\sqrt[3]{160103007} = \sqrt[3]{160103007/1000000} = 543/100 = 5{,}43$ (§. 389); $\sqrt[3]{0{,}860085351} = \sqrt{860085351/1000000000} = 951/1000 = 0{,}951$; donde la regola che per estrarre le radici terze dalle frazioni decimali sien vere, o spurie, *reso (se mai nol fosse) eguale a 3, o a un qualche multiplo di 3 coll' aggiunta di uno o due zeri il numero delle cifre dopo la virgola, si estrae la radice dal loro numeratore, e si tagliano in esse tante cifre a destra quanto è il terzo del numero delle cifre dopo la virgola contenute nel proposto numeratore.*

Estrazione delle radici cube dagli interi, e rotti per approssimazione.

682. Se vogliamo approssimarci al giusto valore delle radici de' numeri interi che non sono cubi perfetti, sicchè la differenza sia minore di $1/10$, di $1/100$

ec. convien ridurre l' intero a decimale, che abbia per denominatore un numero decadico, che sia cubo perfetto, il che si ottiene coll' aggiungere al numero proposto tante volte 3 zeri, quante cifre decimali vogliamo che abbia la sua radice. Così se cerchisi la radice cuba di 327 prossima sino ai centesimi, noi troviamo $\sqrt[3]{327} = \sqrt[3]{327,000000} = 6,88$ (§. 681).

683. Se poi trattisi di frazioni, quando queste *son decimali* tanti zeri aggiunger conviene quanti occorrono perchè le cifre dopo la virgola sien tante volte 3, quante cifre decimali vogliamo nel denominatore. Così se cerchisi la radice cuba di 0,7 che differisca men d'un centesimo dal giusto valore, avreme $\sqrt[3]{0,7}=\sqrt[3]{0,700000} = 0,41$ (§. 681). Se la *frazione è ordinaria* possono usarsi tre metodi diversi analoghi ai già esposti per le radici quadrate (675).

Estrazione delle radici di qualsiasi grado dai polinomii algebrici.

684. Poichè la formola del binomio Newtoniano serve ad esprimerci la costituzione di qualunque potenza del binomio, dalla quale dipende il metodo dell' estrazione della rispettiva radice, così per comprendere sotto la massima generalità le regole a questa estrazione relative, fa d' uopo facciamo ad essa ricorso. Ordinato perciò il polinomio da cui vuò estrarsi la radice emmesima, convien dar principio dall' estrazione della radice emmesima del 1.° termine, poichè questa esprime la prima parte dell' intera radice siccome il primo termine d' una potenza del grado m del binomio $a+c$ è a^m (§. 632).

Sottratta la potenza emmesima del primo ottenuto

termine della radice dal dato polinomio, il primo termine del residuo esser debbe $ma^{m-1}c$ (§. 632), sicchè onde risulti la 2.^{a} parte c della radice, convien dividerlo per ma^{m-1}, cioè per la prima parte della radice alzata alla potenza $m-1$ e moltiplicata per m, e per poi verificare se il polinomio contenga realmente tutte le altre parti costituenti la potenza emmesima della segnata radice ottenuta coll' operare sui soli primi 2 termini, conviene a tenor della formola costruire tutti gli altri termini, che col quadrato del primo compongono la potenza emmesima della segnata radice, e quindi sottrarli dal 1.° resto. Se si ottiene zero di residuo, la radice è compiuta: se si ha un resto suscettibile d'ulterior processo di calcolo, segno è che la radice non è binomia ma ha più di due termini, e allor l' operazione continuasi riguardando i due già ottenuti termini della radice come il solo primo termine il cui quadrato è già stato sottratto, e proseguendo a dividere per la potenza $m-1$ dei già ottenuti termini della radice moltiplicata per m.

Di questo metodo generale però quanto è semplice il concetto, altrettanto non difficile, ma complicata riesce l' esecuzione, e tanto più quanto più alto è il grado m; poichè tanto maggiore è allora il numero $(m+1)$ de' termini che costituiscono la potenza (627).

Delle quantità razionali, ed irrazionali, e della differenza tra le irrazionali, e le immaginarie.

685. Nello spingere che fatto abbiamo sempre più oltre le operazioni per la ricerca di quelle quantità che ognor più si approssimano al vero valore delle radici de' numeri interi, che non sono potenze perfette, non

può non esserci caduto in pensiere, se finalmente giunger si possa o no a tal quantità decimale, che sia di essi numeri la esatta radice. Onde soddisfare a tale quesito le seguenti riflessioni ci mostreranno che questa non può ottenersi quand' anche l' operazione si spingesse all' infinito, poichè *tutti i numeri interi che non sono potenze perfette non hanno radice non solo in numeri interi, ma nemmeno in numeri fratti*.

Ed in vero poichè un prodotto non risulta d' altri fattori primi, che di quelli stessi di cui risultano il suo moltiplicando, e moltiplicatore (132), è chiaro che in una potenza qualunque d' un numero altri fattori primi non troviamo diversi da quelli della sua stessa radice. Quindi se i termini d' una frazione (sia vera, o spuria) non hanno fattori comuni, nemmeno possono averli le loro potenze; e ciò è dire, che se una frazione è irreducibile, lo sono ancora tutte le sue potenze. Così come irriducibile è la prima sotto segnata frazione, del pari il sono tutte le sue potenze seguenti

$$\frac{35}{6}=\frac{5.7}{3.2};\left(\frac{35}{6}\right)^2=\frac{5.7\times5.7}{2.3\times2.3};\left(\frac{35}{6}\right)^3=\frac{5.7\times5.7\times5.7}{2.3\times2.3\times2.3},$$

non esistendo sì nel numeratore che nel denominatore delle successive potenze che gli stessi fattori non comuni del numeratore, e denominatore della radice sol che ripetuti. Ma in frazioni irreducibili si convertono per mezzo della riduzione ai menomi termini tutte le frazioni sì vere che spurie a riserva delle apparenti, che con questo mezzo si risolvono in interi: dunque meno le frazioni apparenti, che poi non sono che interi, tutte le frazioni ridotte ai menomi termini hanno per qualunque loro potenza una frazione irreducibile, e ta-

le per conseguenza da non poter essere eguale ad un' intero, mentre se a un' intero potesse ridursi, riducibil sarebbe, perchè avrebbe ambi i suoi termini divisibili per lo stesso denominatore: dunque *non v' è numero intero, che esser possa potenza d' una frazione*: ma i numeri interi, che non sono potenze perfette non hanno per ipotesi radice neppur fra gli interi: dunque non hanno radice esprimibile in numeri.

Noi siam giunti p. e. ad ottenere una quantità, che non differisce nemmeno di un millesimo dalla vera radice di 12 (674), ed avremmo potuto continuando l' operazione sempre più avvicinarci a segno da renderne infinitesima la differenza colla certezza però di mai poter ottenere la vera radice, poichè questa vera radice dovendo essere minore di 4, e maggiore di 3, non è numero intero, e nemmeno è poi una frazione spuria, poichè qualunque frazione spuria immaginabile fra 3, e 4 ridotta ai menomi termini, e per se moltiplicata, darebbe per quadrato una frazione egualmente irreducibile e non già l'intero 12, come si esigerebbe perchè dir si potesse esserne la vera radice. Dunque non potendo la radice quadrata di 12 (e dicasi lo stesso di qualunque radice di tutti i numeri *non perfette potenze*) esser espressa da numeri nè interi nè fratti, ne siegue che comunque estesissimo sia il numero delle esilissime parti in cui si concepisca l' unità divisa, pure non può mai trovarsene alcuna per quanto esile si voglia, che sia piccola abbastanza per misurare esattamente l' unità e la radice 2ª di 12, o la radice qualsiasi di qualunque altro numero non perfetta potenza; poichè se questa unità frazionaria misuratrice vi fosse, la quantità da essa misurata, ossia la radice di 12 sarebbe un numero frazionario (7) il che abbiamo or provato impossibile.

686. E a tal proposito cade un' altra osservazione in acconcio. Noi vediamo p. e. che 216 è una terza potenza perfetta, perchè essendo 216 = 2. 2. 2. 3.3.3 (132), formar possiamo coi suoi diversi fattori primi 2 e 3 un tal fattor composto 2. 3, che 3 volte ripetuto dia 216. Al contrario 72 non è una terza potenza perfetta; perchè essendo 72 = 2. 2. 2. 3. 3, non puo coi suoi diversi fattori 2, e 3 un tal fattore comporsi che tre volte ripetuto dia 72, perchè ognun vede esser condizione indispensabile che ciascun de' fattori diversi esista nel numero da cui vuò estrarsi la radice terza o 3 volte come in 216; o un numero di volte multiplo di 3; ma perchè in 72 il 2 esiste come fattore 3 volte, e il 3 due volte soltanto, una tal condizione non si verifica che nel 72 elevato a qualche potenza che sia multipla di 3. Dunque da tutte le altre potenze di 72 non può estrarsi radice terza in numeri interi, ma nemmeno in numeri frazionarii, perchè si è or provato che le frazioni non possono esser radici che di frazioni: dunque generalizzando l'osservazione conchiudiamo che se la radice ennesima di un dato numero è *incommensurabile*, lo è pure là radice ennesima di qualunque di lui potenza, il cui grado non sia multiplo di quello della radice, o ciò che è lo stesso » *Ogni quantità che non sia già potenziale per se stessa se ha per esponente una vera frazione è incommensurabile*. Ed ecco nelle radici de' numeri non perfette potenze un esempio di quel particolar genere di quantità non esprimibili in numeri, *incommensurabili* cioè coll' unità, e quindi con tutti i numeri interi e rotti, che a lei si riferiscono, e delle quali dammo un cenno al §. 10.

687. Come dunque dalla divisione de' numeri *non perfettamente multipli* del divisore, che riducesi al caso

della misura non esattamente contenuta nella quantità a misurarsi (5, 262, 362), si è dedotta l'origine delle frazioni, così dall' estrazione delle radici di *numeri non perfette potenze* traggono origine le quantità incommensurabili; e quindi come la prima ci reca alla distinzione degli *interi e fratti*, questa alla distinzione ci reca delle quantità *commensurabili o razionali*, e delle *incommensurabili*, *o irrazionali*, *o sorde*, intendendosi sotto le prime denominazioni tutti i numeri interi e rotti siccome sono appunto una quantità *misurata*, un rapporto (*ratio*) all' unità (7, 8), e sotto le 2e tutte quelle quantità di fisso valore la cui *misura* o *rapporto*, *se è approssimativamente* quanto vogliamo, non è per altro *esattamente* in numeri esprimibile.

688. Nè dall' osservazione che le quantità irrazionali non sono rappresentabili dalle cifre aritmetiche, come nol sono le immaginarie, traggasi motivo a credere, che possano con esse confondersi. Notabilissime sono infatti le differenze, che passano tra l' *irrazionale*, e l' *immaginario*, o l' astratto si contempli o il concreto.

Le irrazionali astrattamente considerate non sono, è vero, assegnabili in numeri: noi veggiamo però che 1.° vi son de' confini tra i quali debbono esistere, e 2.° possiamo quanto più ne piace accostarci con numeriche espressioni al vero loro valore. Fra 3, e 4 p. e. noi sappiamo che esister debbe la radice di 12, e questi confini tra i quali la quantità irrazionale è compresa si posson render sempre più angusti, spingendo innanzi l' estrazione della radice per approssimazione; e così trovammo (674) che la $\sqrt{12}$ sta fra 3464 e 3465 millesimi; e poichè sebbene abbiam la certezza di non poter mai giungere ad esprimere in cifre la radice vera di 12, pur sentiamo la possibilità di sempre più avvicinarci, di

sempre più porle a ridosso i cancelli tra i quali è compresa, con ciò stesso noi veniamo a sentire l' esistenza di questa quantità, che sebben non esprimibile in numeri, pur non può nel suo valore oscillare, subito che sta in nostra facoltà l' attenuare ancor più, e attenuare per quanto ci piaccia la più piccola differenza che passa tra le due quantità variabili l' una maggiore e l' altra minore di lei. Le irrazionali son dunque quantità reali, e determinate, che se non hanno colla unità un rapporto espresso da numeri, hanno però la proprietà di essere il *limite* di que' rapporti con cui possiamo esprimerle prossimamente al vero avvicinandoci coll' attenuamento delle differenze in più, o in meno per quanto ne aggrada (a). Le quantità immaginarie al contrario, cioè le radici pari delle potenze negative essendo assolutamente impossibili (602), non hanno come le irrazionali, de' confini tra quali esse debbono esistere, nè possiamo avvicinarci al loro valore, perchè dal reale all' assurdo non v' è graduato passaggio.

Che se dall' astratto ci piaccia far passo alle applicazioni, una prova di fatto dell' esistenza delle quantità irrazionali ce ne dà l' estensione. La geometria infatti forze superiori mostrando a quelle dell' Aritmetica

(a) Con questo riflesso noi ci guarderemo pure dal confondere le quantità incommensurabili, o irrazionali con quelle quantità *indeterminabili per natura*, come sensazioni, affetti, ec. che dicemmo (17) non poter esser soggetto del calcolo, mentre se convengono entrambe nell' essere inesprimibili in numeri, v' è però notabil differenza tra esse, poichè il concetto delle incommensurabili deriva da operazioni eseguite sulla quantità misurata o sui numeri, e posson per essi le incommensurabili esprimersi con una inesattezza che sta in nostro arbitrio rendere infinitesima, mentre dell' una, e dell' altra proprietà sono spoglie le altre.

per mezzo di operazioni tutte sue proprie, e fondate sulle particolari proprietà della quantità estesa, ci determina esattamente in molti casi delle quantità, che sono ad altre incommensurabili, essa ci pone p. e. sott' occhio col lato del quadrato la lunghezza della sua diagonale, che è con esso incommensurabile, e che perciò l'aritmetica non saprebbe esprimere in numeri che approssimativamente per esser la diagonale come vedremo eguale a $\sqrt{2}$, quando riguardasi il lato per unità; ed è si vero che sono reali quantità determinate le incommensurabili, che la Geometria sa precisarci delle estensioni incommensurabili che abbiano ad una quantità razionale quello stesso rapporto di continenza sebben non esprimibile in numeri che un'altra incommensurabile ha ad altra quantita razionale. Al contrario in veruna applicazione non troviamo esempio di cose determinate, che espresse ci vengano dai simboli immaginarii i quali non compariscono nel calcolo che per avvertirci o della *impossibilità* di una, o della *incompatibilità* di più condizioni, nè può altrimenti accadere subitochè le quantità immaginarie essendo quantità vincolate a segni con esse incompatibili quali sono le negative precedute da un radicale di esponente pari, che possiamo così esprimere $\sqrt[2n]{-a}$ (620), non sono altrimenti quantità, ma *un nulla per contraddizione di idee vestito di segni algebrici* meritevole perciò a rigore non del nome di *quantità*, ma piuttosto di *simbolo immaginario*.

689. E dopo tutte queste distinzioni conchiuder possiamo, che i segni algebrici esprimono o *simboli immaginarii*, o *quantità reali*. Le quantità reali poi o sono *irrazionali o razionali*: le razionali o *intere*, o *fratte* e sì le une che le altre o *positive*, o *negative*, o *monomie*, o *polinomie*.

CAPO IX.

Teoria de' Radicali

690. Poichè grande è il numero de' casi in cui non si possono estrarre le radici esattamente, e lunghe le operazioni necessarie onde ottenerle per approssimazione, giova durante il processo de' calcoli algebrici indicare col segno radicale le radici da estrarsi piuttosto che estrarle effettivamente, e quindi eseguire su queste indicazioni per quanto si può le operazioni fondamentali che l' analisi algebrica esige ad oggetto di semplicizzare per quanto è possibile i risultati riserbando, alla fin de' calcoli la real estrazione delle radici, mentre si ha così il vantaggio e di non dover tante volte ripetere questa operazione, e di praticarla sovra le espressioni più semplici e i più piccoli numeri che le condizioni del problema ci offrano. Così presso gli Algebristi ebbe origine la teoria de' radicali, il calcolo cioè di quelle quantità che sono affette dal segno radicale sieno esse razionali, o irrazionali (a), teoria che abbraccia e

---

(a) Se i radicali esser possono quantità si razionali che irrazionali, ognun vede esser inesatta la distinzione che fassi delle quantità algebriche in *razionali*, e *radicali*, perchè induce ad escludere le radicali dalle razionali mentre tali possono esser pur esse. E' perciò ad osservarsi che a rigore le quantità finchè le considera l' Algebra non sono nè razionali nè irrazionali, poichè questa distinzione è appoggiata al rapporto che hanno le quantità all' unità da cui l' Algebra fa astrazione (159); e quindi che il nome di *razionale* dato alle quantità algebriche ha tutt' altro significato, ed altro non esprime se non che *quantità non affette da segno radicale*, e sotto questo senso per uniformarci agli altri noi pure l' adotteremo.

quelle operazioni che alterano l' aspetto de' radicali senza alterarne il valore, e quelle che modificano l' uno e l' altro.

ARTICOLO I.

Delle operazioni che alterano l' aspetto e non il valore de' radicali.

Trasporto delle quantità entro, e fuori del segno radicale.

691. Tutte le operazioni che modificano il solo aspetto de' radicali derivano da questa loro fondamental proprietà « *che non ne è alterato il valore se l' esponente del segno come gli esponenti delle lettere che vi sono comprese, sieno moltiplicati o divisi per una stessa quantità*. Infatti siccome per qualunque quantità r vengano moltiplicati o divisi i termini d'un esponente frazione, il suo valore rimane lo stesso (275) si avrà $c^{\frac{m}{n}} = c^{\frac{mr}{nr}}$; ma $c^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{c^m}$; e $c^{\frac{mr}{nr}} = \sqrt[nr]{c^{mr}}$ (604): dunque $\sqrt[n]{c^m} = \sqrt[nr]{c^{mr}}$, e viceversa $\sqrt[nr]{c^{mr}} = \sqrt[n]{c^m}$. Per le stesse ragioni $\sqrt[n]{a^m c^r g^a} = \sqrt[nu]{a^{mu} c^{ru} g^{au}}$; e viceversa. Scende da questi principii che come si ha $a = \sqrt[1]{a^1}$ (584), abbiasi pure anche $a = \sqrt[2]{a^2} = \sqrt[3]{a^3} = \sqrt[4]{a^4}$, ec., il che è conforme alle date nozioni (588).

692. Poichè $a \sqrt[m]{c^n} = ac^{\frac{n}{m}}$ (§ 604) $= a^{\frac{m}{m}} c^{\frac{n}{m}} =$

$(a^m c^n)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a^m c^n}$, si vede che *per trasportare sotto il segno radicale una quantità, che ne è fuori e che chiamasi* il coefficiente del radicale, *fa d' uopo elevarlo alla potenza indicata dall' esponente della radice.* Così $4\sqrt{ac} = \sqrt{16ac}$; $3p^2\sqrt{c} = \sqrt{9p^4c}$; $-a\sqrt{a} = \sqrt{a^3}$;

$(3m^2+c)\sqrt[3]{g^2} = \sqrt[3]{(27g^2m^6+27cg^2m^4+9c^2g^2m^2+c^3g^2)}$;

$4ac^2\sqrt[3]{(2a^2+4cm)} = \sqrt[3]{(128a^5c^6+256a^3c^7m)}$

693. All' opposto *separando quando si può dalla quantità sotto il segno radicale il maggior fattore possibile, che sia potenza perfetta del grado stesso indicato dalla radice, questo può fuor trasportarsi segnando in vece la sua radice.*

Infatti $\sqrt{a^2cp^3} = \sqrt{(a^2p^2 \times cp)} = \sqrt{a^2p^2}\sqrt{cp}$ (§. 605) $= ap\sqrt{cp}$.

Così $\sqrt[3]{(64c^3m^2+64ac^3)} = \sqrt[3]{\left(64c^3\times(m^2+a)\right)} = 4c\sqrt[3]{(m^2+a)}$;

$\sqrt{(-4a^2m^2+8acm^2-4c^2m^2)} = (2am-2cm)\sqrt{-1}$

$\sqrt[3]{1080c^4} = \sqrt[3]{6^3.5c^4}$ (§. 132) $= \sqrt[3]{(216c^3\times 5c)} = 6c\sqrt[3]{5c}$;

$2\sqrt[3]{2500} = 2\sqrt[3]{(2^2.5^4)}$ (§. 132) $= 2\sqrt[3]{(4\cdot 5^3.5)} = 10\sqrt[3]{20}$

$$\sqrt{\left(\frac{a^4+a^2c^2}{a^2c^2+c^4}\right)} = \sqrt{\frac{a^2(a^2+c^2)}{c^2(a^2+c^2)}} = \sqrt{\frac{a^2}{c^2}} = \frac{a}{c}$$

Riduzione de' Radicali alla più semplice espressione.

694. Poichè $\sqrt[ns]{c^{mn}g^{nr}} = \sqrt[s]{c^m g^r}$ (§. 691), *si ri-*

ducono i radicali senza alterarsi a più semplice espressione elidendo i fattori comuni all' esponente del segno e agli esponenti delle lettere, che sono sotto il medesimo.

Così $\sqrt[6]{64a^6c^3} = 2a\sqrt[6]{c^3}$ (§. 692) $= 2a\sqrt{c}$;

Così $\sqrt[8]{a^4c^8} = c\sqrt{a}$; e $2a\sqrt[4]{5184a^4c^2} =$

$2a\sqrt[4]{(2^2.6^4a^4c^2)}$ (§. 132) $= 12a^2\sqrt{2c}$;

Così $\sqrt[3]{a^6m^3c^{12}} = \sqrt[1]{a^2m^1c^4} = a^2mc^4$ (§. 584).

Riduzione de' radicali al medesimo nome, o grado

695. Poichè le quantità radicali possono esprimersi con un esponente fratto, il cui numeratore è l'esponente della quantità sotto il segno, e il denominatore è l'esponente del segno radicale, è chiaro che ridurre più radicali ad avere il medesimo esponente è un ridurre gli esponenti fratti di più quantità allo stesso denominatore, il che si ottiene moltiplicando numeratore, e denominatore di ciascun esponente fratto delle diverse quantità pel denominatore dell' altro esponente se son due sole (302), e pel prodotto dei denominatori di tutti gli altri (303) se son più di due, ossia *col moltiplicare in ciascun radicale l' esponente della quantità sotto il segno e del segno per l' esponente del segno dell' altro, se sono due soli, e pel prodotto di tutti gli esponenti degli altri segni radicali, se sono più.*

Così $\sqrt[n]{c^r}$, $\sqrt[m]{a^z}$, $\sqrt[u]{h^x}$ divengono $\sqrt[mnu]{c^{rmu}}$, $\sqrt[mnu]{a^{znu}}$,

$\sqrt[mnu]{h^{xmn}}$, poichè $\sqrt[n]{c^r} = c^{\frac{r}{n}} = c^{\frac{rmu}{mnu}} = \sqrt[mnu]{c^{rmu}}$, e similmente si ragioni sugli altri due radicali.

Così $\sqrt[4]{a^3}$, $\sqrt[3]{c}$ divengono $\sqrt[12]{a^9}$, $\sqrt[12]{c^4}$;

$$\text{Così } \frac{\sqrt{(a+2y)}}{\sqrt[3]{3m-x}} = \sqrt[6]{\frac{a^3+6a^2y+12ay^2+8y^3}{9m^2-6mx+x^2}}$$

Coll' applicazione della regola (304) troviamo poi che $\sqrt{c}$, $\sqrt[4]{c^3}$, $\sqrt[8]{c^5}$, divengono $\sqrt[8]{c^8}$, $\sqrt[8]{c^6}$, $\sqrt[8]{c^5}$.

ARTICOLO II.

Delle operazioni che alterano e l' aspetto e il valore delle quantità radicali.

Addizione, e Sottrazione

696. I. Caso *Radicali simili:* $3\sqrt{c^3}+5\sqrt{c^3}=8\sqrt{c^3}$; $7\sqrt{a}-6\sqrt{a}=\sqrt{a}$; e $m\sqrt{a^5}\pm n\sqrt{a^5} = (m\pm n)\sqrt{a^5}$.

697. II. Caso *Radicali che divengon simili col ridurli alla più semplice espressione;* $\sqrt[3]{c^2f}+3\sqrt[6]{c^4f^2} = \sqrt[3]{c^2f}+3\sqrt[3]{c^2f}$ (§. 694) $= 4\sqrt[3]{c^2f}$; $3a\sqrt{g^3h}-\sqrt[4]{16a^4g^6h^2}$ $= 3a\sqrt{g^3h}-2a\sqrt[4]{g^6h^2}$ (§. 693) $= 3a\sqrt{g^3h}-2a\sqrt{g^3h}$ $= a\sqrt{g^3h}$.

698. III. Caso *Radicali dissimili*. La somma di $\sqrt{a}$, e di $\sqrt{c}$, o la sottrazione della 2ª quantità dalla prima non può che indicarsi coi debiti segni, scrivendo $\sqrt{a}+\sqrt{c}$, ovvero $\sqrt{a}-\sqrt{c}$.

699. *I. Caso. Radicali per razionali, e viceversa.*

$$c\times\sqrt{m} = c\sqrt{m}\,;\ \sqrt{(c^2+p^2)}\times 4a = 4a\sqrt{(c^2+p^2)};$$

$$a : \sqrt{c} = \frac{a}{\sqrt{c}}\,;\ \sqrt{(m^2-n)} : (2+3a) = \frac{\sqrt{(m^2-n)}}{2+3a}\,;$$

$$a^3 : a\sqrt{a} = \frac{a^3}{a\sqrt{a}} = \frac{aaa}{a\sqrt{a}} = \frac{aa\sqrt{a}\sqrt{a}}{a\sqrt{a}} = a\sqrt{a}.$$

700. *II. Caso. Radicali per radicali dello stesso grado.*

$$\sqrt{a}\times\sqrt{c} = a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}} = (ac)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{ac}.$$

$$\sqrt{m} : \sqrt{n} = \frac{m^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{m}{n}}$$

Si moltiplicano cioè e si dividono i radicali dello stesso grado operando sulle quantità sotto il vincolo radicale, e anteponendo al loro prodotto o quoto il radical comune. Eccone degli esempii.

701. *Per la Moltiplicazione.* $\sqrt{(m^3-m^2n)}$ $\times\sqrt{(mn^2-n^3)} = m\sqrt{(m-n)}\times n\sqrt{(m-n)}$ (§. 693) $=$ $mn\sqrt{\left((m-n)\ (m-n)\right)}$ (§. 605) $= mn\sqrt{(m-n)^2} =$ $mn(m-n)$ (§. 588) $= m^2n-mn^2$.

$\sqrt{121}\times\sqrt{81}=\sqrt{9801}=99$. Ed infatti $\sqrt{121}\times\sqrt{81}=$ $\sqrt{11^2}\times\sqrt{9^2} = 11\times 9$ (§. 588) $= 99$

$\sqrt{18}\times\sqrt{2}=\sqrt{36}=6$. Ed infatti $\sqrt{18}\times\sqrt{2}=\sqrt{2\cdot 9}\times\sqrt{2}$ $=3\sqrt{2}\times\sqrt{2} = 3\sqrt{2^2} = 3\cdot 2=6$

E quest' ultimo esempio ci mostra che due irrazionali danno un prodotto razionale, quando tratta fuor del segno una qualche quan-

tità, il prodotto di quelle che rimangono sotto il vincolo sia una potenza del grado stesso del radicale. Nè la possibilità ammessa in due fattori irrazionali di produrre un razionale ripugna, poichè se impossibil sarebbe che una quantità incommensurabile coll' unità ripetuta un dato *numero* di volte divenisse commensurabile, non è assurdo che tal divenga quando dopo essere stata presa per quanto lo indica il numero minore prossimo al moltiplicatore incommensurabile, venga presa ancora per quanto indica quel *di più* inesprimibile in numeri per cui differisce dal numero minore prossimo il dato Moltiplicatore irrazionale, potendosi ben concepire che due irrazionali dar possano una somma razionale come due frazioni posson dar per somma un' intero.

702. *Per la Divisione*. $\frac{ac\sqrt{ac}}{a\sqrt{a}} = \frac{ac\sqrt{a}\sqrt{c}}{a\sqrt{a}}$ (§. 605) $= c\sqrt{c}$;

$$\frac{\sqrt[3]{5832}}{\sqrt[3]{27}} = \sqrt[3]{\frac{5832}{27}} = \sqrt[3]{216} = 6\text{: ed infatti}$$

$$\frac{\sqrt[3]{5832}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{\sqrt[3]{2.2.2.3.3.3.3.3.3}}{\sqrt[3]{3.3.3}} \text{ (§. 132)} =$$

$$\frac{\sqrt[3]{2^3}\sqrt[3]{3^3}\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{3^3}} = \frac{2.3.3}{3} \text{ (§. 691)} = 6;$$

$$\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{27}} = \sqrt{\frac{75}{27}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}\text{; ed infatti, } \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{27}}$$

$$= \frac{\sqrt{3.5.5}}{\sqrt{3.3.3}} \text{ (§. 132)} = \frac{\sqrt{5^2.3}}{\sqrt{3^2.3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{5}{3}.$$

Dal che rileviamo che due irrazionali dar possono un quoto razionale intero o rotto, quando tratta fuor del segno una qualche quantità, quella che riman sotto il vincolo sia la stessa nel nume-

ratore e denominatore: nè ciò implica contraddizione, mentre allor vi sarebbe, se si pretendesse che un quoto integro o fratto ci esprimesse il rapporto di contenenza fra un commensurabile ed un incommensurabile, e non già fra due irrazionali.

III. Caso. Radicali per radicali di grado diverso.

703. *Si converte questo caso nell' antecedente riducendo i radicali al medesimo nome* (695);

Esempii *per la moltiplicazione;* $3\sqrt[3]{c^2}\times 4\sqrt{3a} = 3\sqrt[6]{c^4}\times 4\sqrt[6]{27a^3} = 12\sqrt[6]{27a^3c^4}$.

$2\sqrt[3]{1728}\times\sqrt{441} = 2\sqrt[6]{(1728^2\times 441^3)} = 504$.

Esempii *per la divisione;* $\dfrac{am\sqrt{am}}{a\sqrt[3]{am}} = \dfrac{am\sqrt[6]{a^3m^3}}{a\sqrt[6]{a^2m^2}} = \dfrac{am}{a}\sqrt[6]{\dfrac{a^3m^3}{a^2m^2}} = m\sqrt[6]{am}$;

$\dfrac{\sqrt{46656}}{\sqrt[3]{46656}} = \dfrac{\sqrt[6]{46656^3}}{\sqrt[6]{46656^2}} = \sqrt[6]{46656} = 6$; ed infatti

$\dfrac{\sqrt{46656}}{\sqrt[3]{46656}} = \dfrac{\sqrt{(2^6.3^6)}}{\sqrt[3]{(2^6.3^6)}}$ (§. 132) $= \dfrac{2^3.3^3}{2^2.3^2}$ (§.694) $= 2.3 = 6$.

IV. Caso. Complessi di razionali, e radicali tra loro

704. A norma del metodo stabilito nella moltiplicazione, e divisione de' polinomii, si *moltiplica ciascun monomio per ciascun termine del moltiplicatore*

mettendo in pratica le regole ora stabilite pei radicali monomii. Ed eccone esempii.

705. Per la moltiplicazione in cui sono radicali dello stesso grado.

$$\textit{Moltiplicando}\quad 2\sqrt{a}+m-3\sqrt{ac}$$
$$\textit{Moltiplicatore}\quad 3m\sqrt{a}-2m\sqrt{ac}$$
$$6m\sqrt{a^2}+3m^2\sqrt{a}-9m\sqrt{a^2c}$$
$$-4m\sqrt{a^2c}-2m^2\sqrt{ac}+6m\sqrt{a^2c^2}$$
$$\textit{Prodotto}\quad 6ma+3m^2\sqrt{a}-13am\sqrt{c}-2m^2\sqrt{ac}+6mac$$

706. Per la moltiplicazione con riduzione de' radicali al grado stesso.

$$\textit{Moltiplicando}\quad x+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}$$
$$\textit{Moltiplicatore}\quad 4x-8\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}$$
$$4x^2+8x\sqrt{x}+4x\sqrt[3]{y}$$
$$-8x\sqrt{x}\qquad -16\sqrt{x^2}-8\sqrt[6]{x^3y^2}$$
$$+x\sqrt[3]{y}\qquad +2\sqrt[6]{x^3y^2}+\sqrt[3]{y^2}$$
$$\textit{Prodotto}\quad 4x^2\qquad +5x\sqrt[3]{y}-16x-6\sqrt[6]{x^3y^2}+\sqrt[3]{y^2}$$

707. Per la divisione in cui son radicali del grado stesso.

$$\textit{Dividendo}\quad a^3+2ac\sqrt{ac}+c^3\qquad a\sqrt{a}+c\sqrt{c}\quad \textit{Divisore}$$
$$-a^3-ac\sqrt{ac}\qquad a\sqrt{a}+c\sqrt{c}\quad \textit{Quoto}$$
$$+ac\sqrt{ac}+c^3$$
$$-ac\sqrt{ac}-c^3$$
$$0\qquad 0$$

708. Per la divisione in cui cade la riduzione de' radicali allo stesso grado.

Dividendo $6x-\sqrt[6]{x^3z^2}-12\sqrt[3]{z^2}$ | $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{z}$ *Divisore*

$-6x+9\sqrt[6]{x^3z^2}$ | $3\sqrt{x}+4\sqrt[3]{z}$. *Quoto*

$8\sqrt[6]{x^3z^2}-12\sqrt[3]{z^2}$

$-8\sqrt[6]{x^3z^2}+12\sqrt[3]{z^2}$

$0 \quad 0$

Dividendo $c^3 \qquad -m$ | $c-\sqrt[3]{m}$ *Divisore*

$-c^3+c^2\sqrt{m}$

$+c^2\sqrt{m} \qquad -m$ | $c^2+c\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{m^2}$. *Quoto*

$-c^2\sqrt{m}+c\sqrt[3]{m^2}$

$+c\sqrt[3]{m^2}-m$

$-c\sqrt[3]{m^2}+m$

$0 \quad 0$

709. E dopo le acquisite notizie niuna difficoltá offre la moltiplicazione, e divisione di que' radicali, che taluni chiamano *universali*, in cui le quantità sotto il vincolo sono complessi di *razionali* e radicali. Ed infatti.

$$\sqrt[3]{(a+\sqrt{a})}\times\sqrt[3]{(4a-3\sqrt{a})}=\sqrt[3]{\big((a+\sqrt{a})(4a-3\sqrt{a})\big)}$$

(§. 700) $=\sqrt[3]{(4a^2+a\sqrt{a}-3a)}$ (§. 705).

$\sqrt[3]{(a+\sqrt{x})}\times\sqrt{x}=\sqrt[6]{(a^2+2a\sqrt{x}+x)}\ \sqrt[6]{x^3}$ (§. 695) $=$
$\sqrt[6]{(a^2x^3+2ax^3\sqrt{x}+x^4)}$ (§. 700)

$$\frac{\sqrt{(6z\sqrt{az}-4z^2\sqrt[6]{c^2z^3}-9m\sqrt[6]{a^3c^2}+6mz\sqrt[3]{c^2})}}{\sqrt{(3\sqrt{a}-2z\sqrt[3]{c})}}=$$

$$\sqrt{\frac{6z\sqrt{az}-4z^2\sqrt[6]{c^2z^3}-9m\sqrt[6]{a^3c^2}+6mz\sqrt[3]{c^2}}{3\sqrt{a}-2z\sqrt[3]{c}}} \quad (\S.\ 700)$$

$= 2z\sqrt{z}-3m\sqrt[3]{c}$ (§. 708).

Elevazione a Potenze ed estrazione delle radici de' Radicali

710. Poichè $(\sqrt{a})^3 = \sqrt{a}\times\sqrt{a}\times\sqrt{a} = \sqrt{a^3}$ (§.700) e in genere $(\sqrt[n]{a^m})^r = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^r$ (§.609) $= a^{\frac{mr}{n}}$ (§.596) $=\sqrt[n]{a^{mr}}$; e poichè egualmente $(\sqrt[nr]{a^m})^n = \sqrt[nr]{a^{mn}} = \sqrt[r]{a^m}$ (§. 691) è ben chiaro che *si eleva a qualunque potenza una quantità radicale col solo elevare a potenza la quantità sotto il segno, ovvero col dividere l'esponente della radice* (se ne è un multiplo) *pel grado della voluta potenza*, ed eccone esempii, $(\sqrt[3]{2a^2})^2 = \sqrt[3]{4a^4}$; $(\sqrt[5]{(3f+m)})^2 = \sqrt[5]{(9f^2+6fm+m^2)}$; $(\sqrt[3]{8})^2=\sqrt[3]{64}=4$: infatti $(\sqrt[3]{8})^2=(\sqrt[3]{2^3})^2=2^2$ (§. 691) $=4$. $(\sqrt{36})^3 = \sqrt{46656}=216$: infatti $(\sqrt{36})^3 = (\sqrt{6^2})^3=6^3 = 216$.

$(\sqrt[6]{117649a^6})^3 = \sqrt{117649a^6} = 343a^3$;
$(\sqrt[8]{(6561)})^2 = \sqrt[4]{6561} = 9$.

711. Se d' altronde dalle quantità radicali si vuò estrarre una qualche radice, p. e. si voglia la radice r della quantità $\sqrt[n]{a^m}$, noi osserviamo che $\sqrt[r]{\sqrt[n]{a^m}}=\sqrt[r]{a^{\frac{m}{n}}}$

$= a^{\frac{m}{nr}} = \sqrt[nr]{a^m}$ (§. 609). Se or si voglia la radice c di $\sqrt[r]{\sqrt[n]{a^m}}$, noi osserviamo che $\sqrt[c]{\sqrt[r]{\sqrt[n]{a^m}}} = \sqrt[c]{a^{\frac{m}{nr}}}$ $= a^{\frac{m}{cnr}} = \sqrt[cnr]{a^m}$; e viceversa $\sqrt[cnr]{a^m} = \sqrt[c]{\sqrt[n]{\sqrt[r]{a^m}}}$; e poichè $cnr = rnc = crn$, ec. (56), ne segue ancora che $\sqrt[c]{\sqrt[n]{\sqrt[r]{a^m}}}$, $\sqrt[r]{\sqrt[n]{\sqrt[c]{a^m}}}$, $\sqrt[c]{\sqrt[r]{\sqrt[n]{a^m}}}$ ec. danno tutte un medesimo risultato. E da ciò conchiudiamo, che *una quantità qualunque soggetta a più segni radicali si può esprimere con un sol segno che abbia per indice il prodotto degli indici de' radicali dati*; *ovvero da un radicale che ha un esponente composto di più fattori si può tornare ad un radicale avente ciascun di que' fattori per esponente di un distinto segno, sicchè si trovi sotto tanti vincoli quanti sono i fattori comunque disposti del radical primitivo*, operazione di somma utilità, perchè ne' casi delle incommode estrazioni di alte radici i cui esponenti non sien numeri primi, ci pone sotto gli occhi un compenso, additandoci le *successive* radici, che estrarre dobbiamo dalla data quantità per ottenere lo stesso risultato; e tale artificio si è perciò detto *metodo delle estrazioni successive*.

Così $\sqrt[4]{a^4} = \sqrt{\sqrt{a^4}} = \sqrt{a^2} = a$; e $\sqrt[6]{a^5} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{a^5}}$

Così $\sqrt[4]{4096} = \sqrt{\sqrt{4096}} = \sqrt{64} = 8$;

$\sqrt[6]{2985984} = \sqrt{\sqrt[3]{2985984}} = 12$;

$\sqrt[12]{4096} = \sqrt[3\cdot2\cdot2]{4096} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{\sqrt[2]{4096}}} = 2$;

$\sqrt[12]{531441}=\sqrt[2\cdot 2\cdot 3]{531441}=\sqrt[2]{\sqrt[2]{\sqrt[3]{531441}}}=3$; $\sqrt[8]{6561}=\sqrt[2]{\sqrt[2]{\sqrt[2]{6561}}}=3$; e $\sqrt[9]{512}$ $=\sqrt[3]{\sqrt[3]{512}}=2$.

ARTICOLO III.

Osservazioni sovra alcuni casi particolari del calcolo de' radicali, e precisamente del calcolo degli IMMAGINARII.

Le regole stabilite pel calcolo dei radicali ci farebbero cadere in errori, se senza le opportune osservazioni si applicassero alle quantità immaginarie, come le abbiamo applicate alle reali.

Durante il processo de' calcoli algebrici nascono talvolta le quantità immaginarie (602); e se rimangono negli ultimi risultati ci addimostrano la contraddizione ne' dati che le hanno prodotte. Interessa perciò conoscerne il calcolo, che noi limitiamo agli immaginarii di 2.° ordine e perchè i soli che si incontrino nella soluzione delle equazioni di 2.° grado, a cui si arresta l'Algebra elementare, e perchè ad essi riduconsi ancora gli immaginarii di ordini superiori.

712. Circa l'addizione, e la sottrazione degli immaginarii sia che abbia luogo su quantità semplici, o complesse, e risultanti o di tutte immaginarie o di reali ancora, nulla s' incontra che meriti rimarco. Nulla nemmeno per parte della moltiplicazione d'un immaginario per un reale; poichè un' immaginario $\sqrt{-c}$ aggiunto ad a, o sottratto da a, o ripetuto un dato

numero a di volte, è ben chiaro che sempre conserva la natura sua immaginaria nel risultato $a+\sqrt{-c}$, $a-\sqrt{-c}$, $a\sqrt{-c}$.

713. Un'osservazione importante è però a farsi quando trattasi della moltiplicazione di immaginarii tra loro, p. e. di $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1$ (§. 588).

In vista di tal risultato suol dai matematici dirsi, che reale è il prodotto di due immaginarii, che perciò nel processo della operazione l'*immaginarietà d'un elemento* (è frase di Bossut) *viene annichilata dalla immaginarietà dell'altro*; ma queste espressioni non reggono ad una severa tattica di ragionare, e prese a rigore sono a nostro credere tanto assurde quanto lo è l'immaginario a cui si riferiscono, poichè un nulla nato per conflitto di idee non può nulla produrre; nè alcun concetto possiam formarci di immaginarii che si elidono, e che di più coll'elidersi danno vita ad una quantità reale; poichè il distruggersi reciprocamente è proprio di ciò che è, e non già di ciò che non è.

714. E per dare il debito sviluppo alle nostre idee in proposito, cominciamo dall'osservare che se la quantità reale -1 fosse *effettivamente* il prodotto d'una vera moltiplicazione di $\sqrt{-1}$ per $\sqrt{-1}$, con qualunque regola algebrica venisse questa moltiplicazione eseguita, sempre ottener si dovrebbe lo stesso identico risultato, e ciò non accade. Infatti per quel che si è notato (588) $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1$, si ha cioè per prodotto non altri esclusivamente che -1: d'altronde colla regola (700) $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=\sqrt{(-1\times-1)} = \sqrt{+1} = \pm 1$; sicchè se la possibilità del valore di $+1$ è ammessa dalla regola (700), ed è esclusa dal-

le nozioni (588), come spiegasi una tale anomalia? Forse ripetere dovremo con Bossut, che in queste operazioni le quantità immaginarie si sottraggono in qualche parte alle leggi generali del calcolo esigendone delle diverse? No certamente: poichè se l' Algebra in tutti i casi possibili, cui può riferire le sue operazioni, non applicasse egualmente i suoi canoni, e dasse luogo a delle eccezioni, essa più non godrebbe del più prezioso de' suoi requisiti, la *estrema generalità delle sue speculazioni*. Dovremo in vece appagarci del mezzo termine di conciliazione esposto da Bezout, e seguìto da La-Croix? Essi credono sciogliere la difficoltà col dirci che solo « *quando si ignora in qual modo è stato formato il quadrato, p. e.* 1^2, *e che se ne chiede la radice, dobbiamo per questa prendere sì* $+1$, *che* -1; *ma che quando si sa quale di queste due quantità fu moltiplicata per se stessa affine di formare* 1^2, *non è più lecito quando ad essa si può tornare il prenderne un altra, cosicchè nel caso di* $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}$, *essendo noto che la quantità* 1^2 *compresa sotto il segno radicale* $\sqrt{1^2}$ *proviene da* -1×-1, *cessa l' ambiguità, e quando si torna alla radice conviene porre* -1 » Noi però sebbene pieni di rispetto per questi uomini sommi, soddisfatti non rimaniamo da tale spiegazione che ci sembra non atta a sciogliere l'intimo nodo della quistione. Noi partiamo dal rimarco che l' oggetto dell' operazione che ci vien proposta nell' espressione $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}$ è la moltiplicazione non di -1 per -1, quantità sotto il segno su cui raggirasi il citato ragionamento, ma di $\sqrt{-1}$ per $\sqrt{-1}$.

Or finchè si le radici, che le rispettive potenze comprese sotto il segno radicale son quantità, o direttamente si moltiplichino le radici tra loro, ovvero men

direttamente operando si moltiplichino prima le quantità sotto il segno ossia le potenze in vece delle loro radici (con che si ha un prodotto che è potenza del richiesto prodotto delle due date radici) e poi da questo prodotto la radice si estragga, il risultato è il medesimo; e da questa identità di risultati, è nata la regola prattica che per ottener il prodotto d'una per altra radice è indifferente o il moltiplicare realmente l'una per l'altra, oppure far prima il prodotto delle quantità sotto il segno, e poi anteporgli il vincolo radicale (700): ma la stessa regola pratica non ha più luogo quando trattisi di quantità immaginarie, poichè non v'è più identità di risultato tra la radice del prodotto delle quantità sotto il segno, che indirettamente nel caso delle quantità reali serve allo scopo, ed il prodotto delle radici immaginarie, che è l'oggetto della nostra ricerca.

Ed infatti è a notarsi che quando chiedesi il prodotto di $\sqrt{-1}$ per $\sqrt{-1}$, positivo è il prodotto $+1$ delle quantità sotto il segno, e quindi reale la sua radice $\pm\sqrt{+1}$; mentre d'altronde *nè positivo nè negativo* è l'effettivo quadrato dello stesso radicale. Invero qual segno aver può il prodotto di $\sqrt{-1}$ per $\sqrt{-1}$, che dobbiam procurarci? Il segno del prodotto dipende da quello de' suoi fattori $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-1}$. Or dal vedere che $\sqrt{-1}$ non ha alcun segno innanzi sè, quì non ha luogo la convenzione che debba sottintendersi il $+$ (§.187), poichè si è già dimostrato (602) che $\sqrt{-1}$ non può esser affetta nè da $+$, nè da $-$, per essere impossibile: ciò posto nel simbolo $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}$ nè dal $+$, nè dal $-$ può esser affetto il moltiplicando perchè non può mai considerarsi in istato nè di addizione nè di sottrazione il *non esistente*, non il moltiplicatore,

perchè non si può indicare che venga ripetuto, o nel suo stato, o nell'opposto ciò che non esiste in istato alcuno: dunque il risultato della vera moltiplicazione di $\sqrt{-1}$ per $\sqrt{-1}$ non può a rigore essere nè positivo, nè negativo, poichè a tenor delle regole risguardanti i segni nella moltiplicazione, il segno del prodotto deriva da quello de' fattori, e perciò non può averne alcuno quando non ne hanno alcuno le radici che deggion produrlo. Dunque il *risultato algebrico effettivo* della moltiplicazione $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}$ non solo non può esser $+1$, sul che convengono i Matematici tutti, non solo non può dirsi a rigore che sia -1, come tutti i matematici ammettono, ma è assolutamente *nullo*, siccome nullo esser debbe per processo di calcolo il risultato della moltiplicazione effettiva di un qualunque per altro immaginario, poichè niuna idea possiamo formarci di prodotti, i cui fattori sono destituiti di segni.

715. Ma se a tenor dell' esposto niuna idea annetter possiamo alla formola $\sqrt{-a}\times\sqrt{-c}$, notiamo che qualunque radice immaginaria può esprimersi per una radice reale moltiplicata per l' immaginario $\sqrt{-1}$; poichè p.e. $\sqrt{-a} = \sqrt{(a\times-1)} = \sqrt{a}\times\sqrt{-1}$ (§.605); ed egualmente $\sqrt{-c}=\sqrt{c}\times\sqrt{-1}$; e quindi $\sqrt{-a}\times\sqrt{-c}$ può convertirsi in $\sqrt{a}\sqrt{-1}\times\sqrt{c}\sqrt{-1} = \sqrt{a}\sqrt{c}\times\sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{ac}\times(\sqrt{-1})^2$. Ora nel riflettere sul valore di questa espressione $(\sqrt{-1})^2$, che tradotta in parole dice « *Si vuò il quadrato di quella quantità il cui quadrato è* -1 » (588) noi ci accorgiamo che nel tempo stesso che è impossibile che possa moltiplicarsi una quantità assurda per se medesima, questa sua assurdità nasce poi dalla ipotesi 'appunto che la quantità a moltiplicarsi per sè dia -1, sicchè il concetto della

sua stessa impossibilità esige che il suo quadrato sia la quantità reale, e negativa -1. Dunque non per l'*esecuzione di una moltiplicazione effettiva* fatta a tenor delle regole algebriche, la quale non può aver luogo, ma sol per l' *ipotesi* voluta dalle condizioni assurde de' problemi che nel processo dei calcoli fanno nascere il simbolo $\sqrt{-1}$, noi abbiamo $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=-1$; ed ecco a parer nostro il giusto riflesso che scioglie il nodo della suddetta quistione tanto fra i matematici agitata. E' -1 il real quadrato d' una quantità, che appunto è impossibile perchè vogliamo che alzata a quadrato dia -1. Solo dunque il quadrato d' un immaginario è tra i prodotti degli immaginarii una quantità reale, e non lo è già per *processo di calcolo* ma per *mera supposizione* voluta dal significato dello stesso simbolo $\sqrt{-1}$. Quindi ogni altra moltiplicazione di immaginarii tra loro è a rigore vuota di senso; ma poichè *ogni prodotto di immaginarii* $\sqrt{-a}\times\sqrt{-c}$ *riducesi ad un radicale reale moltiplicato per* $(\sqrt{-1})^2 = -1$, ecco sotto qual' unico aspetto può concepirsi che una moltiplicazione di immaginarii ci rechi ad un risultato reale, quale è l' ultimo della seguente espressione

$$\sqrt{-a}\times\sqrt{-c}=\sqrt{a}\sqrt{-1}\times\sqrt{c}\sqrt{-1}=\sqrt{ac}\times(\sqrt{-1})^2$$
$$=\sqrt{ac}\times-1=-\sqrt{ac}.$$

Ed ecco pure il principio, su cui si è stabilita la regola prattica che « *Si ottiene il prodotto di due immaginarii collo scrivere il prodotto dei soli fattori reali col segno cambiato.* » Così

$$a\sqrt{-1}\times c\sqrt{-1}=-ac;\ \text{e}\ a\sqrt{-1}\times -c\sqrt{-1}=ac;$$
$$\sqrt{a}\sqrt{-1}\times a\sqrt{-1}=-a\sqrt{a};$$
$$\sqrt{a}\sqrt{-1}\times-\sqrt{a}\sqrt{-1}=\sqrt{a^2}=a.$$

716. Dalla prima delle seguenti formole, che ab-

biam veduto doversi ammettere non per risultato di calcolo, ma per ipotesi voluta dallo stesso significato di $\sqrt{-1}$ scendono pure nel modo che qui dimostriamo tutte le altre.

1.° $(\sqrt{-1})^2 = -1$

2.° $(\sqrt{-1})^3 = (\sqrt{-1})^2\sqrt{-1} = -1\sqrt{-1} = -\sqrt{-1}$

3.° $(\sqrt{-1})^4 = (\sqrt{-1})^3\sqrt{-1} = -\sqrt{-1}\sqrt{-1} = +1$

4.° $(\sqrt{-1})^5 = (\sqrt{-1})^4\sqrt{-1} = +1\sqrt{-1} = +\sqrt{-1}$

5.° $(\sqrt{-1})^6 = (\sqrt{-1})^5\sqrt{-1} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$

e queste formole ci manifestano che tutte le potenze pari dell' immaginario $\sqrt{-1}$ sono reali, ed immaginarie le dispari, e tra le reali son positive quelle la metà del cui esponente è numero pari, e negative le altre; e tra le immaginarie, positive son quelle delle quali è numero pari la metà dell' esponente diminuito di uno, e negative le altre.

717. La moltiplicazione delle quantità complesse ove esistono immaginarii non esige che una semplice applicazione delle regole stabilite. Così p. e. trovasi $(1+\sqrt{-1})^2 = 2\sqrt{-1}$; $(1+\sqrt{-1})(1-\sqrt{-1}) = 2$; $(a \pm a\sqrt{3}\sqrt{-1})^3 = a^3 \pm 3a^3\sqrt{3}\sqrt{-1} - 9a^3 \mp 3a^3\sqrt{3}\sqrt{-1}$ (623) $= a^3 - 9a^3 = -8a^3$; e in questo esempio fatto $a = -{}^1/_2$ abbiamo $(-{}^1/_2 \mp {}^1/_2\sqrt{3}\sqrt{-1})^3 = -{}^1/_8 + {}^9/_8 = 1$. Or questo caso particolare ci reca ad un risultato interessante, poichè avendosi per esso $(-{}^1/_2 \mp {}^1/_2\sqrt{3}\sqrt{-1})^3 = 1$, estraendo la radice terza da ambi i membri si avrà $-{}^1/_2 \mp {}^1/_2\sqrt{3}\sqrt{-1} = \sqrt[3]{1}$, o più concisamente $\frac{-1 \mp \sqrt{-3}}{2} = \sqrt[3]{1}$, formola la quale ci mostra che 1 può riguardarsi anche come prodotto dalla elevazione al cubo di un binomio avente un termine immaginario.

718. Nella divisione poi 1.° o è immaginario il solo dividendo, e non ha luogo rimarco alcuno, essendo ben chiaro che $ac\sqrt{-1} : c = a\sqrt{-1}$; 2.° o è immaginario il sol divisore, e allora per dare al quoto quando si può la forma di intero fa d' uopo moltiplicare il dividendo, e il divisore per $\sqrt{-1}$. Così otteniamo $\frac{ac}{a\sqrt{-1}} = \frac{c}{\sqrt{-1}} = \frac{c\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}\sqrt{-1}} = \frac{c\sqrt{-1}}{-1} = -c\sqrt{-1}$; 3.° o sono immaginarii ambi i termini della divisione, e in tal caso convien marcare, che dal generalissimo concetto che una quantità qualunque, e anche il nulla (se col vestirlo di qualche segno ce lo figuriamo come cosa) è contenuto una volta in sè, scende il risultato $\sqrt{-1} : \sqrt{-1} = 1$, come pur scende dal riflesso che

$$\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}} = \frac{-1}{-1} = 1 \text{ (§. 237)},$$

e dopo tale notizia siccome ogni immaginario riduccsi alla forma di $\sqrt{a}\sqrt{-1}$, se avremo p. e. $\sqrt{-cm} : \sqrt{-ac}$, noi otterremo

$$\frac{\sqrt{-cm}}{\sqrt{-ac}} = \frac{\sqrt{cm}\sqrt{-1}}{\sqrt{ac}\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{a}} \text{; come pure}$$

$$\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}} = \frac{(1+\sqrt{-1})\ (1+\sqrt{-1})}{(1-\sqrt{-1})\ (1+\sqrt{-1})} \text{ (§. 275)} = \frac{2\sqrt{-1}}{2}$$

$$\text{(§. 717)} = \sqrt{-1}.$$

719. Una conseguenza importante, che si trae dal calcolo degli immaginarii è l' osservazione che 1 considerato come potenza ha tante radici, quante ha unità il di lei grado. Ed auto riflesso che il doppio segno esprime due valori distinti e che dal doppio segno son sempre affette le radici pari, le seguenti formole ce lo addimostrano pelle prime 4 potenze. Infatti

$\sqrt[1]{1} = +1$

$\sqrt[2]{1} = \pm 1$ (§. 603)

$\sqrt[3]{1} = +1$; ovvero $\sqrt[3]{1} = \frac{-1 \mp \sqrt{-3}}{2}$, (717)

$\sqrt[4]{1} = \pm 1$, ovvero $\sqrt[4]{1} = \pm \sqrt{-1}$ (§. 716 3.°)

Convien però avvertire, che i diversi valori immaginarii di 1 sono *determinazioni puramente algebriche*, che nascono dalle combinazioni de' segni le quali altro non ci additano se non che « *le immaginarie prese o nel loro, o nell' opposto modo di essere (se maniera di essere avessero) a tenor delle indicazioni del calcolo dalla lor formola espresse, e in grazia della massima, che* $(\sqrt{-1})^2 = -1$ *darebbero l' unità per risultato*.

CAPO X.

Teoria de' Problemi, ed equazioni di 2.° grado a un' incognita.

720. Equazioni, e Problemi di 2.° grado son quelli che o nel rapporto fondamentale di eguaglianza, o in qualunque altro che ne derivi dopo aver liberato l' incognita dallo stato di denominatore, e dal segno radicale hanno in qualche termine due fattori ignoti, e non più (491). Perciò sebbene le 2 equazioni

I. $x + {}^c/_x = a$, e II. $x + \sqrt{x} = m$

sembrin di 1.° pur sono di 2.° grado, poichè per togliere la x dallo stato di denominatore nella I^a, e dal segno radicale nella II^a si convertono in

I. $x^2 + c = ax$, e II. $x = m^2 - 2mx + x^2$

la I^a per aver moltiplicato per x ambo i membri (497)

la II^a per averli elevati alla 2^a potenza dopo di avere isolato il radicale nel 1.° membro, in grazia dell' altro assioma cui ricorresi nelle equazioni di 2.° grado, che è il seguente.

721. *Le potenze di radici eguali, come le radici di potenze eguali esser deggiono eguali* »

722. Tutte le equazioni poi le quali dopo che la x si è tolta dai denominatori, e dai segni radicali se mai n' era affetta, ci si offrono di 2.° grado a un incognita, per quanto sieno complicate, altri termini contener non possono che quantità note, quantità note moltiplicate per x, e quantità note moltiplicate per x^2 dalle quali la x^2 può liberarsi colle regole date al §. 498; e perciò convertite in un' assieme di termini equivalenti a zero, possono esprimersi per questa concisa formola generale $x^2 + Cx + A = 0$ in cui $+C$, e $+A$ son quantità note irrazionali o razionali, monomie o polinomie, intere, o fratte, positive o negative, sicchè dalla risoluzione di questa formola dipende la risoluzione di tutte le equazioni di 2.° grado.

Ed infatti se si avesse l' equazione

$$a/x + c/m - r/m = m/(r-x)$$

conviene in 1.° luogo liberere la x dallo stato di denominatore, e poichè la x in qualche denominatore è unita ad altre quantità, non può in tal caso ottenersi l' intento che col moltiplicare ambi i membri pel prodotto di tutti i denominatori contenenti la x, cioè nel caso nostro per $rx - x^2$, sicchè avremo

$$ar - ax + crx/m - cxx/m - rrx/m + rxx/m = mx,$$

e tutto trasportando nel 1.° membro, e raccogliendo come in un sol termine prima la quantità moltiplicata per x^2, poi tutte quelle moltiplicate per x, poi quelle che non sono affette da incognita otteniamo

$$({}^{r}/_{m}-{}^{c}/_{m})\,x^2+({}^{cr}/_{m}-{}^{rr}/_{m}-a-m)\,x+ar=0,$$

e dividendo ambi i membri pel coefficiente di x^2 si ha

$$x^2+\frac{cr-r^2-am-m^2}{r-c}\,x+\frac{amr}{r-c}=0$$

equazione che è la stessa formola generale

$$x^2+Cx+A=0$$

quando $C=\dfrac{cr-r^2-am-m^2}{r-c}$, e $A=\dfrac{amr}{r-c}$

ARTICOLO I.

Risoluzione generale delle equazioni di 2.° grado a un incognita.

Potendo esser ciò che si vuole le quantità A, e C della formola $x^2+cx+A=0$, tre casi meritano di esser distinti I. Quando $A=0$; II. Quando $C=0$; III. Quando entrambi hanno qualche valore.

723. 1.° *Caso* Quando $A=0$ la formola diventa $x^2+Cx=0$, ovvero $x(x+C)=0$. Or se ambi i membri di questa equazione si dividano per $x+C$, si ottiene $x=0$: se in vece si dividono per x, si ottiene $x+C=0$ donde $x=-C$, e sì l' un che l' altro di questi due valori di x soddisfano all' equazione $x^2+Cx=0$.

Questa equazione di 2.° grado *incompleta*, siccome mancante del termine A dicesi poi *mista*, poichè partecipa ancora della natura di quelle di 1.° grado a cui riducesi dividendola per x, ed essendo la sua risoluzione $x=-C$, poichè a nulla monta l' altro valore zero, dir possiamo che *nelle equazioni di 2.° grado incomplete e miste il valor dell' incognita* è *il valor*

del coefficiente di x preso col segno opposto. Eccone l'applicazione a un Problema.

724. ***Il numero delle lire prezzo d' un opera è 2 terzi del numero delle copie che un librajo ha vendute, ed è uguale al numero delle lire ritratte dalla vendita totale diminuito del numero esprimente il doppio sì delle copie vendute, che del loro prezzo. Quante copie ha esitate, ed a che prezzo?*** **Risultato: Copie N. 6 a Lire 4.**

Copie N.° x. Prezzo di ciascuna Lire N.° $^2/_3\,x$
Dunque $^2/_3\,x = {^2/_3}\,x \times x - 2\,(^2/_3\,x + x)$,
donde $x^2 = 6x$; e $x^2 - 6x = 0$
e quindi $x = +6$ (§. 723), donde $^2/_3\,x = 4$.

725. 2.° *Caso*. Qnando $C=0$, la formola $x^2+Cx+A=0$ diventa $x^2+A=0$, donde $x^2=-A$ e quindi $x = \pm\sqrt{-A}$, dal che risulta che la risoluzione dell' equazione dipende da una semplice estrazione di radice quadrata, che ha perciò due valori (603), ossia ***l' incognita è uguale alla radice positiva, o negativa della quantità nota considerata in senso opposto a quello in cui esiste nell' equazion fondamentale.*** E questa equazione di 2.° grado *incompleta* per la mancanza del termine Cx dicesi *pura* perchè risolvesi con una pura estrazione di radici.

E qui rilevisi che l' espressione generica $\pm\sqrt{-A}$ per sè non è nè immaginaria come talun potria credere nè reale, poichè il $-A$ esprime quantità, che non è nè negativa nè positiva ma solo in istato opposto a quello che ha nell' equazion fondamentale; però ne' casi particolari è una quantità immaginaria, se il $+A$ è realmente una quantità positiva, poichè allora $\sqrt{-A}$ significa la radice d' una quantità negativa (602): all' opposto è una quantità reale se il $+A$ è una quantità negativa. Ed eccone l' applicazione a un Problema.

726. *Sopraggiunta una retroguardia di 144 soldati in una piazza ove gia ne sono schierati altri in tante file quanti sono gli individui di ognuna, il Comandante colla riunione dei sopravvenuti converte il primo quadrato in altro, ciascuna fila del quale è composta d' uomini 15. Di quanti individui costava ogni fila del primo quadrato?* Risultato: di 9. Infatti chiamata x la fila del primo quadrato, essendo 15 la fila del secondo, esso quadrato è 15·15, cioè 225, e perciò

$x^2+144=225$, donde $x^2=225-144=81$ e $x=\sqrt{81}=9$.

727. *Se in vece si cerchi di quanti soldati esser debbe costituita ciascuna fila d' un corpo disposto a quadrato, e tale che in unione di altri 225 individui passi a formare altro quadrato da nove individui per fila, ognun vede l' assurdità del quesito, impossibile essendo che un numero d' uomini qualunque coll' aggiunta d' altri 225 far possa un quadrato composto di sole nove file da nove individui; mentre i soli 225 uomini formano 15 file da 15 l' una. E quest' assurdo è annunziato dalla soluzione dell' equazione, poichè le condizioni ci danno.*

$$x^2+225=81, \text{ donde } x=\sqrt{-144}$$

risultato immaginario.

728. 3.° *Caso* Quando C, ed A hanno entrambi valore, ossia quando l' equazione è *completa*, perchè rappresentata dall' intera formola $x^2+Cx+A=0$. E in tal caso, poichè scopo dell' operazione è l' ottener x sola nel primo membro eguale a quantità tutte note, cominciamo dal trasportar A nel 2.°, ed avremo $x^2+Cx=-A$. E qui notiamo che a semplicizzar maggiormente il 1.° membro non giova l' estrarre la radice dal $-A$, poichè se con questo mezzo nelle *pure equazioni di 2.° grado* otteniamo il cercato valore di x (724), nel nostro caso si ottiene $\sqrt{(x^2+Cx)}=\sqrt{-A}$, nel cui primo membro troviamo sotto il segno radicale una quantità binomia, che sappiamo non esser suscettibile di estrazione di radice (650), sicchè resta così chiuso ogni adito al desiderato valore di x. Ben altri-

menti andrebbe però la cosa, se il 1.° membro fosse un trinomio perfetto quadrato di un binomio che avesse x per uno de' suoi termini; ed è perciò che a convertire il primo membro in quadrato di un binomio di cui x sia il 1.° termine deggiono rivolgersi le nostre mire; e poichè x^2 è il quadrato del 1.° termine, e Cx può riguardarsi pel doppio prodotto del 1.° nel 2.° termine (il quale trovasi essere $\frac{1}{2}C$ ricavandolo dallo stesso Cx col dividere Cx pel doppio del 1.° termine, cioè per $2x$ (651), non resta dunque per compiere il quadrato del binomio $x+\frac{1}{2}C$, che aggiungere al 1.° membro il quadrato del 2.° termine cioè $\frac{1}{4}C^2$ (617), e perchè poi il 1.° membro divenuto quadrato del binomio $x+\frac{1}{2}C$ prosegua ad eguagliare il 2.°, fa d' uopo che anche al 2.° venga aggiunta la medesima quantità $\frac{1}{4}C^2$, sicchè avremo $x^2+Cx+\frac{1}{4}C^2=-A+\frac{1}{4}C^2$ e perciò fuor traendo la radice quadrata dal 1.°, e indicando quella del 2.° membro, avremo

$$x+\frac{1}{2}C=\pm\sqrt{(-A+\frac{1}{4}C^2)}$$ e quindi $$x=-\frac{1}{2}C\pm\sqrt{(-A+\frac{1}{4}C^2)}$$

onde ecco qui espressa la formola generale delle equazioni di 2.° grado a un incognita colla sua risoluzione.

Equazione fondamentale	*Equazione finale*
$x^2+Cx+A=0$	$x=-\frac{1}{2}C\pm\sqrt{(-A+\frac{1}{4}C^2)}$

E dal confronto dell' una coll' altra deducesi *che nella equazione di 2.° grado completa e ordinata l' incognita è eguale alla metà del coefficiente del 2.° termine preso col segno opposto, più o meno la radice quadrata della somma del quadrato della stessa metà del coefficiente più la quantità tutta nota presa pur essa col segno opposto*. E sostituendo sì l' un che l' altro de' due valori di x, che ci dà l' equa-

zione finale nella fondamentale otteniamo l' identità $0=0$ in conferma che i trovati valori di x soddisfano alla proposta equazion generale.

Un accurata analisi dell' equazione finale portandoci a far dei rilievi sul $-A$, ci fa conoscere se i valori di x sono immaginarii, o reali, e quando sono reali con opportuni rilievi sul $-\frac{1}{2}C$, ci reca a scuoprire se i valori di x sono positivi, o negativi.

729. Infatti I. $-A$ può esser positiva, o negativa (177). Se è positiva ambi i valori di x sono reali; se è negativa può darsi che si abbia.

1.° $A<\frac{1}{4}C^2$, o 2.° $A=\frac{1}{4}C^2$, o 3.° $A>\frac{1}{4}C^2$; ed è chiaro che la quantità sotto il segno radicale nel 1.° caso è positiva, e perciò *reali* i valori di x: nel 2.° caso svanisce, e i valori di x oltre ad esser reali riduconsi ad un solo, poichè il $-\frac{1}{2}C$ rimane lo stesso o gli si aggiunga o gli si tolga un' assieme di quantità eguali a zero: nel 3.° la quantità sotto il segno è negativa e perciò *immaginarii* i valori di x (602); sicchè *in una equazione* di 2.° grado completa e ordinata le radici saranno sempre *reali finchè la quantità nota A è negativa nell' equazione proposta, o essendo positiva non supererà il quadrato della metà del coefficiente del* 2.° *termine*.

730. II. Quando i valori sono reali dobbiamo allora occuparci del loro stato, e per conoscere qual sia riflettiamo che rapporto ad $\frac{1}{2}C$ possono darsi questi 3 casi, cioè che

1.° $\frac{1}{2}C>\sqrt{(-A+\frac{1}{4}C^2)}$; 2.° $\frac{1}{2}C=\sqrt{(-A+\frac{1}{4}C^2)}$;
3.° $\frac{1}{2}C<\sqrt{(-A+\frac{1}{4}C^2)}$

Ora nel 1.° caso ambi i valori di x o son positivi, o negativi secondo che il $-\frac{1}{2}C$ è positivo o negativo.

Nel 2.° caso che ha sol luogo quando $A=0$ (poichè se debbe esser $\frac{1}{2}C=\sqrt{(A+\frac{1}{4}C^2)}$ dee pur esser $\frac{1}{4}C^2 =A+\frac{1}{4}C^2$ (721), il che non può verificarsi se A non è zero), l' equazione finale per la deficienza di A diventa $x=-\frac{1}{2}C\pm\sqrt{\frac{1}{4}C^2}=-\frac{1}{2}C\pm\frac{1}{2}C$ donde o si ha $x=0$, ovvero $x=-C$ risultati identici a quelli ottenuti al §. 723, appunto perchè l' addottata ipotesi converte l' equazione *completa* di 2.° grado nell' *incompleta mista*; ed il valore reale di x è positivo o negativo secondo che positivo o negativo è il $-\frac{1}{2}C$. Nel 3.° caso, sia positivo o negativo il valore di $-\frac{1}{2}C$, l'uno de' valori di x è positivo, e negativo è l' altro; e vi son de' problemi che posson riferirsi a tutti i varii casi annoverati, come ora vedremo.

ARTICOLO II.

Applicazione ai Problemi della risoluzione generale delle equazioni di 2.° grado a un incognita.

Possono darsi Problemi in cui la incognita x abbia o due valori o un solo, o nessuno.

I. ***Problemi in cui la x ha due valori positivi ambi conciliabili colle condizioni.***

731. *Un Agricoltore dopo di aver fatta in vasta pianura una piantagione a quadrato di tante file di alberi quanti ve ne sono in ciascuna, non potendo più estendersi in largo pianta altri 1500 alberi convertendo il quadrato in un rettangolo composto di 80 file tutte eguali. Di quanti alberi risulta ogni fila?* Risultato: o di 50, o di 30.

Infatti chiamato x questo numero, si ha $x^2+1500=80x$, donde (§. 728) $x=40\pm\sqrt{(-500+1600)}$,

ossia $x=50$, ovvero $x=30$, valori che soddisfano entrambi non solo alle *condizioni astratte* dell' equazione, ma alle *concrete* ancor del problema.

II. *Problemi in cui la x ha due valori l' un positivo, e l'altro negativo ambi conciliabili colle condizioni.*

732. *Come si trovan due numeri x, y di cui sia data la differenza d, e il prodotto p?*

Abbiam dai dati I. $x-y=d$ donde $y=x-d$, come pure II. $xy=p$, ovvero sostituendo ad y il suo valore, $x(x-d)=p$, ovvero $x^2-dx=p$, donde

$$x = \tfrac{1}{2}d \pm \sqrt{(p+\tfrac{1}{4}d^2)}.$$

Sostituito questo valore di x nell' equazione $y=x-d$, essa diverrà

$$y=-\tfrac{1}{2}d \pm \sqrt{(p+\tfrac{1}{4}d^2)}.$$

Osservando le due formole esprimenti i valori di x, e y, facilmente rilevasi che ambi i valori di x sono diversi da quelli di y; e perciò il problema è capace di 2 soluzioni diverse: ed infatti due numeri differiscono essenzialmente tra loro, e danno la stesso prodotto o si prendano positivamente, o negativamente.

Si cercan due numeri la cui differenza è 150, *e* 10000 *il prodotto*. Risultato: I. x è 200, y è 50; ovvero II. x è -50, y è -200.

Si cercan due numeri la cui differenza è 2, *e il prodotto è* 14. Risultato:

$$x=1\pm\sqrt{15},\quad y=-1\pm\sqrt{15}.$$

Infatti questi valori irrazionali sostituiti ad x, e y nelle due equazioni fondamentali le convertono in identità.

733. Ecco un problema analogo a quello del §.528 in cui è dato ciò che in quello era noto, e si cerca ciò che in quello era dato.

Un serbatojo pieno di gas da illuminazione si è vuotato in 6 ore per aver somministrato simultaneamente il gas a 3 termolampade pei 3 Orificii A, B, C. Sapendosi che per B solo il gas esce nei 3 quarti *del tempo che impiegherebbe a sortir per* A, *e per* C *soltanto esce in un tempo, che supera di 5 ore quello impiegato per* B, *si cerca quanto tempo ogni termolampada ardendo sola impiegherebbe per consumarlo tutto, supposta la stessa in tutti i casi la velocità degli efflussi.*

Chiamato 1 il volume di tutto il gas, ed x il numero delle ore che impiega il gas a sortire per A, sarà $\frac{3}{4}x$ il numero delle ore che impiega onde escire per B, e $\frac{3}{4}x+5$ il numero delle ore che impiega per C. Dunque il gas consumato in un' ora da tutte e 3 le termolampade sarà $\frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{3}{4}x}+\frac{1}{\frac{3}{4}x+5}$, e quindi il sestuplo di questa quantità esprimerà il gas consumato in 6 ore, che si sa esser eguale al totale 1. Dunque.

$$6\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{3}{4}x}+\frac{1}{\frac{3}{4}x+5}\right)=1, \text{ ovvero}$$

$$6\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{3x}+\frac{4}{3x+20}\right)=1, \text{ o } 6\left(\frac{7}{3x}+\frac{4}{3x+20}\right)=1,$$

o moltiplicando ambi i membri pel prodotto dei denominatori

$$6(21x+140+12x)=9x^2+60x,$$

donde $x^2-\frac{46}{3}x-\frac{280}{3}=0$, e $x=\frac{23}{3}\pm\frac{37}{3}$,

cioè $x=\frac{60}{3}=20$, ovvero $x=-\frac{14}{3}=-(4+\frac{2}{3})$

Dunque tutto il gas esce isolatamente

Pell' orificio A in ore $x = 20$, ovvero $=-\frac{14}{3}$

Pell' orificio B in ore $\frac{3}{4}x = 15$, ovvero $=-\frac{7}{2}$

Pell' orificio C in ore $\frac{3}{4}x+5 = 20$, ovvero $= \frac{3}{2}$

734. Or se la soluzione del problema a tenore del primo valore di x è ben chiara, troviamo qualche difficoltà quando ci ap-

pigliamo al secondo. E qui è primieramente a notarsi che nel problema (534) siccome a tenor dell' enunciato ci piacque di considerare tanto il tempo impiegato per empiere che per vuotare il recipiente come indipendente dall' una, e dall' altra particolarità, e perciò indistintamente positivo, così in quella supposizione non potea come dicemmo accordarsi all' espressione negativa del tempo valore alcuno: nell' attual quesito al contrario i risultati stessi della soluzione ci obbligano a considerare ne' tre diversi tempi la particolarità della loro destinazione, poichè il calcolo ce gli offre in due stati opposti uno cioè positivo, e due negativi; e poichè il positivo esprime le ore che deggiono correre affinchè tutto il serbatojo venga *vuotato* del gas che consumasi dalla termolampada C, i negativi dovendo esprimere una maniera d' essere opposta a quella dell' enunciato, indicar deggiono le ore necessarie perchè il serbatojo venga empiuto per A, e per B, che debbon perciò esser apparecchi atti non a vuotare ma ad empiere il serbatojo: quindi è che l'Algebra col secondo valore di x ci offre la soluzione di quest' altro Problema » *Se il pieno serbatojo si vuota in* 6 *ore per somministrare il gas alla termolampada* C, *sebbene nelle stesse sei ore lo riceva continuamente da due sorgenti* A, B, *sapendosi che la* B *sola impiegherebbe tre quarti del tempo che da* A *si esigerebbe per empierlo, e la* C *impiegherebbe per vuotarlo* 5 *ore, meno il tempo che* B *impiega per empirlo* (ossia impiegherebbe, per dirlo algebricamente, 5 ore più il tempo che B impiega per vuotarlo negativamente, e che per essere una quantità negativa non fa che produrre una diminuzione nelle ore 5) *quanto tempo si esige*, perchè il *serbatojo sia empiuto dalla sola sorgente* A, *e dalla sola sorgente* B, *e quanto tempo perchè il serbatojo pieno tutto venga vuotato pel consumo della termolampada* C?

Se prendessimo ora a sciogliere direttamente il Problema a tenore dell' ora esposta enunciazione cui ci ha recato il valor negativo di x, noi avremmo il gas consumato nelle 6 ore dalla sola termolampada C eguale a tutto il gas contenuto nel serbatojo meno quello che è negativamente sortito, ossia più quello che vi è stato introdotto nelle 6 ore dai due orificii A, B, avremmo cioè l' equazione

$$6\,\frac{1}{5-{}^3/_4 x}=1+6\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{{}^3/_4 x}\right)$$

donde $x^2+{}^{46}/_3\,x-{}^{840}/_9=0$; e $x=-{}^{23}/_3\pm{}^{37}/_3$ cioè o $x={}^{14}/_3$, ovvero $x=-20$

di modo che prendendo il valor positivo di x positivi si hanno tutti i valori e perciò analoghi al problema come ora è stato proposto; prendendo poi il valor negativo 20 che esprime il tempo per A, negativo riesce anche il tempo per B, e positivo il tempo per C e quindi modificate a norma de' valori negativi le condizioni del problema quale è stato ora esposto, torna l' enunciazione che si era direttamente data al §. 733.

Ed ecco anche per l' equazioni di secondo grado un' esempio della prevalenza dell' Algebra sulle forze della Numerica nel recarci a soluzioni di nuovi non prima avvertiti problemi, come già notammo al §. 536 per l' equazioni del grado primo.

III. *Problemi in cui la x ha due valori ambi negativi*

735. *Qual' è quel numero la cui seconda potenza aumentata del suo quintuplo più* 6 *è uguale a* 2?

Chiamato x questo numero si avrà

$x^2+5x+6=2$, donde $x=-{}^5/_2 \pm {}^3/_2$,

ossia $x=-1$, $x=-4$.

Ora il segno — da cui sono preceduti i risultati mostra che x debbe avere un valore opposto a quello che gli si è dato nel calcolo, cioè che l' enunciato del problema dee esprimersi così « *Qual' è quel numero dalla cui seconda potenza aumentata di* 6 *sottraendo il suo quintuplo si abbia* 2 *per risultato*? » e risolvendo il problema a tenor di questa enunciazione, positivi risultano ambi i valori di x, che sono 1, e 4.

IV. *Problemi in cui sebbene la x ha due valori conciliabili colle condizioni, pure unica è la soluzione.*

736. Si divida un numero s in due parti x, y il cui prodotto sia p; o ciò che è lo stesso si cerchino due numeri di cui è data la somma s, e il prodotto p

Abbiamo dalle condizioni

I. $x+y=s$, donde $y=s-x$; e II. $xy=p$, ovvero sostituendo ad y il suo valore, $x(s-x)=p$, ovvero $sx-x^2=p$, donde $x={}^1/_2s\pm\sqrt{(-p+{}^1/_4 s^2)}$; e sostituito questo valore di x nella 1ª equazione $y=s-x$, otteniamo

$$y={}^1/_2s\pm\sqrt{(-p+{}^1/_4 s^2)}$$

dalle quali formole rileviamo che sì x che y hanno due valori distinti, ma che i valori di x sono gli stessi di quelli di y presi con ordine inverso, e che perciò il problema non è capace che di un' unica soluzione, cioè non v'è che un sol pajo di numeri che dar possa una data somma, e un dato prodotto, non offrendoci la 2.ª soluzione che un cambiamento d' ordine relativamente alle parti della 1.ª

737. Applicando ad s, e p dei valori numerici si hanno le soluzioni dei diversi casi parrticolari: avvertire però conviene che s, e p non posson esser qualunque ma tali che sia

$$p<{}^1/_4 s^2$$

onde evitare risultati immaginarii (729). Ecco un' applicazione. *Un Possidente ha impiegato* 12 *Rubbia di grano per semente in due predii. Nel* primo *avendo raccolto per ciascun rubbio tante rubbia quante ne seminò nell' altro, ha raccolto* 32 *rubbia. Quante rubbia ha seminate nel* primo e secondo *predio?* Risultato: nel primo 8, e 4 nel secondo.

Infatti posto x il numero delle rubbia seminate nel primo; e y il numero delle rubbia seminate nel secondo; si avrà delle condizioni

$$x+y=12\,,\quad xy=32\,,$$

che è un caso particolare dell' ora esposto.

V. *Problemi in cui la x ha due valori, ma uno affatto inconciliabile colle condizioni.*

738. *Si è istituita una società frà* 20 *negozianti alcuni di Perugia, altri di Roma. I Perugini* improntando *tutti una rata eguale hanno posta in commercio la somma di scudi* 3840, *men-*

tre egual somma per egual porzione è posta in commercio anche dai Negozianti Romani. Ciascun d' essi però per essere in maggior numero ha sborsato una somma minore per 160 scudi di quella messa in commercio di ciascun Perugino. Qual' è il numero degli uni, e degli altri? Risultato: i Perugini son 8, e 12 i Romani.

Infatti posto $20 = a$, $3840 = c$, $160 = r$ si ha Perugini N.° x. Porzione di ciascun Perugino $c/_x$ Romani N.° $a-x$ Porzione di ciascun Romano $c/_{a-x}$, e quindi per le accennate condizioni

$$c/_x - r = c/_{a-x},$$

che colla regola (722) diventa

$$x^2 - (a + {}^{2c}/_r)x + {}^{ac}/_r = 0,$$

donde (728) $x = {}^a/_2 + {}^c/_r \pm \sqrt{(a^2/_4 + c^2/_{r^2})}$ e sostituendo alle lettere i numeri, $x = 10 + 24 \pm \sqrt{(100 + 576)}$, cioè $x = 60$, ovvero $x = 8$.

Or nel nostro caso sebbene sien due i valori di x, cioè 60 ed 8, che soddisfano *alle condizioni astratte dell' equazione*, un solo di essi soddisfa alle *condizioni concrete* del problema, che non può ammettere 60 come parte del numero totale che è 20. Si danno dunque quesiti in cui sebben 2 sieno i valori di x, pur la loro indole non ne può ammettere che un solo.

739 *Quando al termine di un convito il Trattore porta alla comitiva il conto ascendente a lire 450, sono spariti 8 individui. Per questa defezione a ciascun de' rimasti tocca sborsar lire 20 di più. Quanti erano i commensali?* Risultato: N. 18, che nasce dalla risoluzione della seguente equazione

$$450/_x + 20 = 450/_{x-8}$$

740 *Una comitiva in cui eran tre donne ha speso in un viaggio Scudi 72. Due socii non aderendo all' unanime sentimento degli altri di escluder le Donne dal riparto, pagano unicamente per la loro porzione. Restando a carico di tutti gli altri la spesa delle Donne, paga ciascun di questi scudi nove di più. Di quanti individui è composta la comitiva?* Risultato: di 8.

É chiaro infatti che le porzioni sborsate da tutti quelli che pagano ancor per le Donne, e che sono in numero di $x-5$ più le porzioni degli altri 2 son uguali a scudi 72; e perciò

$$(x-5)\ (^{72}/_x + 9) + 2\times{}^{72}/_x = 72,$$

donde $x = {}^5/_2 \pm \sqrt{(24+{}^{25}/_4)}$, ossia $x = 8$, $x = -3$, de' quali valori di x solo il 1.° è conciliabile col Problema.

741. *Immediatamente alla morte di un Padre segue quella di 2 de' suoi figli ai quali avea lasciato in eredità* 6000 *doppie. Per la deficienza di questi due figli a ciascuno dei superstiti toccano* 800 *doppie di più*. Quanti erano i Figli? Risultato: N. 5.

VI. *Problemi in cui la x ha un solo valore*.

742. *Coll' aggiunta di* 144 *individui un quadrato di soldati formato da tante file quanti son gli individui di ciascuna si è convertito in un rettangolo formato da* 24 *file uguali a quelle che costituivano il quadrato*. Di quanti soldati è composta ogni fila? Risultato: di 12.

Infatti chiamato x il numero de' soldati costituenti una fila, il problema traducesi nella seguente equazione

$$x^2+144 = 24x,\ \text{ovvero}\ x^2-24x+144 = 0,$$
$$\text{donde}\ x = 12 \pm \sqrt{(144-144)} = 12.$$

VII. *Problemi in cui ambi i valori di x sono immaginarii*.

743. Si è già avvertito (637) che non possono essere qualunque a capriccio i numeri esprimenti la somma e il prodotto di due quantità che si cercano. Infatti se volessimo dividere il 24 in due parti, che dieno per prodotto 149, eccoci al caso in cui il prodotto p, ossia 149 supera il quadrato della semisomma 12 che è

144. Ed applicando a questo caso in cui

$$\text{I. } x+y = 24 \text{ ; e II } xy = 149$$

le date formole (636), otteniamo

$$x = 12 \pm \sqrt{-5}, \text{ ed } y = 12 \mp \sqrt{-5} \text{ ;}$$

otteniamo cioè valori immaginarii i quali mentre ci mostrano l' assurdità del problema soddisfano poi d' altronde alle condizioni astratte delle 2 equazioni, convertendo la 1^a nell' identità $24 = 24$, e la 2^a nell' identità $149 = 149$.

744. Il problema dimostrato assurdo dalla sua risoluzione potea per tale riconoscersi anche indipendentemente da essa. Infatti chiamata s la somma, e d la differenza di 2 numeri, già sappiamo (154) che il maggior è $\frac{1}{2} s + \frac{1}{2} d$; il minore è $\frac{1}{2} s - \frac{1}{2} d$; e quindi moltiplicandoli abbiamo (233) $(\frac{1}{2} s + \frac{1}{2} d) \times (\frac{1}{2} s - \frac{1}{2} d) = \frac{1}{4} s^2 - \frac{1}{4} d^2$.

Or questa formola analitica col mostrarci che il prodotto qualunque di 2 numeri è uguale al quadrato della lor semisomma meno il quadrato della semidifferenza, ci addimostra che comunque un dato numero o somma s sia divisa in due parti, o vi è differenza fra queste due parti, e il lor prodotto è sempre minore di $\frac{1}{4} s^2$ per quanto è $\frac{1}{4} d^2$, di modoche è tanto più piccolo questo prodotto quanto più grande è d, ossia quanto più differiscono le parti trà loro: o la differenza tra le parti è nulla, ed allora il prodotto è il massimo, poichè in quest' unico caso nulla è la quantità che va sottratta da $\frac{1}{4} s^2$ per aver il prodotto delle 2 parti: ma quando non v' è differenza le parti sono eguali; dunque *per dividere un numero in due parti tali che dieno il maggior prodotto possibile convien bipartirlo*: dunque pretender da 2 fattori un prodotto maggio-

re di quel che nasce dal moltiplicar per se stessa la semisomma loro è un' assurdo : dunque divider 24 in due parti tali che dien per prodotto 149 è impossibile , poichè il maggior prodotto che può aversi è $12 \times 12 = 144$; e giusto è perciò che l'algebra rispondendo nel suo linguaggio alle nostre assurde richieste ci dica (743) che non può esistere ciò che cerchiamo .

745 In queste applicazioni si è dunque osservato che nei problemi di secondo grado la soluzione può essere o *duplice* , o *unica* , o *nulla* .

E' duplice e quando la x ha due valori positivi conciliabili colle precise condizioni del quesito (I. §. 731.) ; e quando la x ha due valori un positivo , ed uno negativo , l' ultimo de' quali esige una modificazione nelle condizioni (II. §. 732 e seg.) ; e quando la x ha due valori negativi, ciascun de'quali esige un cambiamento nell' indole del quesito (III §. 735) .

E' unica e quando sebben due sieno i reali valori di x conciliabili colle condizioni , pure per l' esistenza d' un altra incognita y , i valori della seconda soluzione non sono che quelli della prima posposti (IV. §. 736) ; e quando de' due valori di x uno è affatto inconciliabile coll' indole del Problema (V. §. 738) ; e quando realmente la x ha un solo valore (VI. §.742) .

E' nulla quando sono immaginarii i 2 valori di x (VII. §. 743) .

ARTICOLO III.

Delle equazioni di più alti gradi che si risolvono come quelle di 2°

646. A tal classe appartengono tutte quelle , che dell' incognita non contengono che due sole potenze doppia l' una dell' altra , e che possono perciò rappresentarsi per

$$x^{2m} + Cx^m + A = 0$$

CAPO XI.

Logaritmi, e principali loro applicazioni.

ARTICOLO I.

Idea de' Logaritmi, e loro tavole.

748. Non si è fin quì sciolto quesito alcuno che ci offrisse incognita nei suoi esponenti, ed è perciò di nuovo conio la così detta equazione esponenziale $a^x = y$ in cui supponendo incognita la sola x, modo non troviamo da esprimere il suo valore per mezzo di alcuna formola di y, ossia come dicesi dai matematici per mezzo di alcuna *funzione esplicita* di y, poichè con niuna delle note algebriche operazioni ci è dato di isolare la x. Veggiamo però che dato ad a un valore fisso diverso da 1 (poichè quando $a = 1$ qualunque sia il valore di x si ha sempre $y = a$ (§. 584)) y acquista diversi valori coi successivi cambiamenti che si facciano subire ad x, cosicchè riguardata, e chiamata a per *costante*, e x, y per *variabili*, nell' equazione $a^x = y$ notiamo che gli elementi di una *quantità esponenziale* a^x eguale ad y sono un' *esponente* x *variabile*, e la *quantità costante* a che da quell' esponente è affetta, ed ambi questi elementi han ricevuto un nome distinto: l' esponente x è stato chiamato il *logaritmo* della quantità esponenziale variabile a^x eguale ad y, ossia il *logaritmo* di y : la quantità costante a affetta dall' esponente variabile si è chiamata la *base* del logaritmo x ; e poichè non può la x esprimersi per alcuna formola, o funzione di y, siamo obbligati per riferirla ad y far uso dell' iniziale della parola logaritmo sicchè in forza

delle stabilite denominazioni dalla esponenziale $a^x = y$ deriva la così detta equazione logaritmica $x = Ly$.

749. Se diamo alla base un qualche valore diverso dall' unità, p. e. 10, elevando il 10 alle successive potenze qui sotto espresse

10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6,

noi otteniamo i rispettivi numeri decadici seguenti

1, 10, 100, 1000, 1000, 100000, 1000000

de' quali numeri i rispettivi logaritmi sono

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

Ond' è che per ogni valore de' successivi termini della serie de' numeri naturali che diamo ad x, otteniamo un distinto valore per y, e ci avveggiamo che essendo $0 = L1$, $1 = L10$, $2 = L100$, $3 = L1000$, ec., il valore de' logaritmi va crescendo con quello dei rispettivi lor numeri; ed è un *numero intero per tutte le successive esatte potenze della base* 10.

750. Ma se oltre i logaritmi di 10, di 100, di 1000 cerchiamo anche i logaritmi de' numeri intermedj che non sono potenze esatte di 10, dall' esposto specchio rileviamo che i logaritmi de' numeri compresi fra 1, e 10 sono maggiori di zero, e minori di 1: i logaritmi de' numeri fra 10, e 100 son maggiori di 1, e minori di 2: i logaritmi de' numeri fra 100, e 1000 son maggiori di 2, e minori di 3 ec.; il che è quanto dire che i *logaritmi de' numeri naturali non esatte potenze della base non possono essere numeri interi*: ma questi nemmeno esser possono frazionarii perchè non essendo il logaritmo di un numero y che l' esponente cui va elevata la base 10 onde formi y, qualunque sia l' esponente frazionario cui venga elevato il 10, non può

mai modificare il 10 in modo da renderlo eguale ad y sicchè possa dirsi che il suo esponente è il logaritmo di y; poichè quantità affette da esponenti frazionarii sono incommensurabili (686): dunque i *logaritmi de' numeri interi, che non sono potenze esatte della base non sono numeri nè interi, nè fratti*, son però quantità, perchè comprese fra certi limiti, e perciò ci offrono (oltre le radici de' numeri non perfette potenze) un' altro esempio di quantità incommensurabili, cui possiamo quanto più ne aggrada avvicinarci, come la seguente applicazion ci addimostra.

751 Se p. e. la x che cerchiamo è il logaritmo di 2, tale è il valore che procurar dobbiamo di dare ad x, che se non esattamente, il che si è or provato impossibile, si abbia prossimamente $10^x = 2$. Or poichè i numeri maggiori hanno logaritmi maggiori, e minori i minori, il logaritmo di 2 debbe esser compreso tra zero ed uno come si è veduto al §. 749. Fra questi limiti esaminiamo or quali sieno le vere frazioni che più vi si approssimino. Facile è l' esplorare se x debba esser maggiore o minore p. e. di $^1/_2$. Infatti se x fosse $^1/_2$, dovrebbe aversi $10^{\frac{1}{2}} = 2$, e quindi $(10^{\frac{1}{2}})^2 = 2^2$ (721). Ma ciò è ben lungi dall' esser vero, perchè il quadrato di $10^{\frac{1}{2}}$, ossia 10 è ben maggior del quadrato, di 2, cioè di 4: dunque anche $10^{\frac{1}{2}} > 2$: dunque debbe x esser minore di $^1/_2$ onde sia $10^x = 2$. Esploriamo perciò $^1/_3$; e nel modo stesso ci accorgeremo, che x debbe esser minore ancora di $^1/_3$, poichè il cubo di $10^{\frac{1}{3}}$ è 10, che è maggiore di 8 cubo di 2. Provando se x

possa esser $^1/_4$, veggiamo che $^1/_4$ saria per x un valor troppo piccolo, poichè la quarta potenza di $10^{\frac{1}{4}}$ essendo 10, è minore della quarta potenza di 2, che è 16. Dunque x, ovvero L2 $< ^1/_3$ e $> ^1/_4$, ossia L2 $< ^4/_{12}$, e $> ^3/_{12}$. Or potremmo al vero sempre più avvicinarci facendo dei tentativi con qualche altra frazione più piccola di $^1/_3$ e maggior di $^1/_4$, p. e. con $^2/_7$: così veggendo che la settima potenza di $10^{\frac{2}{7}}$ è $\left(10^{\frac{2}{7}}\right)^7=10^2=$ 100, mentre la settima potenza di 2 è 128, deduciamo che L2 $> ^2/_7$ e $< ^1/_3$; è così a piacimento potremmo, sempre più ristringendo i limiti tra i quali trovasi compreso il valore di x ossia di L2, giungere finalmente a sì esili differenze fra i due sempre più riavvicinati confini da poterle sprezzare prendendo un dei due numeri prossimi per L2.

752. Come partendo dal dato che tra zero ed 1 è compreso il L2, ci siamo per via di tentativi avvicinati al suo valore irrazionale, così egualmente tentando potremmo avvicinarci quanto più piaccia al vero valore de' logaritmi di 3, 4, ec., di tutti cioè i numeri naturali che non sono decadici, che non sono cioè esatte potenze di 10; e ciò si è già praticato per tutti i numeri compresi tra 1, e il centomila con metodi però diversi dall' ora esposto, il quale si è tracciato sol per dare un semplice cenno della possibilità della cosa e sol colla mira di far vedere che col variare i valori di x nell' equazione $a^x=y$, può y passare ad esprimere ad uno ad uno tutti i numeri interi possibili.

753 E può y pur passare ad esprimere tutte le diverse possibili unità frazionarie sol che negativi si rendano i logaritmi de' numeri interi, poichè mentre 10^1

$= 10$, $10^2 = 100$, ec., all' opposto $10^{-1} = {}^1/_{10}$, $10^{-2} = {}^1/_{100}$, ec. (613) cioè i logaritmi di ${}^1/_{10}$ di ${}^1/_{100}$ ec. sono gli stessi logaritmi di 10 di 100 ec. presi negativamente .

754. Possono dunque generarsi tutti i numeri interi, e rotti col mezzo delle diverse potenze di un solo, e questa generazione è stata una felicissima idea fertile delle più utili applicazioni . Il numero costante a da cui si fan derivare tutti gli altri coll' elevarlo a diverse potenze chiamasi *base del sistema o delle tavole*. I diversi esponenti delle potenze cui fa d'uopo elevar la base costante a onde ottenere tutti i numeri naturali possibili , diconsi i *Logaritmi* di questi numeri. L' assieme di tutti i Logaritmi de' numeri naturali appartenenti ad una stessa base a chiamasi *sistema Logaritmico* costruito sulla base a ; ed è evidente che tanti sistemi logaritmici possono aversi , quanti i diversi numeri che possiamo sceglier per base , poichè nell' equazione $a^x = y$ variano i logaritmi x degli stessi numeri y a tenore che varia la quantità a ; e vi è in tutti i sistemi questo sol di comune, che *il logaritmo dell' unità è zero , ed* 1 *è il logaritmo della base* , poichè qualunque valore abbia a , è sempre $a^0 = 1$ (242), ed $a^1 = a$ (§. 184, 584) .

755. Il sistema che ha per base 10 è esposto in tavole contenenti in una sinistra colonna i successivi numeri naturali , e in una colonna a destra i rispettivi lor logaritmi , sicchè per mezzo di esse, di qualunque numero y compresovi si cerchi il Logaritmo, ei viene tosto additato, e viceversa . Se il numero è decadico , il logaritmo è un intero (749) . Per tutti gli altri numeri poi i logaritmi sono quantità irrazionali espresse approssima-

tivamente da frazioni (750) ridotte tutte per uniformità, e facilità di calcolo a decimali, frazioni che pei numeri fra 0, e 10 son tutte *proprie*, e sono poi *miste* per tutti gli altri numeri intermedii fra numero; e numero decadico oltre il 10. In queste frazioni poi logaritmiche è a distinguersi la parte a destra della virgola o decimale; da quella che le è a sinistra; e che esprime interi, e che chiamasi la *Caratteristica* del logaritmo, ed è la stessa in tutti i numeri compresi fra un decadico e il decadico immediatamente prossimo, e che accresciuta di 1 indica quante sono le cifre del numero cui il logaritmo appartiene;

756. Laboriosissima è stata la compilazione di queste tavole; e i primi che se ne occuparono vi giunsero per mezzo di lunghissimi, e penosi metodi, che furono in seguito assai semplicizzati dalle formole più brevi e comode suggerite dal completo sviluppo delle teorie logaritmiche, che appartengono all' algebra superiore. Ma quanto improba fu la fatica cui pel loro impianto si sottoposero i più pazienti, ed indefessi calcolatori, altrettanto somma è l' utilità che ne è ridondata all' algebra; ed alla aritmetica. Col soccorso infatti di queste tavole dalla esponenziale $a^x = y$ da cui colle ordinarie regole del calcolo non possiamo estricare la x, deducesi ora il valore dell' equazione logaritmica $x = \mathrm{L}\, y$ necessaria alla soluzione di molti problemi algebrici; e per mezzo di esse si abbreviano come or vedremo in un modo sorprendente le operazioni numeriche, passando dai numeri ai loro logaritmi, e dai logaritmi ai numeri che vi corrispondono.

ARTICOLO II.

Teoremi logaritmici e loro utili applicazioni.

757. Se in uno stesso sistema logaritmico si abbia I. $a^x = y$ donde $x = Ly$; e II. $a^u = z$ donde $u = Lz$, moltiplicando i rispettivi membri della 1ª per quelli della equazione 2ª, otteniamo

$$a^{x+u} = yz \text{ , donde } x+u = Lyz \text{ (§. 748)}$$

Ma $x = Ly$, $u = Lz$; dunque

$$Ly + Lz = Lyz \text{ (Teorema I)},$$

formola che tradotta in parole ci esprime che « *Il logaritmo del prodotto di 2 o più numeri* (perchè la dimostrazione data per 2 val per quanti si voglia) *è uguale alla somma de' logaritmi de' numeri stessi*; ed ecco le conseguenze che ne derivano,

758. I. La difficoltà della compilazione delle tavole si limita ai soli numeri *primi*, poichè i logaritmi de' numeri *prodotti* non sono che la somma de' logaritmi de' loro fattori.

759. II. I Logaritmi de' numeri decupli gli uni degli altri, ossia de' prodotti di un numero qualunque per qualsiasi de' numeri decadici, i cui logaritmi son tutti numeri interi, hanno la stessa parte decimale, e non differiscono che nella sola caratteristica la quale è aumentata di 1, di 2, di 3, ec, se il dato numero si è moltiplicato per 10, o per 100, o per 1000, ec. (749 757), e perciò

$$L\,34 = 1{,}531479$$
$$L\,340 = L(34 \times 10) = L34 + L10 = 2{,}531479$$
$$L\,3400 = L(34 \times 100) = L34 + L100 = 3{,}531479$$

760. III. Il prodotto di 2 numeri può ottenersi per mezzo della semplice addizione de' loro logaritmi pren-

dendo il numero di cui la somma risultante è logaritmo. Così se cercasi il prodotto di 345 per 23, poichè dalle tavole si ha che

L 345 è 2,537819
e L 23 è 1,361728
donde la somma 3,899547

noi veggendo che nelle tavole il numero corrispondente al logaritmo 3,899547 somma dei due logaritmi dati è 7935, conchiudiamo che questo è il chiesto prodotto, poichè

$$L345 + L23 = L\,(345 \times 23) \;(\S.\ 757)$$

761. Dividendo una per l'altra le stesse equazioni esponenziali $a^x = y$, $a^u = z$, avremo

$$a^{x-u} = \frac{y}{z} \text{ donde } x-u = L\frac{y}{z} \;(748),$$

ovvero sostituendo ad x, ed u i loro valori, si ha

$$Ly - Lz = L\frac{y}{z} \;(\text{Teorema II.}),$$

formola che tradotta in parole ci indica « *Che il logaritmo d' una frazione, o del quoto di un numero diviso per un' altro è il logaritmo del dividendo meno quello del divisore*, ed eccone le conseguenze.

762. I. I logaritmi de' numeri suddecupli gli uni degli altri, ossia dei quoti de' numeri divisi per qualche decadico hanno la stessa parte decimale, e non differiscono che nella caratteristica, la quale ha tante unità di meno nel logaritmo del quoto quanti sono gli zeri del divisore decadico per cui un dato numero è stato diviso; poichè di queste sole unità risulta il logaritmo

del divisore decadico, che dee sottrarsi dal logaritmo del dividendo, onde risulti il logaritmo del quoto. Così

$$L\ 154 \ldots\ldots = 2,187521$$
$$L\ 15,4 = L^{154}/_{10} = L154 - L10 = 1,187521$$
$$L1,54 = L^{154}/_{100} = L154 - L100 = 0,187521$$

Dal che rilevasi che *ad ottenere i logaritmi di tutte le frazioni decimali miste ossia maggiori dell' unità, basta prendere il logaritmo del numero espresso da tutte le cifre, fatta astrazione dalla virgola, e quindi togliere tante unità dalla caratteristica di tal logaritmo, quante cifre dopo la virgola, ha la frazione decimale.*

763. II. Il quoto d' un numero diviso per un altro può ottenersi col semplicemente sottrarre il logaritmo del dividendo da quello del divisore, e poi col prender per quoto il numero, che ha per logaritmo l' ottenuto residuo. Così se cercasi il quoto di 7326 diviso per 66, poichè

L 7326 è 3,8648669
e L 66 è 1,8195439
donde la differenza 2,0453230,

veggendo che nelle tavole il numero che ha per logaritmo la trovata differenza è 111, conchiudiamo senza eseguir divisione, che 111 è il quoto.

Una lieve modificazione occorre in que' casi in cui non si ha quoto esatto in interi, poichè per averlo approssimato in decimi, centesimi, ec. ricorrer conviene al logaritmo di un numero dieci, cento, ec. volte maggiore del dividendo. Così se vogliasi il quoto di $^3/_7$ a meno di un decimillesimo, si prende il logaritmo del numero 10 mila volte maggiore di 3 (il che tosto si

ottiene coll' aggiunger 4 alla caratteristica del logaritmo di 3 che è 0,4771213 (759)).

Da questo logaritmo di 30000 che è 4,4771213 si sottrae il logaritmo del divisore 7 che è 0,8450980, ed il residuo 3,6320233 che risulta, esprime il logaritmo del quoto di 30000 diviso per 7, ossia d' una quantità 10 mila volte maggiore di $^3/_7$. Nelle tavole però questo preciso numero non trovasi, ma veggendo esser questo logaritmo compreso fra 3,6319508 logaritmo di 4285, e 3,6327522 logaritmo di 4286, conchiudiamo che prossimamente $4285 = {}^{30000}/_7$; e quindi (dividendo per 10 mila ambi i membri) $0,4285 = {}^3/_7$ a meno di un decimillesimo. E con tal metodo tutte possono le frazioni ordinarie a decimali ridursi.

764. Elevando a potenza ambi i membri dell'equazione esponenziale $a^x = y$ si ha $a^{nx} = y^n$, donde $nx = \mathrm{L}y^n$ (748); e sostituendo ad x il suo valore, si ottiene

$$n\mathrm{L}y = \mathrm{L}y^n \text{ (Teorema III.)},$$

formola che ci enuncia, che *il logaritmo della potenza n di una quantità è il logaritmo della quantità stessa moltiplicato per l' esponente n*.

765. Estraendo all' opposto la radice n da ambi i membri dell' equazione esponenziale $a^x = y$, avremo

$a^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{y}$ donde $^x/_n = \mathrm{L}\sqrt[n]{y}$; e sostituendo ad x il suo valore, si ha

$$\frac{\mathrm{L}y}{n} = \mathrm{L}\sqrt[n]{y} \text{ (Teorema IV)},$$

formola che ci annuncia, che *il logaritmo della radice di un numero è il logaritmo del numero stesso diviso pel grado della radice*.

766. E da questi due ultimi teoremi traggesi un' utile applicazione per la formazione e risoluzione di qualsiasi potenza numerica per mezzo di semplici moltiplicazioni, e divisioni.

Volendo p. e. elevare alla 4ª potenza il 9, avendosi dalle tavole L9=0,9542425, avremo 4L9= $4\times0,9542425$ = 3,8169700; e questo siamo certi essere il $L(9)^4$, poichè sappiamo che 4 L9=$L(9)^4$ (§.764). Preso perciò il 3,8169700 come logaritmo, noi guarderemo nelle tavole qual' è il numero corrispondente, e trovando che 3,8169700 è il logaritmo di 6561, conchiuderemo che 6561 è la quarta potenza di 9.

Così all' opposto volendo la radice quinta di 16807, poichè $L\sqrt[5]{16807} = \frac{L16807}{5}$ (§.765) $= \frac{4,2254902}{5} =$ 0,8450980, così trovando nelle tavole che 7 è il numero che ha per logaritmo il quoto or ottenuto, conchiudiamo che 7 è la radice quinta di 16807.

Così trovasi $\sqrt[14]{15664}=2$, perchè il quoto del logaritmo di 15664, ossia di 4,1949027 diviso per 14 è 0,2996359, che è prossimamente il logaritmo di 2.

E se trattisi di radici di numeri non perfette potenze, si ottengono in decimali collo stesso artificio praticato nella divisione. Così volendo la radice quadrata di 12 in millesimi, si divide per 2 il logaritmo di 12 che è 1,0791812: il quoto 0,5395901 accresciuto di 3 unità nella caratteristica, diventa 3,5395901; e poichè nelle tavole gli si trova corrispondere prossimamente 3464 conchiudiamo che 3,464 è la radice prossima chiesta.

Or quand' anche altro vantaggio non avessero i logaritmi recato che il mezzo di ottenere con sommazioni, e sottrazioni le più tenui i risultati di moltiplicazioni, e divisioni le più compli-

cate, e con brevi moltiplicazioni, e divisioni la formazione e risoluzione delle più elevate potenze, questo solo sarebbe un prezioso vantaggio da renderci gratissima la memoria del celebre Scozzese il Barone di Neper, che della teoria logaritmica fu l' inventore.

CAPO XII.

Teoria delle ragioni proporzioni, e progressioni per differenza, e per quoziente.

ARTICOLO I.

Prime loro nozioni.

767. Spesso negli usi della vita occorre far confronti fra quantità della medesima specie, e se altro risultato non possiamo ottenerne che la loro *eguaglianza* o *diseguaglianza*, possiamo però giungere a tal cognizione in due modi diversi secondo le diverse mire che nei casi concreti ci prefiggiamo, cioè o per mezzo della *sottrazione* considerando se, e di quanto una quantità eccede l' altra, o per mezzo della *divisione* notando quante volte una quantità contiene un' altra. Se un Oriolajo vuò con un filo di platino fare un pendolo eguale ad altro dato, egli osserva di quanto il suo filo supera il pendolo, e siccome la cognizione che risulta da tale confronto è l' *eccesso* o *differenza* dell' uno sull' altro, dicesi perciò *Rapporto*, o *Ragione per differenza*. Se vuò poi conoscere il valore del filo impiegato, sapendo che costa 24 lire il metro, egli osserva quante volte la presa lunghezza è contenuta nel

metro, e poichè la coguizione che da tal confronto risulta è un quoziente, dicesi perciò *Rapporto, o Ragione per quoziente*.

Se confrontando p. e. 6 con 18, notiamo ciò che convenga aggiungere al primo onde eguagli il secondo termine, notiamo cioè l' eccesso del secondo sul primo, la ragione di differenza, il cui intrinseco valore è 12 viene indicata da 6.18: se invece rimarchiamo che il 6 sta 3 volte in 18, allora la *ragione di quoto* il cui intrinseco valore è 3 viene indicata da 6:18, ed entrambi si pronunciano col dire » *sei sta a diciotto* » o semplicemente « *sei a diciotto* ». Dei 2 termini il 1.° dicesi *Antecedente*, e *Conseguente* il 2.°, e corrispondono al *sottraendo*, e *Minuendo* nei rapporti per differenza, e *al divisore*, e *dividendo d' una divisione*, o *al denominatore e numeratore d' una frazione* nei rapporti per quoziente, cosicchè mentre il valore d' un rapporto per differenza è il risultato d' una sottrazione, il valor d' un rapporto per quoziente è identico al risultato d' una divisione, o al valor d'una frazione, sicchè può conchiudersi che

$$a.c = c - a \text{ , ed } a:c = {}^{c}/_{a}$$

768. In tal guisa nelle ragioni per differenza, per minuendo viene precisato il conseguente, e per sottraendo l' antecedente, sicchè il *conseguente non è che l' antecedente più la differenza valore della ragione*, poichè il minuendo non è che il sottraendo più il residuo, o differenza (85), e nelle ragioni per quoziente vien preso per dividendo il conseguente, e l' antecedente per divisore, sicchè *il conseguente non è che l' antecedente moltiplicato pel quoto valore della ragione*, poichè il dividendo non è che il prodotto del

divisore pel quoziente (102). Ora non v' ha dubbio che si potea fare ancora l' opposto : ma una volta che siasi stabilito come abbiamo noi fatto che il conseguente derivi dall' antecedente piuttosto che viceversa, il che resta più comodo pella genesi delle formole generali risguardanti le progressioni, onde evitare equivoci, e confusione, convien sempre attenersi alla stessa maniera di vedere.

769. Così come nella ragione 6·18 diciamo che 18 non è che il 6 antecedente più la differenza 12, così pure nella ragione 18·6 diciamo che 6 non è che l' antecedente 18 più la differenza 12 presa negativamente, è cioè 18—12, è cioè l' antecedente 18 diminuito di 12, sicchè quando il conseguente è minor dell' antecedente la differenza è *sottrattiva*.

770. Così pure come nella ragione 6:18 diciamo che il conseguente 18 non è che il 6 preso quante volte è contenuto in 18, moltiplicato cioè per 3, è cioè 6×3; del pari nelle ragione 18:6 diciamo che il conseguente 6 non è che l' antecedente 18 preso per quanto è contenuto in 6, moltiplicato cioè per $^1/_3$ che è il quoto di 6 diviso per 18, è cioè $18\times{}^1/_3$, sicchè quando il conseguente è minore dell' antecedente, il quoto o valore della ragione è una vera frazione.

771. Due o più ragioni che sotto un diverso aspetto hanno lo stesso valore si dicono eguali. Così 7·3 è uguale a 15·11; e 6:18 è uguale a 4:12 perchè 4 è il valore di ambe le ragioni per differenza, e 3 è il valore di ambe le ragioni per quoziente. Ora il *confronto di due ragioni eguali*, ossia *il rapporto di eguaglianza rimarcato fra due ragioni* è ciò che chiamasi *proporzione* o per differenza, o per quoto a te-

nor della natura delle ragioni, di cui esprime l' eguaglianza. Le due ragioni eguali componenti la proporzione sono separate per mezzo dei segni (.·. , : : , =) il primo de' quali si usa nelle proporzioni per differenza, dette anche *Equidifferenze*, il 2.° per le proporzioni per quoziente dette anche *Equiquozienti*, l' ultimo indifferentemente per entrambe (a).

Così $a \,.\, b = c \,.\, d$ ovvero $b - a = d - c$
$a \,.\, b \;.\!\cdot.\; c \,.\, d$ ovvero $b - a \;.\!\cdot.\; d - c$

esprimono una proporzione per differenza.

Così $a : m = c : n$, ovvero $^m/_a = {}^n/_c$
$a : m :: c : n$, ovvero $^m/_a :: {}^n/_c$

esprimono una proporzione per quoto, e si enunciano entrambe dicendo « *a* è ad *m* come *c* è ad *n* » ovvero « *a*, ed *m stanno tra loro come c* ed *n* » oppure « *a, m, c, n sono proporzionali* » colle quali espressioni altro non significhiamo se non che la ragione di

---

(a) Nella maggior parte de' corsi di Matematica le ragioni, proporzioni, e progressioni per differenza son chiamate *aritmetiche*, e *geometriche* quelle per quoziente. Queste denominazioni sono però viziosissime, perchè mentre non ispiegano l' intrinseca natura delle ragioni, ec., come fanno le da noi addottate espressioni, conducon poi all' errore di credere che la ragione e proporzione e progressione *aritmetica* sia dell' Aritmetica esclusivamente propria, quando che può ben cader in acconcio sulle quantità estese della Geometria; e la così detta *geometrica* appartenga esclusivamente alla Geometria, mentre non è meno aritmetica di quella che porta un tal nome, servendo come vedremo alla soluzione di una infinità di problemi, i cui numeri non hanno che far nulla colle geometriche quantità. Quindi è che dietro l' esempio di un Lagrange che per primo ha rettificato a questo riguardo il linguaggio, ci siamo anche noi fatto lecito di eliminare queste espressioni inesatte sebbene sanzionate dall' uso.

a ad m è uguale a quella di c ad n ; e si è poi convenuto che quando nulla significhiamo di quali ragioni si parli , debbano intendersi quelle di quoziente come le più frequenti a capitare nei calcoli .

772. Il 1.° ed ultimo termine d' una proporzione chiamansi gli *estremi*, il 2.°: e il 3.° diconsi i *medii*.

773. Se poi i medii sono eguali , la proporzione si chiama *continua* . Così continue son le seguenti

Proporzione per differenza		*Proporzione per quoto*
$a . c = c . d$	e	$a : c = c : d$;

e vi è l' uso di esprimerle più brevemente così

$\div a . c . d .$ $\quad\quad$ $\div\!\div a : c : d$,

nelle quali a , e d sono gli estremi e il 2.° termine esprime tanto il conseguente della 1ª che l' antecedente della 2ª ragione , e chiamasi medio proporzionale .

774. Se l' assieme di due ragioni eguali dicesi *proporzione* , l' assieme di più ragioni eguali non ha alcun nome distinto se non in un solo caso particolare, quando cioè la prima ragione forma una proporzione continua colla seconda , la seconda colla terza , ec. ; mentre in tal caso la serie di questi rapporti chiamasi *progressione o per differenza* , *o per quoto* a tenor della di loro natura .

Ecco una progressione per differenza

1 . 3 .·. 3 . 5 .·. 5.7 .·. 7 . 9 , e scrivesi $\div$ 1 . 3 . 5 . 7 . 9

Ecco una progressione per quoto

1 : 2 : : 2 : 4 : : 4 : 8 : : 8 : 16 , e scrivesi $\div\!\div$ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 .

Si scrivon cioè una sola volta i termini , che sono conseguenti d' una ragione e antecedenti della prossima, come si è fatto nella proporzione continua , sicchè può dirsi che meno il primo termine che non avendo ante-

cedenti non può prendersi per conseguente, e l'ultimo che non avendo conseguenti non può riguardarsi per antecedente, ogni altro termine ha un doppio ufficio è cioè conseguente del termine che gli è a sinistra, ed è antecedente di quello che gli è a destra nello stesso rapporto, sicchè la *progressione* può definirsi una *catena di proporzioni continue, una serie cioè di rapporti eguali formati da termini, tra lor legati in tal guisa, che meno gli estremi ognun d'essi è medio proporzionale tra i contigui*; dalla qual definizione deriva

775. I. Ogni progressione è una serie di rapporti eguali non viceversa.

776. II. In ogni progressione due termini presi di seguito dovunque danno una ragione eguale a quella di due altri presi di seguito in qualunque altro posto della medesima, e forman. perciò con essi una proporzione.

777. III. In ogni progressione 3 termini di seguito dovunque presi formano una proporzione continua.

ARTICOLO II.

Principali proprietà delle proporzioni, e progressioni per differenza.

778. Onde conoscere le proprietà che competono a tutte le proporzioni, e progressioni per differenza, fa d'uopo trovare una formola generale analitica della loro costituzione, sicchè ciò che in esse ravvisiamo sia estensivo a tutte. Or se abbiamo $a \,.\, g \,.\!\cdot.\, c \,.\, h$, poichè il conseguente g non è che a più la differenza d (§. 768); e il conseguente h non è che c più la stessa

differenza d valore della 1ª ragione cui è uguale la 2ª (771), alla superior proporzione dar possiamo questa espressione analitica

$$a \,.\, a+d = c \,.\, c+d \,.$$

779. Questa formola ci addita una proprietà interessante delle proporzioni per differenza, cioè che *la somma de' medii è uguale a quella degli estremi*, poichè la somma degli estremi nell' ora espressa formola è $a+c+d$, e la somma de' medii è $a+d+c$ identica all' altra. Ogni volta dunque che si ha una proporzione p. e. 5.11=9.15 possiamo inferirne, che 5+15=11+9.

780. E all' opposto ogni volta che abbiamo la somma di 2 termini eguale a quella di 2 altri, possiamo questa equazione risolvere in una proporzione per differenza. Infatti se $a+f=c+g$, da questa, trasportando i termini da un membro all' altro, otteniamo $a-c = g-f$, che equivale alla $c \,.\, a \therefore f \,.\, g$ (§. 771).

781. Se uno dei 4 termini d' una proporzione per differenza fosse ignoto, se p. e. si avesse

$19 \,.\, 37 = 4 \,.\, x$ ovvero $22 \,.\, 41 = x \,.\, 30$

poichè si ha (779)

$19 + x = 37 + 4$, e $22 + 30 = 41 + x$

avremo (§. 496)

$x = 37 + 4 - 19 = 22$; e $x = 22 + 30 - 41 = 11$

cioè *si ha il valore dell' estremo ignoto sottraendo dalla somma de' medj il noto estremo, e risulta il valore del medio incognito sottraendo dalla somma degli estremi il medio noto.*

782. Se la proporzione è continua, poichè in essa il terzo termine è uguale al secondo (773), la sua formola analitica sarà

$a \,.\, a+d = a+d \,.\, a+d+d$, ovvero $\div\, a \,.\, a+d \,.\, a+2d,$

in cui è facil cosa verificare che la somma degli estremi dovendo esser eguale a quella dei medii (779), è uguale al doppio del medio proporzionale.

783. Quindi se in una proporzione continua è ignoto un termine, se si ha p. e.

$$\div m \, . \, n \, . \, x \qquad \text{e} \qquad \div a \, . \, x \, . \, c$$

si avrà (782)

$m+x=2n$, e $x=2n-m$, e $a+c=2x$, e $x={}^1/_2(a+c)$, cioè *l' estremo ignoto è uguale al doppio del medio proporzionale diminuito dell' estremo noto;*
e il medio proporzionale ignoto è uguale alla semisomma degli estremi.

784 Così se nella costruzione di un fabbrica si vuò che il terzo piano superi l' altezza del secondo che è di 8 metri, quanto il secondo piano supera il primo che è di metri $6+{}^1/_4$, avremo

$$\div 6^m + {}^1/_4 \, . \, 8 \, . \, x \text{ donde } x = 16^m - (6+{}^1/_4) = 9^m + {}^3/_4$$

Se vogliamo costruire una torre che abbia un' altezza che sia media di quella di un obelisco alto metri 120, e di un palazzo alto metri 96, avremo

$$\div 120 \, . \, x \, . \, 96 \text{, donde } x = {}^1/_2\,(120+96) = 108^m.$$

785. Come la progressione per differenza non è che una continuazione della proporzione continua (774), così la sua formola è una continuazione della formola analitica di questa. Ed infatti poichè di quanto il 2.° termine differisce dal 1.°, di tanto pure differisce il 3.° dal 2.°, il 4.° dal 3.° ec., chiamata d la differenza costante valore di tutte le ragioni eguali che costituiscono la seguente progressione per differenza di un determinato numero n di termini

$$\div a \, . \, f \, . \, g \, . \, h \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, t \, . \, u,$$

è chiaro che ogni successivo termine non è che il rispettivo antecedente più d, e che perciò

il 2.° termine	$f = a+d$	....	$= a+1d$
il 3.°	$g = f+d = a+d+d$		$= a+2d$
il 4.°	$h = g+d = a+2d+d$		$= a+3d$
il penultimo	t	. . .	$= a+(n-2)d$
l' ultimo	u	. . .	$= a+(n-1)d$

sicchè ecco la formola analitica delle progressioni per differenza di un numero n di termini

$$\div\, a \,.\, a+d \,.\, a+2d \,...\, a+(n-2)d \,.\, a+(n-1)d$$

ove si scorge I. che i termini vanno successivamente crescendo, forman cioè una progressione crescente, se d è positiva, e vanno diminuendo, forman cioè una progressione decrescente se d è negativa; II. che ciascun d' essi deriva dal 1.° termine a, altro non essendo che lo stesso a più la differenza d moltiplicata pel numero de' termini che lo precedono; e che perciò l' ultimo termine è espresso dall' interessante formola

$$u = a + (n-1)\, d$$

786. Se or cerchiamo una formola la quale ci esprima la somma s d' un numero n di termini di una progressione, è chiaro che

$$s = a + a+d + a+2d \,...+ a+(n-2)d + a+(n-1)d$$

e invertendo l' ordine de' termini avremo pure

$$s = a+(n-1)d + a+(n-2)d + a+(n-3)d \,...+ a+d + a$$

e quindi

$$2s = 2a+(n-1)d + 2a+(n-1)d + 2a+(n-1)d \,...+ 2a+(n-1)d + 2a+(n-1)d$$

la quale ultima equazione che si ottiene sommando le due antecedenti, e facendo riduzione ne' termini che in colonna si corrispondono, ci mostra che nel 2.° membro le rispettive somme de' termini corrispondenti son tutte eguali, del che ci convince anche il riflesso che ogni termine successivo della prima serie ha una

d di più del suo antecedente, ogni termine successivo della 2^a serie scritta inversamente ha un d di meno; e poichè queste parziali somme tutte eguali son tante quanto è il numero n de' termini costituenti la serie, conchiudiamo che

$$2s = n(2a + (n-1)\,d) = n(a + a + (n-1)\,d),$$

ma $a + (n-1)\,d = u$ (§. 785): dunque $2s = n(a+u)$; e finalmente $s = {}^n/_2(a+u)$.

787. Dall' esame sulla genesi delle progressioni per differenza sono nate le due interessanti equazioni.
(A) $u = a + (n-1)d$ (§. 785), e (B) $s = {}^n/_2(a+u)$ (§. 786), in ciascuna delle quali non vi sono che 4 dei 5 elementi principali di una progressione che sono a primo, ed u ultimo termine, d differenza, n numero, ed s somma de' termini.

Or se due di questi 5 elementi fossero ignoti, noi possiamo trovarli, poichè quand' anche non una sola incognita, ma tutte due (che è il caso che può presentare maggior difficoltà) si trovassero in ambedue le equazioni, si è già veduto (537) il modo con cui ottenerne il valore.

Noi siam dunque in grado di sciogliere il problema in cui dati 3 qualunque dei 5 elementi a, d, n, s, u, si chieggono i due ignoti: ma siccome esso abbraccia 20 casi distinti, perchè *dieci* sono i diversi *dati* cioè

$a,d,n \,|\, a,d,s \,|\, a,d,u \,|\, a,n,s \,|\, a,n,u \,|\, a,s,u \,|\, d,n,s \,|\, d,s,u \,|\, n,s,u \,|$

che costituiscono 10 diverse ipotesi in ciascuna delle quali cerchiamo *due* ignote, così noi scioglieremo i più interessanti, e difficili onde prendan norma gli allievi del metodo a tenersi per la determinazione delle formole relative a tutti gli altri casi

I. Quesito. *Dati a, n, u, si trovi d ed s*

788. Dall' equazione (A) ricavasi $d = \frac{u-a}{n-1}$; e l' equazione (B) ci dà immediatamente il valore di s.

789. *Vogliasi p. e. inserire un dato numero m di medii proporzionali per differenza fra 2 termini dati*, o ciò che è lo stesso, trovare tutti i termini intermedii tra i dati estremi d' una progressione, essendo pur dato il loro numero m da cui deducesi il numero n totale de' termini che è lo stesso numero m de' termini da inserirsi più i due estremi, è cioè $m+2$.

Questo quesito si può dire sciolto quando si è trovato d, poichè essendo noto il 1.° termine a, il 2.° non è che $a+d$, il terzo non è che il 2.° più d, ec. Or la ricerca di d, dati gli estremi a ed u ed il numero n de' termini, è il caso or contemplato, ed eccone delle applicazioni.

790 *Un Padre ha nove figlj, e la stessa differenza di anni che v' è tra il primo, e il secondo v' è pur tra il secondo e il terzo, ec. Il maggiore ha 48 anni, il minore ne ha 8: qual' è l' età di tutti gli altri?*

Essendo in questo caso $a=8$, $u=48$, $n=9$, l'equazione $d = \frac{u-a}{n-1}$ diventa $d = \frac{48-8}{9-1} = 5$; e perciò deducendo ora colla nota legge di derivazione (785) tutti i termini dal primo 8 sino all' ultimo 48, avremo la cercata progressione

$$\div\, 8 . 13 . 18 . 23 . 28 . 33 . 38 . 43 . 48 .$$

i cui successivi termini esprimono l' età dei nove figlii a tenor delle date condizioni.

791 *Marco unito a sei socii giuoca un terno al lotto; eguale è il denaro che ciascun socio impiega, ma minore di quello impiegato da Marco, e la somma totale della giocata è Lire 12. Si ripete la giacata per una seconda volta, ma un dei Socii ritirasi, e ciascun degli altri, e Marco impiegano la stessa somma di prima. Si ripete nello stessa mada la giuacata per una terza, quarta volta ec, ma ogni volta con un socio di meno, sicchè alla settima giocata di lire 4 Marco rimane solo. I A quanta per giuacata monta la parte d' agni socio?* II. *Che somma è stata impiegata per agni giuacata?* III. *Che somma per tutte?*

Differendo le successive giuocate l' una dall' altra sempre per la porzione d' uno dei socii che si ritira, 1.° la parte d' ogni socio è la differenza costante d che passa tra la prima, e la seconda, tra la 2^a, e la 3^a giocata, ec. : 2.^{a} le successive giuocate sono i successivi termini d' una progressioue per differenza : 3.° e la lor somma è la somma della progressione. Anche in questo caso dunque dato $a=12$, $u=4$, $n=7$, si cerca d (nota la quale derivano da a tutti i termini della progressione) e si cerca s.

Or $d=\frac{u-a}{n-1}$ diventa $\frac{4-12}{7-1}=-{}^8/_6=-(1+{}^1/_3)$.

Dunque 1.° $1+{}^1/_3$ è la parte da ciascun socio impiegata.

E poichè ogni termine non è che l' antecedente accresciuto della differenza sottrativa $-(1+{}^1/_3)$, ossia l' antecedente diminuito di $1+{}^1/_3$, avremo 2.° espresse le successive giuocate da questa progressione decrescente

$\div$ 12 . $10+{}^2/_3$. $9+{}^1/_3$. 8 . $6+{}^2/_3$. $5+{}^1/_3$. 4

Finalmente poichè $s={}^n/_2(a+u)$ diventa $s={}^7/_2(12+4)$ $=56$, 3.° conchiuderemo che a lire 56 monta la total somma delle 7 giuocate.

792. *Si dee lastricare una strada lunga 16 miglia. Convien prender le pietre alla distanza di 6 miglia dal principia di essa. La quantita di pietra trasportabile da un carro bastando*

per la estensione di un centesimo di miglio, si è convenuto dividere ogni miglio in 100 parti, e far depositare la carica sovra ciascuno di questi punti, che danno perciò 1600 distanze eguali. Essendosi pattuito il prezzo di scudi 6 per ogni 100 miglia di porto a carro pieno, chiedesi quanto dovrà sborsarsi pel trasporto dei 1600 mucchj di pietra depositati nei nominati punti.

É chiaro che questa somma dipende dal numero delle miglia di cariaggio, e questo numero è la somma di una progressione, di cui è noto $a=6$ miglia, $u=6+15{,}99=21{,}99$ miglia, ed $n=1600$, poichè 1600 sono i trasporti fatti a distanze sempre crescenti di $^1/_{100}$ di miglio. In questo caso dunque dato a, n, u, si cerca la sola s.
Or la formola $s={}^n/_2(a+u)$ diventa $s={}^{1600}/_2(6+21{,}99)$ $=22392$; e miglia 22392 di cariaggio a scudi 6 per 100 esigono la somma di scudi 1343,52.

II. Quesito. *Dati a, d, n, si cerchi u ed s.*

793. Ricorrendo alle equazioni (A), e (B) del §.787 vediamo che il valore di u si ha immediatamente dalla (A), poichè sono tutte note nella nostra ipotesi le quantità del 2.° membro, dalle quali viene espresso; il valore di s non ci è poi dato immediatamente dalla formola (B), perchè il suo 2.° membro contiene u che nella nostra ipotesi è ignoto. Convien perciò sostituire in (B) il valore di u datoci da (A), ed allora l'equazione $s={}^n/_2(a+u)$ diventa (C) $s={}^n/_2(2a+(n-1)d)$; ed eccone un applicazione.

794 *A che altezza trovavasi Gailussac col suo globo areobatico allorchè per più sollevarsi lasciò cadere una palla di piombo che impiegò 8 secondi prima di giungere al suolo?*

Poichè si ha dalle leggi di gravità che un grave cadendo, percorre nel 1.° minuto secondo $4^m{,}9$; nel 2.°

minuto $4^m,9 + 9^m,8$; nel 3.° lo spazio percorso nel 2.° minuto più $9^m,8$ ec., è chiaro che l'altezza cercata ossia la somma di tutti gli spazii percorsi dalla palla al fin degli 8 secondi è la somma d' una progressione per differenza in cui $a=4^m,9$; $d=9^m,8$; ed $n=8$; e perciò la formola (C) $s={}^n/_2(2a+(n-1)\,d)$
diventa $s=4(9^m,8+7\times9^m,8)=313^m,6$ altezza richiesta.

795 *Un Testatore lascia ad un domestico per l' educazione del crescente suo figlio una pensione crescente ogni anno di scudi 10, per 12 anni colla condizione che se il Figlio muore prima che le percepite pensioni abbian formato la somma di scudi 1000, si passi immediatamente al Padre quanto manca per completar questa somma, e nulla gli si dia se le somme percepite superano gli scudi 1000. Dopo 11 anni muore il Figlio, e delle somme aute il Padre non rammenta il quantitativo, ma soloche l' ultima somma fu tripla di quella che percepì la prima volta. In forza del testamento compete al Padre somma alcuna?* Risultato. Nulla, perchè la somma delle pensioni percepite ascende a scudi 1100.

Or per giungere a tal risultato si noti che la somma di tutte le pensioni è la somma di un progressione di cui $d=10$ $n=11$. Ma questa somma s non può determinarsi finchè fra i *dati* non abbiamo che d, ed n, poichè abbiam *tre* incognite nelle *due* sole equazioni (A) e (B) (539).

Riflettendo sulle condizioni veggiamo però che a sebbene incognita è però reperibile con una semplice equazione di 1.° grado, perchè sappiamo che l' ultima pensione fu tripla della prima, sappiam cioè che $u=3a$; e sostituendo ad u il suo valore datoci dall' equazione (A), abbiamo $a+(n-1)d=3a$, ovvero $a+(11-1)10 = 3a$, donde $a={}^{100}/_2=50$

Acquistato così quest' altro dato a, la soluzione del problema riducesi a trovare s, dato a, d, n, il che otteniamo applicando al nostro caso la formola (C) (§.793)

$s = {}^n/_2(2a+(n-1)d)$, che diventa $s = {}^{11}/_2 \times 200 = 1100$,

III. Quesito. *Dati d, s, u, si cerchi a, n*

796. Esaminando le due equazioni fondamentali (A) e (B) (§. 787) da cui dipendono le soluzioni dei diversi casi, veggiamo che le due incognite a, ed n esistono in ciascuna di esse, e perciò a tenore del metodo (537) isolando a nell' equazione (A) (§. 787), otteniamo $a = u - (n-1)d$, ovvero (E) $a = u - dn + d$; e sostituendo questo valore di a nell' equazione (B) (§. 787), convertiamo $s = {}^n/_2(a+u)$ in $s = {}^n/_2(2u - dn + d)$, ovvero in

$$s = nu - \frac{dn^2}{2} + \frac{dn}{2}$$

equazione di 2.° grado rispetto all' ignota n che diventa (728) $n^2 - \left(\frac{2u}{d}+1\right)n + \frac{2s}{d} = 0$,

donde (F) $n = \frac{u}{d} + \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2s}{d} + \left(\frac{u}{d} + \frac{1}{2}\right)^2\right)}$

Il trovato valore di n sostituiscasi ora nell' equazione (E), e risulterà anche il valore di a, avremo cioè

$$a = u - d\left[\frac{u}{d} + \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2s}{d} + \left(\frac{u}{d} + \frac{1}{2}\right)^2\right)}\right] + d, \text{ o}$$

$$a = u - \frac{du}{d} - \frac{d}{2} \mp d\sqrt{\left(\frac{-2s}{d} + \left(\frac{u}{d} + \frac{1}{2}\right)^2\right)} + d,$$

e trasportando d entro il segno radicale, avremo

$$a = u - \frac{du}{d} - \frac{d}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{-2sd^2}{d} + d^2\left(\frac{u}{d} + \frac{1}{2}\right)^2\right)} + d\ ;$$

ed eseguendo la moltiplicazione delle 2 potenze secon-

de l' una monomia l' altra binomia, che costituiscono il 2.° termine della quantità sotto il segno radicale col moltiplicare le loro radici, e dare al prodotto il comune esponente, avremo

$$a=u-\frac{du}{d}-\frac{d}{2}\mp\sqrt{\left(\frac{-2d\cdot s}{d}+\left(\frac{du}{d}+\frac{d}{2}\right)^2\right)}+d;$$

e riducendo avremo finalmente

$$\text{(G)}\ a=\frac{d}{2}\mp\sqrt{\left(-2ds+\left(u+\frac{d}{2}\right)^2\right)}\,.$$

Ed ecco di questo 3.° caso un' applicazione.

797 *Un Accademia di belle arti non solo ha indennizzato un povero Studente di Pittura di tutte le spese occorse pei suoi lavori, ma ha di più premiato ogni sua produzione con somme ciascuna maggior dell' antecedente di 15 zecchini, sicchè con queste ha potuto l' Artista comprare un predio del valore di 750 zecchini, avendo fatto l' ultimo pagemento di zecchini 180 coll' ultimo premio riceuto Si cerca quante volte il Giovane è stato premiato, e che premio ebbe la prima volta.*

In questo problema il primo premio, e il numero de' premii che sono le cose cercate, costituiscono il 1.° termine a, e il numero de' termini n di una progressione per differenza, di cui sono dati $s=750$, $d=15$, $u=180$, ond' è che la soluzione appartiene al caso ora esposto, ed è data dalle formole (F), e (G).

Sostituendo infatti in (F) alle lettere gli ora enunciati valori, avremo

$$n={}^{180}/_{15}+{}^{1}/_{2}\pm\sqrt{(-2\times{}^{750}/_{15}+({}^{180}/_{15}+{}^{1}/_{2})^2)}\ \text{ovvero}$$
$$n={}^{25}/_{2}\pm\sqrt{(-100+{}^{625}/_{4})}={}^{25}/_{2}\pm\sqrt{{}^{225}/_{4}}={}^{25}/_{2}\pm{}^{15}/_{2}$$
$$=20\ ,\ \text{ovvero}\ =5\,.$$

Il primo valore 20 non si accorda colle condizioni quali ce le offre il problema, poichè dovendo essere $u=a+d(n-1)$, se n fosse 20 supposto ancora che

a fosse zero, ne verrebbe l' assurdo che u che nel caso nostro è 180 fosse eguale a $d(n-1)$, cioè a $15(20-1)=285$. Dunque ad n non può competere che il 2.° valore 5. Dunque 5 è il numero de' premii ricercati.

Sostituendo ora in (G) i valori alle lettere, avremo

$a={}^{15}/_{2}\mp\sqrt{(-2.15.750+(180+{}^{15}/_{2})^2)}$, ovvero

$a={}^{15}/_{2}\mp\sqrt{(-22500+({}^{375}/_{2})^2)}={}^{15}/_{2}\mp\sqrt{{}^{50625}/_{4}}=$

$={}^{15}/_{2}\mp{}^{225}/_{2}=-105$ ovvero $=120$;

ed escluso anche in questa formola come nell' altra il primo valore, che quí è negativo, compete ad a il 2° valore, cioè 120. Dunque 120 zecchini fu il primo premio.

Il Pittore è stato dunque premiato 5 volte; il primo premio è stato zecchini 120, da cui a norma della stabilita differenza 15 derivono tutti gli altri in accordo colle condizioni, come la seguente progressione dimostra ÷ 120 . 135 . 150 . 165 . 180 .

798 Non si creda però che i primi valori datici dalle formole di 2° grado, cioè per n il 20, e il -105 per a non esprimano nulla; poichè se il valor positivo di a esprime un *premio* o *guadagno*, il valor negativo di a, cioè -105 esprime una *penale* o *perdita*, che conciliasi col corrispondente primo valore di n, cioè con 20, dandoci la soluzione di un nuovo problema che nemmeno ci era venuto in mente nell' ideare l' esposto, qual' è il seguente.

Un Pittore presenta ad un' Accademia di belle arti successivamente i suoi lavori per ciascun de' quali ha sempre incontrato la medesima spesa. Essendosi giudicato non degno di premio il primo lavoro, non riceve per la occorsa spesa indennizzo alcuno. Divenendo però sempre migliore la sua abilità, pel 2° lavoro riceve dall' Accademia zecchini 15, ne riceve 30 pel 3°, 45 pel 4°; ec. sicchè a poco a poco il premio che riceve giunge a superare le spese, di modochè alla fine il Pittore non

solo resta indennizzato di tutto ciò che avea dovuto spendere per tutti i fatti lavori, ma col di più compra un predio del valore di 750 zecchini, facendone l' ultimo residual pagamento di scudi 180 con ciò che dell' ultimo premio gli sopravvanza dopo aver detratte le spese del lavoro. Si cerca a quanto monta la spesa per ciascun lavoro, e quanti lavori ha fatto.

E la citata soluzione ci ha mostrato che la spesa per ogni lavoro è 105 zecchini, e 20 sono i lavori. Infatti a tenor delle condizioni volendo esprimere i successivi guadagni del Pittore, che a principio son guadagni negativi cioè perdite, abbiamo la progressione

—105/—90/—75/—60/—45/—30/—15/ 0 / 15 / 30 / 45/ 60/ 75/ 90/ 105/ 120/ 135/150/ 165/ 180/

dalla quale rilevasi, che niun premio ebbe pel 1° lavoro: che fino al settimo inclusivo il premio non è giunto ad eguagliare la spesa: che ciò accade all' ottavo prodotto, rapporto a cui zero è il guadagno: che dall' 8° al 15° lavoro ogni premio ha superata la spesa in modo, che la somma de' guadagni eguaglia la somma delle perdite ante ne' primi 7 lavori, sicchè la somma di tutti i primi 15 termini è zero, e la somma degli ultimi 5 vale per l' acquisto del predio.

ARTICOLO III.

Principali proprietà delle proporzioni e progressioni per quoziente.

799. Se per conoscere le proprietà delle proporzioni, e progressioni per differenza util fu loro applicare una formola, così lo è pure per quelle per quoziente.

Avendosi $a : g = c : h$, se chiamisi q il quoto valore di queste due ragioni eguali, poichè il conse-

guente g non è che l' antecedente a moltiplicato pel quoto valore della 1[a] ragione, non è cioè che aq (§768); e il conseguente h non è che il rispettivo antecedente c della 2[a] ragione moltiplicato pello stesso q valore della 2[a] ragione eguale alla 1[a], non è cioè che cq, potremo alla or espressa proporzione sostituire questa formola analitica generale

$$a : aq = c : cq\,,$$

le cui proprietà competono a ogni proporzion per quoto.

800. Or la più util tra queste è che *il prodotto* acq *degli estremi è uguale al prodotto* aqc *dei medii.*

801. E perciò se uno de' 4 termini d' una proporzione è ignoto, se p. e. si ha

$$7 : 35 = 4 : x\,, \qquad \text{ovvero} \qquad 20 : 30 = x : 36\,,$$

avremo

$$7x = 35 \cdot 4\,, \qquad \text{e} \qquad 20 \times 36 = 30x$$

donde

$$x = 35 \cdot 4/_7 = 20\,, \text{ e } \quad x = 20 \cdot 36/_{30} = 24\,;$$

si ha cioè l' estremo ignoto col dividere il prodotto dei medii per l' estremo cognito; e si ottiene il medio che si ricerca col dividere pel medio noto il prodotto degli estremi; e queste regola è quella che i prattici chiaman *del tre*, ed anche *regola d' oro* in grazia delle utilissime sue applicazioni (a).

(a) E a convincerci che le applicazioni di questa regola sono moltissime, basti il riflesso che i numeri altro non essendo che tante ragioni per quoto, poichè sol consistono nel quante volte essi contengono l' unità, le stesse moltiplicazioni, e divisioni altro non sono che l' espressione di una proporzione in cui cercasi un termine, poichè nella moltiplicazione cerchiamo un numero detto prodotto, che abbia al moltiplicando quel rapporto che il moltiplica-

802. Se la proporzione è continua, poichè l' antecedente della 2^a è lo stesso conseguente della 1^a ragione, la sua formola analitica è

$$a : aq = aq : aq^2, \text{ ovvero } \div a : aq : aq^2.$$

Dunque se o il medio proporzionale o un estremo d'una proporzione continua è ignoto, se p. e. si ha

$$\div 48 : 12 : x \quad , e \qquad \div 4 : x : 9$$

si ottiene

$$48x = 12^2 \quad , e \qquad x^2 = \sqrt{4.9}$$

donde $x = {}^{144}/_{48} = 3$, e $\quad x = \sqrt{4.9} = 6$

si ha cioè l' estremo ignoto dividendo il quadrato del medio proporzionale per l' estremo cognito ; e si ha il medio proporzionale ignoto, estraendo la radice dal prodotto degli estremi.

803. Come vero è nelle proporzioni che il prodotto de' medii è uguale a quello degli estremi, così è vera la proposizione inversa che 4 termini formano una proporzione quando sono in tal guisa disposti che il prodotto degli estremi sia eguale a quello de' medii : ed infatti se i termini a, c, d, f son tali che $af=cd$, dividendo ambo i membri pel prodotto cf, abbiamo

---

tore ha all' unità, e nella divisione si cerca un numero detto quoto, che abbia al dividendo quello stesso rapporto che l' unità ha al divisore ; tanto è vero che molti Matematici hanno sostituito alle più semplici e naturali primitive idee della moltiplicazione, e divisione le più generali, e composte che si hanno dall' or indicato modo di ravvisarle come proporzioni in cui cercasi l' ultimo termine, e ciò ad oggetto di poter giustificatamente comprendere sotto queste diverse definizioni anche i risultati di quelle duplici operazioni che si son chiamate *moltiplicazioni, e divisioni per frazioni*, risultati che hanno anch' essi ai supposti loro moltiplicandi e dividendi quel rapporto stesso, che ha all' unità il moltiplicatore, ed al divisore l' unità.

$\frac{af}{cf} = \frac{cd}{cf}$, ovvero $\frac{a}{c} : \frac{d}{f}$ ovvero $a : c = d : f$ (771).

804 Di quì la regola di *risolvere in proporzione qualunque equazione formando gli estremi coi due fattori, che compongono un membro, e i medii coi 2 fattori dell' altro*. Così p. e.

Da $ac=mn$, si ha $a : m = n : c$,

Da $(a^2-c^2)=1$, si ha $a+c : 1 = 1 : a-c$;

Da $c=a$ ossia da $1c=1a$, si ha $c : a = 1 : 1$;

Le molte altre proprietà che le proporzioni ci offrono riferisconsi ai 3 seguenti titoli.

I. *Diversi cambiamenti d' aspetto che può offrirci una stessa proporzione.*

805. Siccome le ragioni non sono che frazioni, è chiaro che una proporzione rimane la stessa, se ambi i termini d' una ragione sola, o di entrambe o si moltiplichino o si dividano per una data quantità.

Così $a : c = u : z$ può prendere i diversi aspetti seguenti.

$am : cm = u : z$	$^a/_r : {}^c/_r = u : z$
$am : cm = um : zm$	$^a/_r : {}^c/_r = {}^u/_r : {}^z/_r$
$am : cm = ur : zr$	$^a/_r : {}^c/_r = {}^u/_m : {}^z/_m$
$am ; cm = {}^u/_r : {}^z/_r$	$^a/_r : {}^c/_r = um : zm$

E da ciò deriva che due quantità stanno tra loro come le loro metà, terzi ec., o come i lor doppi, tripli ec., in genere come i loro *multipli* e *summultipli*.

II. *Diverse proporzioni cui può dare origine una proporzion sola.*

806. Col solo cambiamento di posto i termini d'

una proporzione far possono 4 proporzioni distinte
Infatti dalla proporzione $a : aq = c : cq$

ponendo gli estremi in luogo de' medii, ossia *invertendo* } si ha $aq : a = cq : c$

ponendo un medio in luogo dell' altro, ossia *alternando* } si ha $a : c = aq : cq$

ponendo un' estremo in luogo dell' altro, ossia *alternando* } si ha $cq : aq = c : a$

poichè nelle ultime tre proporzioni il prodotto de' medii è uguale al prodotto degli estremi come nella prima.

807. Nuove proporzioni si hanno pure se per una data quantità si moltiplichino o dividano o i due soli antecedenti, o i due soli conseguenti d' una proporzione data, poichè ciò non è che un' alternarla dopo avervi eseguite le operazioni espresse al §. 805

E una moltitudine d' altre proporzioni si ottiene con addizione, o sottrazione o altra sorte di modificazioni fatte ai termini in guisa che il prodotto de' medii uguale sia sempre a quello degli estremi. Ecco le più interessanti in ciascuna delle quali può ognuno verificare la or indicata eguaglianza se per esprimerle ci serviamo degli elementi dati dalla formola $a : aq = c : cq$.

808 *L' antecedente più o meno il conseguente della prima ragione all' antecedente, o conseguente, come l' antecedente più o meno il conseguente della seconda ragione al suo antecedente, o conseguente.*

809 *La somma o differenza de' termini d' una ragione all' altra, come l' un qualunque de' due termini al suo corrispondente, o come le rispettive differenze se si erano paragonate le somme, e viceversa.*

810 *Un' estremo o un medio all' altro, come il quadrato del 1° al prodotto degli estremi, o medii.*

811 *Il prodotto de' medii è medio proporzionale tra il prodotto degli antecedenti, e conseguenti.*

812. Notiamo finalmente che se si ha la proporzione $a : f = g : h$, donde $ah = fg$, elevando ad n ambi i membri, o estraendo da entrambi la radice n abbiamo

$$a^n h^n = f^n g^n \text{ , ovvero } \sqrt[n]{ah} = \sqrt[n]{fg} \text{ , donde}$$

$$a^n : f^n = g^n : h^n \text{ ovvero } \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{f} = \sqrt[n]{g} : \sqrt[n]{h} \text{ (804);}$$

cioè le potenze o radici simili de' termini di una proporzione formano proporzione ancor esse.

III. *Diverse proporzioni che derivano dalla combinazione di più proporzioni.*

813. *In una serie di ragioni eguali la somma di tutti gli antecedenti sta a quella de' conseguenti, come un' antecedente al suo conseguente, o come la parzial somma di qualsivoglia numero d' antecedenti alla somma de' rispettivi conseguenti* : ed infatti oltre che le indicate proporzioni debbon esser vere perchè il prodotto de' medii trovasi eguale a quello degli estremi, provasi che il deggiono essere anche, perchè nella serie di più ragioni eguali $a : aq :: c : cq :: f : fq :: g : gq$, è sempre q il quoto valore e della ragione di qualunque antecedente paragonato al suo conseguente, e della ragione di qualunqne somma d' antecedenti alla somma de' rispettivi conseguenti, come p. e. di $a+c : aq+cq$ ossia di $a+c : (a+c)q$; di $a+c+f : aq+cq+fq$, ossia di $a+c+f : (a+c+f)q$ ec.

814. *In un seguito di proporzioni in cui sieno eguali i conseguenti* (come le qui a lato descritte) *le somme de' rispettivi antecedenti stanno tra loro come i comuni conseguenti*, perchè ciò è quanto dire in un seguito di eguali ragioni sta (come or si è provato) la somma degli antecedenti, alla somma de' rispettivi conseguenti, come un antecedente al suo conseguente dopo che le date proporzioni si sieno alternate.

$$a : c = m : i$$
$$r : c = s : i$$
$$n : c = u : i$$

815 *I prodotti, o i quoti che nascono dal moltiplicare o dividere i termini d' una proporzione per i rispettivi d' un' altra formano una proporzione ancor essi*.

Avendosi cioè le due proporzioni $\begin{cases} a : aq = c : cq \\ m : mq' = g : gq', \end{cases}$

sono vere anche le due seguenti proporzioni

$$am : amqq' = cg : cgqq'$$

$$\frac{a}{m} : \frac{aq}{mq'} = \frac{c}{g} : \frac{cq}{gq'};$$

poichè in ambedue il prodotto de' medii è uguale a quello degli estremi.

816. E qui si noti che *ragioni composte* si chiaman quelle, che nascono dal moltiplicare tra loro i rispettivi termini di 2, o più ragioni semplici: così $am : cn$ è una ragione composta delle due $a : c$, ed $m : n$.

817. Quelle poi tra le ragioni composte che risultano della moltiplicazione di 2 ragioni eguali chiamansi *duplicate*, *triplicate* quelle che nascono dalla moltiplicazione di 3 ragioni eguali, ec.

818. Così $an : cr$ è la duplicata delle due $a : c$, ed $n : r$ eguali. Or essendo per ipotesi $a : c = n : r$, ossia $a/c = n/r$ (§.671), e potendosi una frazione sostituire alla sua eguale, si avrà $a/c \times n/r = a/c \times a/c = n/r \times n/r$, cioè $an/cr = aa/cc = nn/rr$, ovvero

$$an : cr = a^2 : c^2 = n^2 : r^2 ,$$

cioè *le ragioni duplicate sono eguali alle ragioni de' quadrati dei termini delle semplici da cui derivano*.

819. Così $amn : cru$ è la triplicata delle 3 ragioni eguali $a : c$, $m : r$, $n : u$; e in simil modo dimostrasi, che

$$amn : cru = a^3 : c^3 = m^3 : r^3 = n^3 : u^3 ;$$

cioè *le triplicate sono eguali alle ragioni de' cubi de' termini di ciascuna delle semplici da cui derivano*.

Proprietà delle progressioni per quoziente.

820. Poichè una progressione per quoto è una serie di termini in cui quante volte il 2.° contiene il 1.°, altrettante il 3.° contiene il 2.°, il 4.° contiene il 3.° ec., chiamato q il quoziente costante per cui convien moltiplicare ogni antecedente onde nasca il conseguente e chiamato a il primo de' suoi termini, ed n il loro numero, la sua formola generale sarà

$$\div\!\!\div\ a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 \ . \ . \ . \ aq^{n-1} .$$

821. In questa si scorge I. che i termini vanno successivamente creccendo, ossia formano una progressione *crescente* se q è intero, e vanno successivamente decrescendo, ossia formano una progressione *decrescente* se q è una frazione. Così le le serie

I. 4 : 12 : 36 : 108, e II. 45 : 15 : 5 : $5/3$: $5/9$ sono progressioni *crescente* la 1^a, e *decrescente* la 2^a

perchè il quoto è 3 per l'una, e $^1/_3$ per l'altra: e riguardo a quest' ultima si noti che da decrescente può tosto convertirsi in crescente sol che si scriva con ordine inverso, ponendo per 1.° l' ultimo termine, per 2.° il penultimo, ec., giacchè allora il quoto costante $^1/_3$ si converte in 3: II. Che ciascun de' termini deriva dal primo a, altro non essendo che lo stesso a moltiplicato pel quoto costante q elevato alla potenza espressa dal numero de' termini precedenti, e che perciò l' ultimo termine vien' espresso dall' interessante formola

$$(A)\ u = aq^{n-1}$$

822. Per rappresentar poi con una formola la somma s di tutti i termini d'una progressione per quoto, riflettiamo che tutti i termini d' una progressione meno l' ultimo, figurano per antecedenti, e tutti meno il primo figurano per conseguenti di tante ragioni eguali (774), sicchè la somma degli antecedenti è rappresentata da $s-u$, e quella de' conseguenti da $s-a$; e perciò rammentando, che in una serie di ragioni eguali sta la somma degli antecedenti a quella de' conseguenti, come il 1.° antecedente al suo conseguente (813), avremo

$$s-u : s-a = a : aq,$$

e quindi $$aqs-aqu = as-a^2\ (800),$$

donde $$(B)\ s = \frac{qu-a}{q-1}.$$

823. Le due or ottenute formole (A), e (B) valgono a risolvere un problema analogo a quello risoluto per le progressioni per differenza (787), in cui cioè dati 3 de' 5 elementi d' una progressione per quoto che sono a, n, q, s, u, si cercano gli altri due, proble-

ma che ammette anch' esso 20 casi diversi in alcuni de' quali esigesi per la soluzione l'uso del *calcolo logaritmico*, e precisamente in que' casi in cui una delle ignote è l'esponente n, il che ci sarà dato di rilevare in qualcuno dei più difficili, che or per norma prendiamo a risolvere.

I. Quesito. Dati a, n, u si trovi q, od s.

824. Dall' equazione (A) (§. 821) si ottiene

$$q^{n-1} = {}^{u}/_{a}\,,\ \text{e}\ q = \sqrt[n-1]{{}^{u}/_{a}}.$$

Dall' equazione (B) (822) ricavasi il valore di s, sostituendo in essa all' ignota q il valore trovato in (A), mentre così avremo

$$s = \left(u\sqrt[n-1]{{}^{u}/_{a}} - a\right) : \left(\sqrt[n-1]{{}^{u}/_{a}} - 1\right).$$

Alla prima delle due inchieste di questo quesito va a riferirsi la *ricerca di un numero m qualunque di medii proporzionali fra due termini dati*, poichè questa non è che la ricerca di tutti i termini intermedii, che esistono tra i dati estremi d' una progressione, e questi si fanno tosto derivare dal primo, quando è noto q (821); sicchè essendo dato il numero de' medii proporzionali che vogliensi inserire, essendo dato cioè anche il numero totale n dei termini della progressione, poichè esso non è che m più i due estremi ossia $m+2$, la proposta ricerca riducesi a trovar q, dati a, n, u. Ed eccone un' applicazione.

825 *Un Padre ha donato ad un Figlio 10 semi di frumento col permesso di fare fruttificare questi semi per anni 10 convertendo in semente la raccolta di ogni anno in un predio, che ha sempre presentato la stessissima fertilità. Alla fine del deci-*

mo anno il Figlio riscuote una messe di 604661760 semi di frumento : A che ragione è stato fertile il terreno ? **Risultato : Ha reso il 6. per 1.**

Questo quesito appartiene ad una progressione per quoto in cui $a = 10$, $u = 604661760$, $n = 11$, che risulta dal 9 numero de' medii proporzionali che deggiono inserirsi fra i due estremi onde esprimere le raccolte incognite de' primi nove anni, più i 2 estremi ; e cercasi q che rappresenta il rapporto costante del frutto al seme in tutti i dieci anni.

Ora $q = \sqrt[n-1]{u/a}$ (§. 824) diventa nel nostro caso

$$q = \sqrt[10]{\frac{604661760}{10}} = \sqrt[10]{60466176} =$$

$$= \sqrt[5]{\sqrt[2]{60466176}} \ (\text{§. } 711) = \sqrt[5]{7776} = 6 \ (\text{§. } 590) .$$

Trovato q, dal 1.° termine 10 deduconsi tutti gli altri col metodo (821), e si ha la cercata progressione ∺ 10 : 60 : 360 : 2160 : 12960 : 77760 : 466560 : 2799360 : 16796160 : 100776960 : 604661760 , i cui successivi termini esprimono le successive raccolte di ogni anno.

II. Quesito. Dati a, n, q, si trovi u ed s

826. L' equazione (A) (§. 821) ci da immediatamente il valore di u ; ed s si ottiene sostituendo in (B) (§. 822) ad u il suo valore trovato in (A), mentre avremo allora

$$s = \frac{aq^{n-1} \times q - a}{q - 1} = \frac{aq^n - a}{q - 1} = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$$

827. Frattanto l'analisi di questa formola ci reca ad una interessante osservazione. Quando q è un'intero, e perciò crescente la progressione (821), quanto più n si aumenta, e tanto più ingrandisce il valore di q^n; ed s potrà sorpassare qualunque quantità ci piaccia, purchè ad n si dia un conveniente valore: non v' è cioè limite alcuno all'ingrandimento di s. Ma se q è una frazione espressa da $^1/_m$, se cioè la progressione è decrescente (821), si avrà allora

$$s = \frac{a\left(\frac{1}{m^n} - 1\right)}{^1/_m - 1} = \frac{am\left(\frac{1}{m^n} - 1\right)}{1 - m}$$

$$= \frac{am\left(1 - \frac{1}{m^n}\right)}{m - 1} = \frac{am}{m-1} - \frac{a}{(m-1)m^{n-1}},$$

dalla qual' ultima espressione rilevasi che qualunque sia il numero de' termini, che prendiamo in considerazione, il primo termine positivo della formola rappresentante s rimane sempre lo stesso: non così però il 2.° termine negativo: infatti quanto più grande diventa il numero variabile n, tanto più grande diventa ancora il denominatore di questo termine, e quindi tanto più piccolo il termine stesso (273). Quindi è che I. se questo 2.° termine negativo della formola rappresentante s tanto più impiccolisce quanto n è più grande, il valore di s si avvicinerà sempre più alla quantità costante

$\frac{am}{m-1}$ che esiste per primo termine quanto è maggiore il numero de' termini, che nella progressione consideriamo, poichè tanto più lieve si rende allora la diminuzione che debbe subire il primo termine per par-

te del secondo onde rappresentare il valore di s; come è pur chiaro II. che questo primo termine della formola è sempre maggior di s somma della progressione decrescente, qualunque numero di termini anche grandissimo essa abbracci, subitochè per rappresentarla debbe esser diminuito del 2.° termine il quale per quanto impiccolisca, non può però mai ridursi allo zero assoluto.

Dunque $^{am}/_{m-1}$ è il vero *limite*, cui sempre più indefinitamente si approssima la somma di una progressione decrescente a tenore che cresce il numero de' suoi termini colla certezza che dessa non può mai giungere ad eguagliarlo; ed ecco l' unico aspetto sotto cui possiamo formarci idea esatta del suo valore.

828. Nulla di meno rilevandosi dalla formola $s =$

$$\frac{am}{m-1} - \frac{a}{(m-1)m^{n-1}}$$, che allora solo potrebbe la

somma s eguagliare il limite $^{am}/_{m-1}$ quando il 2.° termine fosse zero, e zero potrebbe divenire allor solo che n divenisse maggiore d' ogni asseguabile, mentre maggiore d' ogni assegnabile renderebbesi allora anche il denominatore del 2.° termine frazionario, e quindi infinitesimo, ossia minor d' ogni assegnabile, ossia zero il suo stesso valore; così si è anche detto che quando n ossia il numero de' termini è infinito, si ha $s = {}^{am}/_{m-1}$, cioè se aver si potesse la somma d' una progressione decrescente continuata all' infinito, questa sarebbe $^{am}/_{m-1}$: ed infatti la sostituzione di $^{am}/_{m-1}$ invece di s in quelle progressioni decrescenti, che l' indole di certi problemi esige di considerar protratte all' infinito, come vedremo ai §. 832, 833, esattamente soddisfa alle loro condizioni.

Avvertiamo però bene che il considerare la quantità determinata $^{am}/_{m-1}$ come un limite, che non sia mai raggiunto da una somma per quanto sia estesa di termini non ripugna, perchè la *numerosa moltitudine* de' termini successivi è bilanciata dalla ognor più *decrescente loro intensità*: ma il riguardarlo come somma d'una progressione continuata all'infinito è a rigore una inesattezza, poichè non potendo l'idea d'una somma andar disgiunta dalla idea positiva di tutte le sue parti e quindi dell'ultima ancora, converrebbe aver *determinato l'ultimo termine d'una progressione che non ha termine*, perchè aver si potesse la somma d'una progressione senza fine, il che implica contraddizione.

829. E questa ci vien pure manifestata dai risultati del calcolo. Il calcolo infatti I. col mostrarci all'evidenza che se si dasse la somma d'una progressione decrescente all'infinito, esser dovrebbe eguale ad una quantità limitata, che coll'infinito ripugna, ci prova che non può darsi, subitochè la sua esistenza è vincolata ad un'assurdo. II. Il calcolo ci mostra pure che la indicata somma non può darsi, perchè fondato sopra altri riflessi, piuttosto che condurci, ad un risultamento identico al citato, come dovrebbe se la cercata somma fosse una real quantità, ci porta a conchiudere che invece di essere una quantità limitata, debbe questa somma essere eguale o a zero, o all'infinito. Ed infatti l'ultimo termine della progressione decrescente infinita, se questa potesse darsi, sarebbe o *zero*, *o quantità*. Se si dice che debbe essere *zero* poichè allora solo la nostra mente è obbligata ad arrestarsi dall'immaginar conseguenti più piccoli di lui, in tale ipotesi, inverso l'ordine della progressione, da decrescente diverrebbe

essa crescente (821), l'ultimo termine zero passerebbe ad essere il primo, e quindi zero essendo il primo elemento, zero sarebbero tutti i termini che derivano per moltiplicazione dal 1.°; e zero per conseguenza la di lor somma. Se si dice che l'ultimo termine per quanto tenuissimo, pur è quantità, allora inverso l'ordine della progressione, essa diverrebbe crescente, ed essendo il primo termine qualche cosa, e non zero, i suoi termini crescenti progredirebbero senza fine, e la loro somma sarebbe un numero infinito.

830. Dall'esposto dunque rilevasi che a rigore non solo le progressioni crescenti, ma ancora le decrescenti, allorchè si considerano protratte all'infinito, sono mancanti di ultimo termine, e di somma determinata; che in entrambe la somma va crescendo col numero de' termini, ma che ciò non ostante v'è tra di esse sotto questo riguardo un'essenziale differenza; mentre nelle crescenti coll'estendersi di mano in mano il numero de' termini può la somma passare ad eccedere qualunque quantità immaginabile; nelle decrescenti all'opposto qualunque sia il numero de' termini cui ci estendiamo, v'è sempre un limite determinato cui può la somma sempre più avvicinarsi, ma raggiunger giammai.

831. Il rimarco di questa essenziale differenza tra le progressioni crescenti, e decrescenti serve a sciogliere il famigeratissimo sofisma di Zenone sul moto.

Sebbene suppongasi, Egli dice, *Achille* 10 *volte più veloce d'una Tartaruga, se questa lo precede di una lega, Esso non potrà mai raggiungerla; poichè quando Achille avrà percorsa la prima lega, la Tartaruga avrà percorso il decimo d' una seconda lega: quando Achille avrà percorso questo decimo, la Tartaruga avrà scorso un decimo d' altro decimo, e così indefinitamente mentre Achille percorre l' antecedente, la Tartaruga scorre il conseguente termine d' una progressione, sicchè fra*

Achille e la Tartaruga vi sarà sempre una distanza, che va ognor più diminuendo, perchè espressa da ciascun de' successivi termini d'una progressione decrescente, ma che non va ad annullarsi giammai, perchè i termini progrediscono all' infinito.

L' errore tutto riposa nell' opinione, che la somma degli spazii che possono percorrersi in progressione decrescente all' infinito, sia una quantità infinita, quando che dessa ha per limite $^{am}/_{m-1}$, cioè $^{10}/_{9}$ nel nostro caso in cui a esprime una lega, e il quoto $^{1}/_{m}$ della progressione è $^{1}/_{10}$.

Ed infatti dopo che per mezzo dell' applicazione delle stabilite teorie, ci siamo convinti che $^{10}/_{9}$ di lega è la somma di tutti gli spazii immaginati in progression decrescente ed in numero maggiore di ogni assegnabile, sicchè possa reputarsi trascurabile e come zero l' ultimo termine, che esprime l' intervallo fra la Tartaruga ed Achille, intervallo che appunto è zero quand' essa è raggiunta, ognun vede che quest' incontro debbe accadere quando Achille ha percorso $^{10}/_{9}$ di lega. Ed infatti se Achille distante una lega dalla tartaruga, la raggiugne dopo $^{10}/_{9}$ di lega, ossia dopo una lega e $^{1}/_{9}$, un solo nono di lega, ossia uno spazio dieci volte minore è quello che nello stesso tempo la tartaruga ha percorso, e tal debbe essere perchè di lui 10 volte più tarda (a).

(a) Ed a vie meglio svolgere le idee necessarie per rovesciar dalla sua radice il sofisma di Zenone, e togliere ogni dubbiezza che pur lascia nello spirito l' espressione di un numero infinito di successivi spazioli, e tempuscoli, che conciliar non sappiamo con una durata, e con uno spazio limitato, supponiamo che diminuendosi sempre più la distanza fra Achille, e la Tartaruga, sia finalmente giunto Achille a non distarvi che di un passo, per ognun de' quali suole impiegare un secondo. L'Oriuolo batte intanto anche questo

832. Un problema analogo a questo di Achille è quello *dell' indice de' minuti*, *che mentre trovasi sul*

---

secondo: Achille avrà fatto il suo passo, e troverassi ove era la Tartaruga, mentre essa si sarà avanzata di uno spazio eguale al decimo del passo di Achille. Per continuare ora la progressione con Zenone, dir converrebbe: quando Achille in un decimo di secondo avrà fatto un decimo di passo, la Tartaruga avrà percorso un decimo di decimo, ossia un centesimo dello spazio compreso dal passo di Achille ec, ec; ed è infallibile che per tutte queste frazioni di tempo, e di spazio, che progrediscono in serie decrescente all' infinito, la Tartaruga non può esser raggiunta *giammai*: la somma però di questo numero infinito di frazioni di tempo e di spazio è minore di un minuto secondo, e di un passo: quindi è che mentre noi ci perdiamo in queste divisioni, e suddivisioni immaginarie di spazio, e di tempo, l' Oriuolo ha già battuto un' altro secondo, Achille ha fatto un' altra volta il suo passo, e la Tartaruga che precedeva Achille solo di uno spazio decimo di quello che è dal di lui passo compreso, e che *mai* dovea esser raggiunta, non avendo percorso in quest' altro secondo che un' altro decimo dello stesso spazio, trovasi superata da Achille per una distanza eguale ad 8 decimi del di lui passo, poichè quel *mai* era un *mai* non *assoluto*, ma *relativo* ad un supposto numero infinito di tempi infinitesimi contenuti in una frazione di tempo si piccola qual' è un secondo, nella quale anzicchè ravvisare numero presso che infinito di parti, non vi osserviamo per l' *Uomo* che una durata poco men che individua; poichè Egli non si accorge di cambiamenti nei suoi modi di essere e azioni, senza che il tratto scorra di poco men di un secondo. Nè con ciò pretendiamo di negare la divisibilità del tempo in parti più piccole di esso. La luce nell' ipotesi dell' emmissione percorre 70 mila leghe in on secondo, e poichè in 70 mila leghe vi sono da 272860 milioni e più di punti discernibili quali sono i millimetri, e l' istante in cui la luce percorre il 1° non è lo stesso di quello in cui percorre il 2°, il 3° millimetro, ec., è chiaro che un secondo può dividersi in più di 272860 milioni di istanti. E poichè tutto è relativo, se un' Essere vi fosse di siffatto organismo fornito che una qualsiasi di quelle minime azioni, una espirazione p. e. che noi facciamo in un secondo,

punto delle 12, essendo l'indice delle ore sul punto di un' ora in una mostra, cercasi in che punto do-

---

fosse da esso eseguita in uno di quelli istanti che nel secondo abbiamo ora distinto, questa durata nello scorrer della quale Egli può accorgersi d' una sua azione, d' un cambiamento nei suoi modi di essere, sarebbe per esso l' unità di misura del tempo, e poichè il tempo non è che il numero di queste misure contenute nella durata totale che vogliamo apprezzare, e tutto consiste nel quante volte la misura è contenuta nel misurato, così un secondo per quest' essere è ciò che sono per noi 272860 milioni di secondi, cioè sopra 8800 anni, siccome all' opposto gli 8800 anni che scorrono per quest' essere, sono un solo istante per noi, che in questa durata non conosciamo successione, pel motivo medesimo per cui ad un solo istante riducesi la stessa eternità per l' ENTE che mutazioni non soffre. L' essere dunque da noi immaginato saria in grado di distinguere nel passo che fa Achille per sorpassar la Tartaruga delle frazioni di tempo, e spazio che non sappiamo noi apprezzare, scorrerebbero per quest' essere migliaja d' anni prima che Achille compiuto avesse il suo passo, ma queste migliaja di anni, che equivalgono ad un solo secondo per l' Uomo, passerebbero finalmente, e la Tartaruga sarebbe raggiunta, cosicchè la progressione contemplata ancor da quest' essere, sebbene presenterebbegli più termini distinguibili che a noi non offre, pure quando giunta fosse a quelle frazioni di tempo più piccole di quelli istanti per lui individui, che corrispondono ai secondi per noi, non sarebbe più oltre continuabile, e un ulterior divisione diverria immaginaria. Frattanto finchè scorrono frazioni reali di tempo, la tartaruga non è mai raggiunta, e nol sarebbe giammai in senso assoluto, cioè la proposizione di Zenone cesserebbe di essere impossibile, se una quantità limitata di tempo, e di spazio fosse suscettibile di dividersi all' infinito in parti reali, nella quale ipotesi assurda potrebbero esistere degli esseri che trovassero l' *eternità* in un *secondo*, e l' *immensità* nello spazio di un *passo*; ed è perciò che confutazioni poco soddisfacenti del citato sofisma si hanno da tutti que' *filosofi trascendentalisti* sì antichi che moderni, i quali poco valutando il riflesso che se la nostra immaginativa sa ideare suddivisioni senza concederle termine, alle forze e ai voli del pensiero non corrisponde la realtà delle cose, ammettono la divisibilità all' infinito dello spazio, e del tempo.

vrà il 1.° *raggiungere il* 2.° Addottando la soluzione più facile, e diretta, noi già vedemmo (515) ciò accadere dopo che ha percorso lo spazio di 25 minuti, e $^{5}/_{11}$: lo stesso risultato otteniamo però se si rifletta che mentre l' indice de' minuti va nella mostra dal punto delle 12 a quello di un' ora, percorre cioè 5 minuti, l' indice delle ore 12 volte più lento percorre $^{1}/_{12}$ di 5: mentre l' indice de' minuti percorre questo 2.° spazio, l' indice delle ore ne percorre un' altro 12 volte più piccolo, ec., se si rifletta cioè che la somma degli spazii percorsi dall' indice de' minuti per raggiugner l' altro non è che la somma d' una progressione decrescente all' infinito, in cui il 1.° termine a è 5 minuti, e il quoto costante $^{1}/_{m}$ è $^{1}/_{12}$. Infatti questa somma è espressa della formola $s = {}^{am}/_{m-1}$ (§. 828) che nel nostro caso diventa $s = {}^{5.12}/_{12-1} = 5 + {}^{5}/_{11}$.

833. Ecco un' altro problema che può pure sciogliersi colla formola del limite delle progressioni continuate all' infinito.

Qual' è la frazione ordinaria equivalente a una decimale periodica p. e. a 0,324324324 ?

In grazia delle acquistate nozioni è ben chiaro, che le frazioni periodiche son *progressioni per quoto decrescenti indefinite*. Così la indicata non è che

$$\frac{324}{1000} + \frac{324}{1000000} + \frac{324}{1000000000} + \ldots \text{ ec. all' infi-}$$

nito, nella quale il 1.° termine a è 0,324; il quoto $^{1}/_{m}$ è $^{1}/_{1000}$; e la frazione ordinaria equivalente è la somma di tutti i termini, che sarà perciò espressa dalla formola

$$s = \frac{am}{m-1} = \frac{0{,}324 \times 1000}{1000-1} = \frac{324}{999},$$

come ottenemmo ai (§. 431, e 520).

III. Quesito. Dati a, q, u, si trovi n, ed s.

834. La s è data immediatamente da (B) (§. 822).

La n esistendo nell'equazione (A) (§. 821) allo stato di esponente, non può dedursene il valore che per mezzo del seguente calcolo logaritmico.

Essendo $u = aq^{n-1}$, si avrà anche $\mathrm{L}u = \mathrm{L}aq^{n-1}$ $= \mathrm{L}a + \mathrm{L}q^{n-1}$ (§. 757) $= \mathrm{L}a + (n-1)\mathrm{L}q$ (§. 764).

Quindi $\mathrm{L}u - \mathrm{L}a = (n-1)\mathrm{L}q$;

e quindi $\frac{\mathrm{L}u - \mathrm{L}a}{\mathrm{L}q} = n-1$; ed (H) $n = \frac{\mathrm{L}q + \mathrm{L}u - \mathrm{L}a}{\mathrm{L}q}$.

Eccone un' applicazione.

835. *Una Città che anni addietro non contenea che 10000 abitanti, or ne contiene 14641, ed è uniformemente cresciuta la popolazione di un decimo all' anno. In quanti anni si è fatto quest' aumento?* Risultato: in anni 4.

Se al fin del 1.° anno è cresciuta la popolazione di $^1/_{10}$, cioè da 10000 è divenuta 11000, essendo $^{11}/_{10}$ il quoto di 11000 diviso per 10000, $^{11}/_{10}$ è dunque il quoto costante q della progressione; 10000 è il 1.° termine a, e 14641 è l' ultimo u: il numero degli anni, ne' quali si è fatto quest' incremento è il numero de' termini meno il primo: che si aveva al cominciar degli anni, è dunque $n-1$, e perciò è noto quando siasi trovato n. Qui dunque trattasi di trovare n, dati a, q, u: dunque sostituendo nella formola (H) i valori particolari del nostro esempio, avremo

$$n = \frac{L^{11}/_{10} + L14641 - L10000}{L^{11}/_{10}}$$; e dalle tavole si ha

$$n = \frac{0,0413927 + 4,1655707 - 4}{0,0413927} = 5$$: dunque il numero degli anni cercati, che è $n-1$ è $5-1 = 4$.

ARTICOLO IV.

Soluzione de' Problemi che dipendono dalle proporzioni per quoziente.

836. La teoria delle proporzioni per quoto è necessaria per la soluzione d' un gran numero d' interessanti problemi de' quali alcuni dipendono unicamente da essa, ed altri, come vedremo, complessivamente e dalla teorica delle proporzioni, e da quella già data delle equazioni di 1.°, e 2.°, grado.

Regola d' oro semplice diretta, e inversa.

837. *Se si brami sapere quanti scudi costeranno 12 canne di panno, posto che 20 zecchini è stato il valore di canne* 4, noi ci avveggiamo che come il 4 *canne* è contenuto 3 volte nel 12 *canne*, così il 20 *zecchini* prezzo delle 4 canne debbe esser contenuto nel prezzo delle 12 canne, che è l' ignoto x che ricerchiamo: dunque le 4, e le 12 canne formano una ragione di quoto eguale a quella che fanno 20, e x zecchini: Dunque

$$4^{can} : 12^{can} = 20^{z} : x^{z}.$$

$$\text{ed } x = \frac{12.20}{4} \text{ (§. 801)} = 60\ ;$$

sicchè zecchini 60 sono il prezzo delle 12 canne di panno.

Or questo e tutti que' problemi in cui dopo un diligente esame delle loro condizioni rilevasi, che la cosa cercata ha con un' altra quello stesso rapporto di continenza, che passa tra due altre quantità note, tutti questi problemi si sciolgono per mezzo della *Regola d'oro*, in cui ciò che si cerca è realmente il 4.° termine d' una proporzione che è l' algebrica espressione del quesito (a).

(a) Conviene profondamente scrutinar l' indole dei dati che il problema offre al confronto per decidere se, come *apparisce*, passi *realmente* tra due quantità quello stesso rapporto di continenza, che v'è fra due altre. Così a primo aspetto parrebbe che *quante volte un decimetro sta in un metro, cioè dieci volte, altrettante il decimetro cubico stasse nel metro cubico*, mentre vi è contenuto in vece *mille* volte, come si vedrà in Geometria: parrebbe che quante volte un minuto secondo è contenuto in 8 secondi, così lo spazio di metri 4,9 percorso da un grave nel 1° secondo di sua caduta fosse contenuto nello spazio percorso in 8 secondi, il che esigerebbe per quest' ultimo spazio m39,2 quando che è 313,6 (§. 794): parrebbe che come 2 decigrammi peso d' un diamante è *contenuto 4 volte in 8 decigrammi peso d' altro diamante, così pure il prezzo del primo fosse 4 volte più piccolo del secondo*, quando lo è per convenzione commerciale 16 volte: parrebbe che *se la terra si allontanasse dal sole pel quintuplo della distanza attuale, vi volessero 5. soli per riscaldarla, e illuminarla come lo è attualmente*, quando che in vece ve ne vorrebbero 25, ec. Quindi è che per non cadere in inganno nella disamina se il problema possa o no tradursi in proporzione, è indispensabile la cognizione di tutte le leggi fisiche, e convenzionali, che hanno relazione ai *dati*; ed è pure utilissima l' avvertenza trascurata dalla maggior parte degli Aritmetici di istituir le ragioni fra *termini della medesima specie*,

838. E per uniformarci costantemente ad uno stesso metodo nella traduzione de' problemi in proporzione, il che tanto giova alla chiarezza delle idee, notiamo 1.° che delle 4 quantità, che dee il problema presentarci, due sono sempre d' una specie, come nel nostro caso il 4, e il 12 *canne*, e due d' un altra come il 20 *zecchini*, e il *n.°* x di *zecchini* : 2.° che i due omogenei, un de' quali è ignoto diconsi i termini *principali*, perchè un di essi è la cosa che principalmente interessa, siccome l'oggetto della ricerca; e coi termini principali formasi la 2ª ragione, ponendo la x per conseguente : 3.° che con ciascuno di questi due termini principali ha relazione uno dei due termini dell' altra specie : così col 20 zecchini ha relazione il 4 *canne*, e col *n.°* x di zecchini il 12 *canne* come *merce* al rispettivo suo *prezzo*; e perciò il 4 *canne* chiamasi *eterogeneo relativo* al termine principale 20 *zecchini*, e il 12 *canne eterogeneo relativo* al termine principale x *zecchini*, e con questi due eterogeni ai termini principali, ed omogenei tra loro si costituisce la prima ragione.

839. Ma qual di essi esser dovrà l' antecedente, e quale il conseguente? Ecco per questa determinazione il criterio. Poichè la loro collocazione debbe esser tale da formare una ragione eguale alla 2ª, perciò se tale è l' indole de' problemi che in genere l' incremento delle

---

poichè sebbene in una proporzione *astratta* possono in varii modi collocarsi i termini senza nuocere alla proporzionalità (806), pure tra i soli termini della specie stessa può esaminarsi se v' è o no rapporto di continenza eguale a quello che passa tra due altre quantità finchè i termini sono concreti, e tali son sempre allorchè trattasi di tradurre in proporzione un quesito.

quantità d' una data specie seco porti ancora l' incremento de' loro relativi eterogenei, come accade nel nostro caso, in cui non possono crescere gli *zecchini* esprimenti il prezzo se non crescono ancora le *canne* di panno che ne sono l' oggetto; in tal caso siccome quante volte il *relativo del termine noto* è contenuto nel elativo dell' ignoto, altrettante il noto è contenuto nell' incognito, così con questo stesso ordine *diretto* vanno scritti i termini onde formino realmente una proporzione, va cioè posto per antecedente nella prima ragione l' eterogeneo relativo all' antecedente della 2^a; e la *Regola d' oro dicesi diretta*, *e in ragione* o *proporzione diretta* diconsi pure i termini stessi.

840. Ma se p. e. si cerchi « *Quanto tempo un Corriere A veloce come* 1 *impiegherà per giungere da Roma a Parigi*, *mentre B veloce come* 2 *vi è giunto in* 8 *giorni* » in tal caso è chiaro che non si può in genere immaginare aumento di tempo senza supporre diminuzione nella velocità, e perciò se la velocità di B è doppia di quella di A, ne segue non già che il tempo impiegato da B sia doppio di quello impiegato da A, ma viceversa il tempo di A sia doppio di quello di B, o in altri termini, perchè la velocità di A è contenuta due volte in quella di B, il tempo impiegato da B è contenuto due volte in quello di A; e perciò chiamando V, e T la velocità e tempo di B, e V', e T' la velocità e tempo di A, ecco algebricamente espressa l' or indicata proporzione.

$$V' : V = T : T', \text{ e } T' = \frac{VT}{V'}$$

$$1 : 2 = 8 : x, \text{ e } x = \frac{2.8}{1} = 16;$$

dalla quale rilevasi che A impiega un tempo doppio appunto perchè è per metà men veloce di B; ed in questo e in simili casi, quando cioè l' incremento nei termini principali esige una diminuzione nei lor relativi, si vede che ad oggetto di formar la 1ª ragione uguale alla 2ª, sicchè possa comporre con lei una proporzione, convien *inverter* l'ordine, metter cioè per antecedente il relativo del conseguente ignoto della 2ª ragione, e per conseguente il relativo dell' antecedente; ed allora la *Regola d' oro dicesi inversa, ed inversamente proporzionali* diconsi pure i termini stessi.

841. Ben chiaro è però che la distinzione della regola d' oro in *diretta*, *e inversa* va a riferirsi alla diversa indole de' problemi, e non marca diversità alcuna nelle proporzioni, le quali sebben abusivamente vengano anch' esse chiamate *dirette*, *o inverse*, sono sempre l' eguaglianza di due ragioni.

842. È pure a notarsi che anche quando trattisi di termini inversamente proporzionali, pure nella traduzione del problema in proporzione per evitare ogni pericol di errore possiamo non invertere il posto de' termini corrispondenti facendo sì che nel posto dell' antecedente della 1ª ragione vi sia il *relativo* dell' antecedente della 2ª, come accade quando i *termini sono direttamente proporzionali* poichè ad ottener questo intento basta fare un' altra inversione, porre cioè ciascun de' termini relativi formanti la prima ragione per denominatore dell' unità nel proprio suo posto. Infatti se $V : V' = T : T'$, dividendo ambi i termini della prima ragione per $V V'$, il che non l'altera (805) si ha

$$\frac{1}{V'} : \frac{1}{V} = T : T'.$$

Quindi per tradurre i problemi in proporzione, ecco la regola prattica cui dobbiamo attenerci.

843. *Il termine relativo al noto omogeneo al richiesto sta al relativo del termine richiesto, come il noto omogeneo al richiesto sta al richiesto*, se i termini sono direttamente proporzionali.

844. E se sono inversamente proporzionali *sta* 1 *diviso pel relativo del termine noto omogeneo al richiesto* ad 1 diviso pel relativo del termine richiesto, *come il noto omogeneo al richiesto sta al richiesto*; dal che risulta che la sola differenza nella disposizione de' termini quando sono in ragione inversa tutta consiste nel porre per denominatori dell' unità i termini relativi ai principali senza muoverli dal posto che avrebbero se fossero in ragione diretta. Ed ecco di ambedue queste regole l' applicazione.

845 *Essendo il moto delle stelle fisse a tenore dei calcoli di Flamsteed di* 1° 23' 20" *ogni secolo, in quanti anni percorreranno l' intero circuito del Cielo, cioè* 360°? Risultato In 25920 anni periodo chiamato anno platonico. In fatti

$$1^{\circ}\ 23'\ 20'' : 360^{\circ} = 100 : x \text{ ovvero}$$

$$5000'' : 1296000'' = 100 : x\text{, donde } x = 25920\ .$$

846 *Usando in commercio di detrarre dal così detto peso lordo di alcuni oggetti il 20 p. e. per ogni cento libre; onde avere il peso netto, qual' è il peso netto di Libre 941, 75?* Risultato: Libre 753, 4.

Peso lordo a Peso lordo, come netto a netto

$$\text{Infatti}\quad 100 : 941{,}75 = 80 : x\,,$$

$$\text{ed } x = \frac{941{,}75\times 80}{100} = \frac{941{,}75\times 8}{10} = 753{,}4\ .$$

847 *Pel trasporto d' una merce da Perugia a Bologna è fissato il porto a scudi 1,25 al cento: quanto si dee spen-*

dere pel trasporto di Libre 23,25? Risultato scudi 0,290625 ossia prossimamente baj. 29.

848 *In un paese ove la misura del grano è libre* 400, *il prezzo del grano è scudi* 3, 60: *quanto vale al Rubbio di Libre* 640? Risultato: Scudi 5,76

Libre a Libre come prezzo a prezzo

$$400 : 640 = 3,60 : x = 5,76.$$

849 *E' legge scoperta da Boyle, e Mariot, che dentro certi limiti l' aria, e tutti i gas acquistano un volume* 2, 3, 4 *volte più piccolo del primitivo, se* 2, 3, 4 *volte più grande si rende il peso che gli comprime, cioè* » i volumi dei gas sono in ragione inversa de' pesi comprimenti. » *Ciò posto se nel tubo di Mariotte, sotto il peso d'una colonna atmosferica eguale al peso di* 76 *centimetri di mercurio l' aria ha un volume di* 60 *centimetri, che volume prendera quando al peso di tutta la colonna atmosferica comprimente questo volume aggiungiamo il peso di* 3 *altre atmosfere, cioè una colonna di mercurio che sia* 3 *volte centim.* 76, *sicchè il total peso sia quello d' una colonna di mercurio alta metri* 3,04? Risultato metri 0,15.

Infatti (§. 840) . $3^m,04 : 0^m,76 = 60 : x = 0,15.$

Ed in genere chiamato V il primitivo volume dell' aria sotto il peso P, e V′ il volume incognito che passa ad acquistare sotto il nuovo peso P′, avremo

$$\frac{1}{P} : \frac{1}{P'} = V : V' \text{ (§. 844)},$$

o, moltiplicando ambi i termini della 1ª ragione per PP′,

$$\text{si ha } P' : P = V : V', \text{ donde } V' = \frac{PV}{P'} = \frac{P}{P'}V.$$

Ora se cerchisi il volume che una data quantità di aria va ad acquistare cambiando *temperatura*, *e pressione*, conviene aver riguardo ad ambedue queste cause di alterazione, e perciò in tal caso

$$V' = \frac{P}{P'} V \text{ diventa } V' = \frac{P}{P'} V \times \frac{1+0,00375T'}{1+0,00375T},$$

quando a V si sostituisca il volume primitivo già ridotto pel cambiamento di temperatura in forza del quale il volume V diventa $V \times \frac{1+0{,}00375T'}{1+0{,}00375T}$ (§. 513).

Queste cause di alterazione possono talvolta compensarsi a vicenda come osservasi nel seguente problema.

850. *Che volume avranno alla temperatura di 20.° gradi, e sotto la pressione di metri* 0,72 *cento litri di gas a* 40 *centigr, e sotto la pressione di metri* 0,770234?

Applicando a questo caso la formola superiore, troviamo che il gas conserva il volume di 100 litri a meno di un millilitro, mentre sotto una stessa pressione per la sola influenza della temperatura sarebbesi ridotto a litri 93,478 (§. 514).

Regola d' oro composta diretta, inversa, e mista.

851. Talvolta invece di 4 sono in maggior numero le quantità, che presentano i problemi traducibili in proporzioni; e la loro soluzione dipende allora dalla così detta *Regola d' oro composta*, che può esser *diretta, inversa*, e *mista*; ma che qualunque ella sia, è sempre *un unica proporzione* in cui si cerca il quarto termine, come la regola d' oro semplice, ed è contraddistinta col titolo di *composta*, sol perchè una delle due ragioni è composta di più altre, come chiaramente i seguenti esempii dimostreranno.

852. *Se* 10 *operaj in* 4 *giorni, lavorando* 6 *ore al giorno, hanno fatto* 16 *metri di lavoro, quanti metri faranno* 15 *operaj in* 12 *giorni lavorando* 8 *ore al giorno, posto che di tutti eg uale sia il giornaliero risultato?*

Ecco un problema che ci offre 7 quantità cognite ed una ignota, che è un certo numero di metri di la-

voro. Or questo numero oggetto della ricerca ha relazione agli *Operaj* 15, che lavorano *in giorni* 12 ogni giorno *ore* 8, siccome effetto alla causa e agli accessorii da cui è prodotto; e i *dati* pel ritrovamento di questo numero x di metri si hanno dalla notizia, che *Operaj* 10 lavorando per *giorni* 4 ogni giorno *ore* 6 hanno prodotto 16 metri, sicchè in questo e in simili problemi in vece di esser *due* come nelle regole del tre semplici, sono molti gli elementi relativi a ciascùn dei 2 termini principali, mentre i relativi al principale noto sono *Operaj* 10, *giorni* 4, *ore* 6: e relativi a quel che si cerca sono *operaj* 15, *giorni* 12, *ore* 8.

Or quando tali sono gli elementi eterogenei, che col *crescere di ciascuno di essi crescon* pure i termini principali cui sono relativi, come nel nostro caso; in cui col crescere degli *Uomini*, dei *giorni* e delle *ore* di lavoro in ogni giorno, cresce pure il lavoro, la regola del tre composta dicesi *diretta*, ed ecco come la nostra mente non potendo a se stessa essere conscia di molti rapporti ad un tempo, esaminandone uno alla volta, converte a poco a poco la complicata ricerca in una semplice proporzione.

Operaj 10 lavorando 4 giorni fanno lo stesso lavoro di 4 volte 10, ossia di 40 operaj in un giorno, e questi 40 lavorando per ore 6 fanno lo stesso lavoro che 6 volte 40 cioè 240 operaj in un'ora sola. Dunque 240 operaj formano in un' ora quel lavoro stesso che fanno 10 operaj lavorando per 4 giorni 6 ore al giorno. Parimenti 15 operaj lavorando per 12 giorni fanno lo stesso lavoro, che 12 volte 15, cioè 180 operaj in un sol giorno, e questi 180 lavorando per ore 8 fanno lo stesso lavoro che 8 volte 180, cioè 1440 operaj in un' ora sola. Dunque questi 1440, che lavo-

rano per un' ora possono sostituirsi ai 15 operaj, che lavorano per 12 giorni ore 8 al giorno; e perciò il sovracitato problema può a questo ridursi « *Se 240 operaj fanno 16 metri di lavoro in un' ora, 1440 operaj quanti ne faranno nel medesimo tempo?* » Questo si scioglie colla semplice regola d' oro diretta, cioè

operaj ad operaj, come metri a metri

240 : 1440 = 16 : x = 96 (§. 843)

Dunque 1440 operaj in un' ora, o ciò che è lo stesso 15 operaj in 12 giorni lavorando 8 ore al giorno fanno metri 96, che è appunto la cosa che ricercavasi.

853. *Se 20 operaj lavorando per 15 giorni 8 ore al giorno hanno fatto un dato lavoro, quanti operaj avrebbero abbisognato per farlo in 30 giorni, lavorando ogni giorno 10 ore?*

In questo quesito la cosa cercata è un numero di operaj. Ad essi hanno relazione i giorni 30, e le ore 10 a impiegarsi in ciascuno di questi giorni per compiere il lavoro, e serve di dato per questa scoperta la notizia che 20 operaj hanno fatta un' opera eguale in giorni 15 lavorando 8 ore ogni giorno.

Or quando tali sono gli elementi che col crescere di *ciascuno di essi decrescono* i termini principali cui son relativi, come nel nostro caso in cui crescendo il numero de' *giorni*, e delle *ore* di lavoro in ciascun giorno, il numero degli operaj necessarii per eseguire una data opera dee diminuire, la regola dicesi *composta inversa*.

E frattanto per ottenere la soluzione del proposto quesito riflettasi che un lavoro di 15 *giorni* a 8 *ore* al giorno equivale ad un lavoro di 15 volte 8 ore, cioè di ore 120: e un lavoro di 30 *giorni* a 10 *ore* per giornata non è che un lavoro di 30 volte 10 ore; cioè di ore 300; sicchè al problema può darsi quest' altro

aspetto più semplice « *Se per condurre a termine un lavoro in ore* 120 *è d' uopo di* 20 *operaj*, *per ultimarlo in ore* 300 *quanti operaj occorrerranno?* » La regola d' oro inversa semplice ci dà (844)

Ore	ad	Ore,	come	Operaj	ad	Operaj
$^1/_{120}$	:	$^1/_{300}$	=	20	:	x=8

Dunque operaj 8 si richieggono per eseguire il dato lavoro in ore 300, ossia in 30 giorni a 10 ore per giorno.

854. *Se* 4 *operaj hanno scavato* 12 *metri cubici in terreno resistente come* 2 *in giorni* 8, *operaj* 20 *per iscavare* 60 *metri cubici in terreno resistente come* 3, *quanto tempo impiegheranno?*

Al numero x de' giorni che è la cosa cercata hanno relazione i 60 *metri cubici*, la *resistenza* 3 del terreno, e *gli operaj* 20, che deggiono far lo scavo; e di *dato* per questa scoperta ci serve il sapere, che *metri cubci* 12 sono stati scavati in suolo *resistente come* 2 *da operaj* 4, essendo questi gli elementi relativi ai giorni 8, in cui è stato fatto lo scavo.

Ora il numero de' giorni a impiegarsi nel lavoro cresce col *numero de' metri di scavo*, e colla *resistenza* del suolo, mentre diminuisce col crescer del *numero degli operaj*. E quando tali son gli elementi dati da un problema, che i termini principali crescono col *crescer d' alcuni e col decrescere d' altri* elementi a lor relativi, che son cioè in *ragion diretta* di alcuni, e nell' *inversa* di alcuni altri, come nel citato esempio, la regola d' oro dicesi *composta mista*.

Ed ecco il ragionamento che ci porta alla soluzione del problema. L' escavazione di *metri* 12 *in suolo resistente come* 2 equivale allo scavo di 2 volte 12 os-

sia di 24 in suolo resistente come 1, e così lo scavo di 60 *metri in suolo resistente come* 3 equivale allo scavo di 3 volte 60, ossia di 180 metri parimenti in terreno resistente come 1, sicchè il superior quesito può prendere quest'altro aspetto « *Se da* 4 *operaj che hanno scavato* 24 *metri cubici si è impiegato il tempo di giorni* 8, *per* 20 *operaj che hanno a scavare* 180 *metri cubici in terreno egualmente resistente quanto tempo si esigerà* ! « E poichè il tempo che si esige, affinchè sieno scavati 24 metri da 4 uomini è lo stesso del tempo che si esige affinchè la quarta parte di 24, ossia metri 6 sia scavata da un solo, e così pure poichè il tempo che si esige per lo scavo di 180 metri fatto da uomini 20 non è che il tempo che impiega ognun di essi per la ventesima parte di tutti i 180 metri, ossia per 9 metri, così finalmente il primo complicato quesito sarà ridotto a quest' altro semplicissimo; » *Se* 6 *metri di lavoro esigono* 8 *giorni*, 9 *metri di lavoro a circostanze eguali quanti ne esigeranno* ? La regola d' oro semplice diretta ci da (843)

metri a metri come giorni a giorni

$$6 : 9 = 8 : x = 12$$

Dunque giorni 12 si esigono perchè un operajo scavi 9 metri, ossia perchè 20 operaj scavino 60 metri in suolo resistente come 3.

855. Se or ci facciamo a tener dietro alle operazioni eseguite dopo gli esposti ragionamenti in tutti e tre i citati esempii, apparisce che la proporzione da cui ricaviamo il valor dell' incognita in tutti e tre i casi, ha per 2^a ragione quella che è semplicemente formata dagli *omogenei principali*, un de' quali è la cosa cercata, e per 1^a ha una ragione che è la *composta* di

tutte e singole le ragioni semplici formata da ciascuna coppia omogenea degli *elementi relativi*, fissa la regola stabilita, che essi esistono in qualità di denominatori dell' unità, quando sono in ragion inversa coi termini principali, il che può ognuno verificare indicando, e non eseguendo le operazioni occorse per giungere ad impiantar la proporzione da cui rilevasi la cosa richiesta.

856. Quindi è che fatta la dichiarazione, che quando nei problemi v' è qualche quantità semplice relativa *in ragion inversa* ai termini principali, non essa ma l' unità per essa divisa è ciò che considerasi per elemento, conchiuder possiamo che » *Il prodotto di tutti gli elementi eterogenei relativi alla cosa nota omogenea alla cercata sta al prodotto di tutti gli elementi relativi alla cosa cercata, come il termine principale noto al cercato*. » Ecco in queste brevi parole tracciato il processo a tenersi per tutte le regole d' oro le più composte sì *dirette che inverse*, e *miste*, che a tenor del diverso numero de' termini noti che contengono, sono dagli Aritmetici contraddistinte col nome di regole del 5, del 7. del 9, dell' 11, ec., per ciascuna delle quali inutilmente vien dagli Empirici sovracaricata di regole la memoria degli Apprendisti; ed ecco di questo canone le applicazioni,

857. Premessa la notizia che pesi specifici chiamansi que' *diversi* pesi che sotto uno stesso volume ci offrono i varii corpi, e che i Fisici sogliono riferire ad un comun termine di confronto, che è l' acqua stillata per i liquidi, e i solidi » *Qual' è il peso sp. dell' argento relativamente all' acqua, posto che una verga di* 6 *centilitri d' argento pesi* 630 *grammi, e una verga di* 4 *centilitri d' oro pesi* 770 *grammi, sapendosi che il peso sp. dell' oro relativamte all' acqua è* 19, 25 *per la fatta sperienza che mentre un centimetro cub. d' acqua pesa un grammo* (475), *un centimetro cub. d' oro pesa grammi* 19,25 ? Risultato: il peso sp. dell' argento è 10,5.

Noi riflettiamo che se 6 centilitri d'argento pesano grammi 630, un centilitro solo pesar dovrà $^{630}/_{6}=$ 105, e così se 4 centilitri d' oro pesano 770 grammi, un centilitro, solo peserà $^{770}/_{4} = 192,5$. Dunque i pesi dell' oro e dell' argento sotto il volume stesso di un centilitro e quindi d' altra qualunque misura sono tra loro come grammi 192,5 : 105; dunque il peso dell' oro sotto un volume eguale a quello dell' acqua, peso che è 19,25 avrà al peso dello stesso volume d' argento, ossia al peso sp. dell' argento paragonato all' acqua lo stesso rapporto: Dunque

$$192,5 : 105 = 19,25 : x = 10,5.$$

858. E a tal risultato si potea giunger senz' altro ragionamento coll' applicazione del canone ora stabilito. Ed in vero se il peso specifico, o la densità di un corpo è tanto maggiore quanto maggiore è il suo peso, e minore il suo volume, convien conchiudere che i pesi sp., o le densità de' corpi sono nella *ragion composta mista della diretta de' loro pesi, e dell' inversa de' loro volumi* (854), e perciò chiamato V, P, D il volume, peso, e densità d' un corpo A, e V' P' D' il volume peso, e densità d' un corpo B, avremo (856)

$$\frac{P}{V} : \frac{P'}{V'} = D : D';$$

il che suol dai Fisici esprimersi anche più brevemente per mezzo della così detta equazione proporzionale »

$D = \frac{P}{V}$ » *densità o peso sp. di un corpo eguale al suo peso diviso pel suo volume* » formola, e parole che sebbene a rigore sien vuote di senso, pure sono per la lor concisione utilissime, posta la convenzione

che l' eguaglianza debba intendersi non fra due *quantità*, ma fra due *rapporti* costituenti la sovra indicata proporzione, donde appunto è venuto a queste espressioni il titolo di equazioni proporzionali (a).

859. La valutazione del peso sp. de' corpi che ora si è dedotta da una proporzione *composta* appunto per farne un' applicazione, si ottiene tanto più facilmente da una proporzione semplice, quando cioè i volumi de' corpi sono eguali, poichè essendo allora $V = V'$, moltiplicando per V il 1.°, e per V' il 2.° termine, ossia ambedue i termini della prima ragione per quantità eguali, il che non l' altera (805), invece della proporzione ora espressa, avremo la semplice

$$P : P' = D : D', \text{ donde } D' = \frac{P'D}{P};$$

ed Archimede ci suggerì il facil mezzo di poter con questa semplice proporzione giungere a conoscere il peso sp. de' corpi paragonato all' acqua, allorchè stando nel bagno, e pensando al modo di sciogliere un quesi-

(a) Spesso si fa uso di queste equazioni proporzionali, e tutte le volte che trattasi di esprimere idee *composte* e *relative*, idee cioè che risultano non solo di più idee elementari, come p.e. *spazio* e tempo per l'idea *velocita*, ma tali che non possiamo apprezzarle senza un confronto, come è appunto la velocità d' un corpo che sebbene abbia dati i suoi elementi, pur non è nè grande nè piccola se non paragonata ad un' altra. Così il Fisico in vece di dire che la velocità cresce col crescer dello spazio e col decrescere del tempo, e che perciò sta la Velocità d' un corpo a quella d' un' altro cui si paragona in ragion diretta degli Spazj, e inversa de' *Tempi*, dice

$V = \frac{S}{T}$, e così con $P = \frac{I}{O}$ esprime il pubblico Economista che

il prezzo delle merci cresce col crescer delle *Inchieste*, e col diminuir delle *Offerte*, ec.

to datogli dal Re di Siracusa, scuoprì il *principio idrostatico, che i corpi immersi in un liquido perdono tanto di peso quanto è il peso di un volume del liquido eguale al loro.*

Infatti la perdita di peso che fa un corpo nell' acqua, ossia il peso d' un volume d' acqua egualissimo a quello del corpo immerso e che possiamo chiamar p, stà al peso del corpo che si può dir p', come 1 densità dell' acqua ad D' densità, o peso sp. del corpo che dee trovarsi, si ha cioè

$$P : P' = 1 : D' \text{ donde } D' = \frac{P'}{P},$$

cioè *il peso sp. d' un corpo è uguale al suo peso assoluto diviso per la perdita di peso che ha fatta nell' acqua.*

860 Di questo mezzo si servì Archimede per dare al Rè Gerone la desiderata risposta. Entrato questo Principe in sospetto che la corona lavorata dall' Orefice Demetrio non fosse di puro oro come glie l' aveva ordinata, ma contenesse ancor dell' argento, volle che Archimede scuoprisse la verità senza alterare la corona. Archimede vi riescì notando le perdite di peso fatte nell' acqua dalla corona, e da un pezzo qualunque d' oro puro, e di puro argento. Dividendo i rispettivi pesi per le loro perdite nell' acqua ottenne i pesi sp della corona, dell' oro, e dell' argento rapporto all' acqua. Con questi dati determinò i pesi che sotto volumi eguali a quello della corona avrebbe il puro oro, e il puro argento facendo questa proporzione. *Il trovato peso sp. della lega di cui la corona è composta al suo peso reale, come il peso sp. dell' oro e dell' argento al peso reale che avrebbero sotto lo stesso volume della corona*; il che trovasi colla regola del tre. Noti così i pesi della corona, e dei volumi ad essa eguali di puro oro e argento, pesi che per esser di tutti volumi eguali chiamar possiamo specifici anch' essi, la soluzione del Problema di Archimede portato a questo punto non è che la soluzione del Problema del §. 544.

861 *Sapendosi che i corpi celesti a tenor della legge astronomica scoperta da Newton agiscono nella ragion composta del-*

la diretta delle masse, e dell'inversa dei quadrati delle distanze

T———————————O—L——O'

su qual punto O del raggio T L dell' orbita Lunare si la Terra T che la Luna L agiscono con attrazione eguale, sicchè ivi trovandosi un corpo non affetto da altre forze rimarrebbe immobile, perchè attratto egualmente in parti opposte?

Onde sciogliere questo quesito chiamiamo m la massa della terra $= 49$ perchè 49 volte della luna maggiore, ed f la sua forza attrattiva; m' la massa della luna $= 1$, ed f' la sua forza attrattiva, d la distanza TL dalla terra alla luna, ossia il raggio dell' orbita lunare che è $= 60$ semidiametri terrestri, x la distanza TO della terra dal punto cercato O su cui $f = f'$; e quindi $d - x$ la distanza dello stesso punto O dalla luna, siccome espressa da TL—TO.

Ciò posto traducendo in proporzione la legge dell' attrazione pel nostro caso particolare, avremo

$$\frac{m}{x^2} : \frac{m'}{(d-x)^2} = f : f', \text{ ovv. } m(d-x)^2 : m'x^2 = f : f';$$

ma per ipotesi $f = f'$: dunque $m(d-x)^2 = m'x^2$,

$$\text{donde } x = \frac{dm}{m-m'} \pm \sqrt{\left(\frac{-d^2m}{m-m'} + \frac{d^2m^2}{(m-m')^2}\right)}$$

e recando il 1.° termine della quantità radicale allo stesso denominatore del 2.°, e riducendo, si ha

$$x = \frac{dm}{m-m'} \pm \sqrt{\frac{d^2mm'}{(m-m')^2}} = \frac{dm}{m-m'} \pm \frac{d\sqrt{m}\sqrt{m'}}{m-m'}$$

$$= \frac{d\sqrt{m}\sqrt{m} \pm d\sqrt{m}\sqrt{m'}}{m-m'} = \frac{d\sqrt{m}(\sqrt{m} \pm \sqrt{m'})}{m-m'},$$

e considerando il denominatore come la differenza di due quadrati, si avrà (233)

$$x = \frac{d\sqrt{m}(\sqrt{m} \pm \sqrt{m'})}{(\sqrt{m} \pm \sqrt{m'})(\sqrt{m} \mp \sqrt{m'})},\ e\ x = \frac{d\sqrt{m}}{\sqrt{m} \mp \sqrt{m'}},$$

ovvero sostituendo i valori alle lettere

$$x = \frac{60\sqrt{49}}{\sqrt{49} \mp \sqrt{1}} = \frac{420}{7 \mp 1} = \frac{420}{6} = 70,\ o = \frac{420}{8} = 52^1/_2.$$

Or poichè x a tenor dell' enunciato esprime la distanza TO per ipotesi minore della TL, essendo 60 semidiametri terrestri tutta la distanza TL dalla terra alla luna, non può ad x competere il primo valore 70, ma il 2.° $52^1/_2$. Dunque un corpo che si trovasse tra la terra e la luna alla distanza di $52^1/_2$ semidiametri terrestri dalla terra, e quindi di $7^1/_2$ dalla luna, sarebbe attratto con egual forza da entrambe; e questo e ciò che da noi si cercava: ma l' ottenuto risultato algebrico ci istruisce che x può anche avere il valore di 70 semi-diametri terrestri, che cioè può darsi un altro punto O′ 10 semidiametri terrestri al di là dell' orbita lunare, su cui esercitan forza eguale e la terra, e la luna, sicchè mentre l' azione della luna sui corpi tra i limiti O, ed O′ è maggiore che l' azione della terra, oltre questi limiti i corpi sebbene più distanti dalla terra che dalla luna, pure sono con maggior forza attratti dalla terra in grazia della maggiore sua massa.

Divisione d' una grandezza in parti proporzionali alle parti determinate d' altra data grandezza, cui si riferisce la regola di Società, o Compagnia.

Gli esempii mostreranno ad evidenza la regola necessaria per tale proporzional divisione.

862 *Conoscendosi l'analisi quantitativa di* 325 *grammi* p. e. *di Codeina sostanza recentemente trovata nell'Opio, come riduconsi i suoi risultati, quali abbiamo qui a lato, a quelli che sarebbero se la dose della codeina analizzata fosse stata di parti* 100, *che è il numero costante cui soglion sempre i chimici riportare i loro analitici risultamenti ?*

Carbonio	231, 85175
Azoto	017, 39725
Idrogeno	024, 65125
Ossigeno	051, 09975
Codeina	325, 00000

Quel rapporto che la dose di Codeina analizzata, cioè 325 ha alla dose 100, dee pur avere la dose d' ogni elemento esistente in 325 a quella esistente in 100, e perciò

$$325 : 100 = \left\{ \begin{array}{l} \text{C. } 231{,}85175 : x = 71{,}339 \\ \text{A. } 017{,}39725 : x = 05{,}353 \\ \text{I. } 024{,}65125 : x = 07{,}585 \\ \text{O. } 051{,}09975 : x = 15{,}723 \end{array} \right.$$

Somma 100.

868. *A* 3 *Creditori* A *di scudi* 2500, B *di* 3660, C *di* 4840 *cede Tizio tutto il suo Capitale ascendente a soli scudi* 6000 *Quanto tocca a ciascuno ?*

La somma de' crediti contro Tizio sta al suo Capitale come ciascun credito alla rispettiva quantità realizzabile: e perciò

$$\begin{array}{l} 11000 : 6000 = \\ \text{ovvero (§. 805)} \\ 11 : 6 = \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} 2500 : x = 1363{,}63 + \frac{7}{11} & \text{per A} \\ 3660 : x = 1996{,}36 + \frac{4}{11} & \text{per B} \\ 4840 : x = 2640 & \text{per C} \end{array} \right.$$

Somma 6000,00 . 0

861. *Tre Comuni* A, B, C, *proporzionatamente al loro estimo censuario che è di scudi* 24000 *per* A, *di scudi* 72000 *per* B, *di scudi* 96000 *per* C, *deggiono ripartirsi una spesa di scudi* 276. *Quanto tocca a ciascuno ?* Risultato: scudi 34, 5 ad A; scudi 103, 5 a B, e scudi 138 a C.

865. *La Regola di Società o Compagnia, per*

di cui mezzo si distribuisce tra diversi socii il guadagno, o la perdita proveniente dalla società, non è anch' essa che un puro caso particolare della divisione di un tutto in tante parti proporzionali alle rispettive in cui un'altro tutto è diviso, ma la *Regola d'oro* che serve alla soluzione può esser *semplice e composta* secondo che o son diversi i *soli capitali*, o anche i *tempi* in cui sono stati in società, ed eccone per l' uno, e l' altro caso un esempio.

866. *Tre Negozianti hanno posto insieme in commercio lire* 40000. *La parte di* A *è lire* 10000 : *la parte di* B *è lire* 14000 : *la parte di* C *è lire* 16000. *Si scioglie la società colla perdita di lire* 8000. *Quanto ognun di essi ha perduto?*

Lo stesso rapporto che ha tutto il capitale alla perdita totale, aver debbe il capital di ciascuno alla rispettiva sua perdita. Dunque

40000 : 8000 =	10000 : x =	2000	per A
ovvero (§. 805)	14000 : x =	2800	per B
5 : 1 =	16000 : x	3200	per C
	Somma	8000	

867. *Un guadagno di scudi* 1660,60 *si è fatto da una Società, in cui* A *ha impiegato per* 6 *mesi scudi* 4500, B *per* 8 *mesi scudi* 3000 : *e* C *per* 10 *mesi scudi* 2250. *Qual'è il guadagno d'ognuno in ragione del capitale, e tempo impiegato nella società?*

A tenor della regola (856) conviene moltiplicare capitale, e tempo di ciascun socio, poichè rapporto al frutto un dato capitale per mesi 6 è lo stesso che il sestuplo per un sol mese ec., e poi la somma di tutti questi prodotti al total guadagno, come ciascun particolar prodotto di capitale per tempo al rispettivo cercato guadagno. Avremo dunque

$$\begin{aligned} A.\ 4500 \times 6 &= 27000 \\ B.\ 3000 \times 8 &= 24000 \\ C.\ 2250 \times 10 &= 22500 \end{aligned}$$

La somma di questi prodotti è 73500, e perciò,

$$73500 : 1660{,}6 = \begin{cases} 27000 : x = 610 + \frac{4}{245} \text{ per A} \\ 24000 : x = 542 + \frac{58}{245} \text{ per B} \\ 22500 : x = 508 + \frac{85}{245} \text{ per C} \end{cases}$$

$$\text{Somma } 1660 + \frac{147}{245} = 1660{,}6$$

868. E' poi chiaro che *criterio* del buon esito di queste operazioni è la somma delle parti trovata identica al tutto cui si riferiscono.

869. Relativo alle regole di società è il seguente problema di 2.° grado,

Marco per una somma, che non rammenta, tenuta in commercio per 12 mesi, unitamente ai 30 scudi tenuti in commergio da Cajo per mesi 17, riceve fra capitale e lucro scudi 26, mentre scudi 18, 75 è stato il total guadagno. Qual somma Marco ha posta in societa? Risultato: scudi 20.

Si chiami x la somma posta in commercio da Marco. Il suo guadagno sarà il quarto termine della seguente proporzione espresso perciò dal prodotto de' medii diviso pel primo termine

Somma de' Capitali moltiplicati pel tempo	al	*Guadagno totale*	come	*il Capital di Marco moltiplicato pel tempo*	al	*Guadagno di Marco*
$12x + 17 \times 30$	:	$18{,}75$	=	$12x$	:	$\frac{18{,}75 . 12x}{12x + 17.30}$

Ma per le condizioni la somma x posta da Marco più il suo guadagno è 26:

$$\text{Dunque } x + \frac{18{,}75 . 12x}{12x + 17.30} = 26, \text{ donde}$$

$12x^2+17 \cdot 30x + 18,75 \cdot 12x = 26 \cdot 12x + 26 \cdot 17 \cdot 30$; e quindi $x^2+35,25x-1105 = 0$, donde $x = -17,625 \pm \sqrt{(1105+310,640625)}x$, ovvero $x = -17,625 \pm \sqrt{1415,640625} = -17,625 \pm 37,625$; e finalmente $x=20$; mentre l' altro valor negativo di x non è conciliabile col problema.

Regola di cambio.

870. Quando trattasi di ridurre un numero di monete o misure in altre, se il valor delle prime è espresso in parti delle seconde, o viceversa, l' operazion riducesi ad una sola moltiplicazione, o divisione per frazioni, di cui già dammo esempii (401, 404, 409). Ma quando i cambii di monete, merci, o misure debbono passare per diverse piazze, l' operazione necessaria pel cambio dipende da una regola del tre composta; ed eccone un' esempio.

871. *Dovendo un Negoziante di Parigi esigere* 1500 *Crocioni in Lisbona, e non essendo aperto direttamente il cambio, passano i suoi effetti per le banche di Amsterdam, e Ginevra. Il corso del cambio è tale che un Crocione di Portogallo vale* 45 *denari di grosso in Amsterdam*; *e* 92 *denari di Amsterdam valgono* 3 *lire di Ginevra*; *e tre lire di Ginevra cambiansi per* 5 *franchi in Parigi. Quanti franchi di Parigi dovrà ricevere in saldo de'* 1500 *Crocioni di Portogallo?* Risultato: Franchi $5668,47\,{}^{19}/_{23}$.

Infatti chiamato x il numero di denari di grosso d' Amsterdam equivalente ai 1500 crocioni; y il numero delle lire di Ginevra equivalenti al numero x denari di Amsterdam, e z il numero de' franchi di Francia equivalenti al numero y delle lire di Ginevra, e quindi ai 1500 crocioni, si avranno le seguenti proporzioni.

Crocioni		Crocioni		den.		den.
1	:	1500	=	45	:	x
den.		den.		L. Gin.		L. Gin.
92	:	x	=	3	:	y
L. Gin.		L. Gin		fr.		fr.
3	:	y	=	5	:	z

Trovato il valore di x quarto termine della 1ª proporzione, si sostituisce nella 2ª, e così si scuopre il valore di y quarto termine ignoto; e il trovato valore di y posto nella 3ª ci reca alla determinazione di z, la quale, dal complesso delle operazioni risulta, che può riguardarsi come il quarto termine d' una proporzione *composta* di tutte le espresse, dopo che pel prodotto di tutte le incognite meno z siensi divisi i due conseguenti; ed in vero moltiplicando tra loro i rispettivi termini delle 3 proporzioni, si ha

$1{\cdot}92{\cdot}3 : 1500{\cdot}x{\cdot}y = 45{\cdot}3{\cdot}5 : x.y.z,$

e dividendo per xy i conseguenti (807) si ha

$1{\cdot}92{\cdot}3 : 1500 = 45.3{\cdot}5 : z$, donde risulta

$$z = \frac{1500{\cdot}45{\cdot}3{\cdot}5}{1{\cdot}92{\cdot}3} = 3668{,}47\ {}^{19}/_{23}$$

valore identico a quello che si ottiene passando pella successiva ricerca delle altre incognite in ognuna delle distinte proporzioni. Questa regola di cambio è quella che i pratici chiamano *Regola congiunta, o di catena.*

Regole d' interesse, e sconto.

Chi prende danaro ad imprestito, nel restituirlo dopo un tempo determinato è giusto che aggiunga una somma per indennizzare il prestatore degli utili che si

sarebbe procurati, se egli stesso l' avesse impiegato: In questa ricompensa consiste l' idea che dobbiamo formarci del *frutto* del danaro dato a prestito che chiamasi *Capitale, o sorte*. Egualmente chi esige un credito anticipatamente, ossia prima della stabilita scadenza, è giusto che faccia una perdita per indennizzare il debitore dell' utile che avrebbe ritratto dal suo danaro in tutto il tempo che dovea scorrere prima di renderlo. E questa deduzione accordata dal creditore per ottenere anticipatamente il pagamento di un credito è ciò che dicesi *sconto*.

873. Quindi è chiaro che lo *sconto* per esser esatto debbe essere il *frutto* che la somma pagata attualmente dà per tutto il tempo per cui è stata anticipata, mentre in tal guisa essendo uguale alla somma che dovea il debitore sborsare dopo un tempo determinato non già la somma anticipata, ma questa più il frutto che potea ritrarne il debitore in tutto il tempo che era in diritto di tenerla presso di se, egli non ha risentito danno alcuno da questa anticipazione.

Così come scudi 100 *ora* equivalgono a scudi 105 *qui ad un anno* in forza del *frutto*; 105 *qui ad un anno* non sono che 100 *ora* in forza dello *sconto* ossia frutto della somma sborsata *ora* per *poi*.

874. Onde determinare il frutto o sconto d' una somma di monete è invalso l' uso di paragonarla a 100, e si conviene quanto le 100 monete al fin d' un determinato tempo che suol essere un' anno debban render di frutto, e se p. e. si è stabilito che 100 lire ne dieno 5, si dice che il frutto è del 5 per cento che si scrive 5 per %.

875. Le regole d' interesse e sconto vanno poi distinte in due branche, in quelle cioè che riguardano

la soluzione de' problemi ove si ha di mira il *semplice interesse* del capitale fruttifero ; ed in quelle ove si ha riguardo anche all' *interesse de' frutti*, quando lasciati in mano del debitore, vanno essi in aumento di Capitale.

Calcolo dell' interesse e sconto semplice

876 *Qual' è il frutto annuo di scudi 826 al 5 per cento ?* Risultato: scudi 41, 30.

Infatti quello stesso rapporto che ha al 100 il 5 ha pure all' 826 il numero cercato, sicchè

$100 : 5 = 826 : x$, e $x = 41{,}30$ (§. 801).

Quanto rendono 10000 *scudi al* 5 *per cento in* 2 *anni* 5 *mesi*, *e* 12 *giorni* ? Risultato : scudi 1225.

Poichè 2 anni , 5 mesi , e 12 giorni (essendo il mese e l' anno mercantile di 30 il 1.°, e di 360 giorni il 2.°) non sono che anni $2+{}^{9}/_{20}$ (§. 446), diremo: se 100 lire in un anno fruttano 5, lire 10000 in anni $2+{}^{9}/_{20}$ qual frutto daranno? ovvero se 100 lire in giorni 360 danno 5, 10000 in 882 giorni (riducendo tutto il tempo a giorni) quanto daranno ? E perciò col canone (§. 856) otteniamo questa proporzione composta .

$100\times1 : 5 = 10000\ (2+{}^{9}/_{20}) : x$; ed $x = 1225$

ovvero

$100\times360 : 5 = 10000\times882 : x$, ed $x = 1225$

877. Solo per dare un saggio de' metodi comunemente in uso abbiamo sciolto per mezzo della regola d' oro i due ora esposti problemi . Si poteano infatti sciogliere con metodi più semplici affatto indipendenti dalla teoria delle proporzioni , e appoggiati al solo calcolo delle equazioni coll' uso delle formole che or passe-

remo ad esporre, occupandoci prima di quelle che riguardano il prestito d'un unica somma, e poi di quelle in cui cui si ha in mira la prestazione di più somme in tempi distinti.

E primieramente si noti che ad oggetto di semplicizzare e le operazioni e la teoria, giova riferire l'interesse non come costumasi ad una quantità arbitraria, quale è 100, ma alla vera unità, cioè ad una sola moneta, perchè così il frutto cercato non è più il quarto termine di una proporzione, ma il risultato d'una semplice moltiplicazione; non è cioè che il frutto della unità ripetuto per quante sono le unità del numero dato. E perciò ogni volta che a tenor dello stile commerciale ci si dirà che il frutto è il 4, o il 5, o il 10 per %, dividendo per 100 sì il frutto, che la quantità di monete cui è paragonato, il che non altera il valor del rapporto, avremo espresso il frutto non più di 100 ma di una sola moneta. Così il frutto 4 per % $= 0{,}04 = {}^1/_{25}$ per 1; il frutto 5 per % $= 0{,}05 = {}^1/_{20}$ per 1: il frutto 10 per % $= 0{,}1$ per 1; ec.

878. Dedicata da qui innanzi la parola *interesse* e la lettera i per esprimere il frutto, che rende una sola moneta al termine di un'anno, e chiamato c il numero delle monete ossia il *capitale* posto a frutto, è ben chiaro che il frutto di qualunque somma di monete per un'anno sarà il frutto i d'una moneta moltiplicato pel loro numero c, sarà cioè ci; e quindi chiamando C il capitale c, più il suo frutto, ossia ciò che è divenuto il capitale alla fine di un'anno, avremo

$$C = c+ci, \text{ ovvero } C = c(1+i).$$

879. Il frutto poi del capitale c per un numero n di anni esser debbe il frutto ci di un anno ripetuto n volte, cioè cin, e perciò al fine del tempo n avremo

$C = c + cin$, ovvero (A) $C = c\,(1 + in)$, donde derivano queste altre tre.

$$\text{(B)}\ c = \frac{C}{1+in}\ /\ \text{(D)}\ i = \frac{C-c}{cn}\ /\ \text{(E)}\ n = \frac{C-c}{ci}.$$

880. Or ciascuna di queste 4 formole ci addita il valore d' una delle 4 quantità c, C, i, n, note che sieno le altre 3; e son perciò utilissime per la soluzione de' varii problemi risguardanti sì il *frutto* che lo *sconto*, fissa la massima che come nei problemi ove contemplasi il *frutto*, c esprime il capitale, e C il capital più i frutti, così ne' problemi di *sconto* c esprime la somma che si paga *ora*, e C quella che dovrebbe pagarsi *poi*, appunto perchè questa è formata da c più il suo frutto a norma delle esatto modo di concepire lo sconto (a): ed ecco esempii, che esigono l'applicazione di queste formole.

(a) Lo sconto preso nel modo indicato dicesi *Sconto al di dentro* ed è questo l' esatto modo di computarlo. Talvolta però per convenzione si forma la somma c da pagarsi all' istante col togliere da quella che si dovrebbe poi, cioè da C il frutto che darebbe non c ma la stessa C, e lo *sconto* dicesi allora *preso al di fuori*. Così 100 scudi qui ad un'anno collo sconto del 5 per cento divengono *ora* scudi 95, e 5 ventunesimi, se lo sconto si prende al di dentro; mentre questo è il valore che prende c nella formola (B) applicata al nostro caso; ed infatti 95 e 5 ventunesimi *ora* formano scudi 100 appunto qui a un' anno all' interesse del 5 per cento, come lo mostra la formola (A). Gli stessi scudi 100 divengono in vece soli scudi 95, se lo sconto si prende al di fuori, se cioè si ottiene la somma da sborsarsi ora col sottrarre da 100 lo stesso frutto che darebbe 100, cioè 5. Ecco le formole per l' uno e l' altro sconto.

Nello sconto al di dentro

$$c = \frac{C}{1+in}$$

Nello sconto al di fuori

$$c = C - Cin$$

I. Quesito. Dati c, i, n, si trovi C.

881 *Dopo due anni e 4 mesi Tizio vuò rendere coi dovuti frutti la somma di scudi 43 riceuta all' interesse del 9 per cento ossia del 0, 09 per 1. Quanto debbe sborsare?* Risultato: scudi 52,03.

Infatti la (A) diventa $C = 43 \, (1+0{,}09 \times {}^7/_3) = 52{,}03$

882 *Marco ignora la somma, che il defunto suo Padre avea prestata a Tizio. Si trova però registrato che Tizio sborsò scudi 66,555 per frutti dovutigli all' interesse del 4, e mezzo per cento, ossia del 0,045 per gli arretrati di anni 4, e mesi 3, dopo di che sono scorsi due anni che Tizio non ha più pagato. Che somma dee sborsare tra sorte, e frutti, e a quanto monta la sorte?* Risultato: scudi 348 è la sorte; e dee rendere la somma di scudi 379,32, ed eccone la dimostrazione.

Qui cercansi C, e c. Or c rilevasi tosto che si rifletta che il frutto di un capitale per un dato tempo è cin (878), e che noi abbiamo dai dati del problema $i = 0{,}045$, $n = {}^{17}/_4$, ed il frutto $cin = 66{,}555$,

$$\text{onde } c = \frac{cin}{in} = \frac{66{,}555}{0{,}045 \cdot {}^{17}/_4} = 348.$$

Noto c, abbiam tosto il valore di C, ossia del capital coi frutti per i 2 anni arretrati, dalla formola (A), la qual diventa

$$C = 348 \, (1+0{,}045 \cdot 2) = 379{,}32$$

II. Quesito. Dati C, i, n, si trovi c.

883 *Cajo si è obbligato pagare dopo anni 5, e mesi 9 la somma di scudi 375,804 per saldo di sorte e frutti all' interesse del 3 e un terzo per cento, ossia del 0,03 e un terzo per 1. Trovandosi comodo a pagar prima si vuò conoscere la vera sorte per quindi aggiungervi i frutti in ragione del tempo scorso.* Risultato: scudi 315, 36.

Infatti la (B) diventa $c = \frac{375,804}{1+0,03\ {}^1/_3 \times {}^{23}/_4} = 315,36$

Allo stesso general quesito appartiene pure il seguente Problema di sconto.

884 *Tizio si offre di soddisfare Marco sull' istante della somma di scudi* 360 *che gli deve dopo il termine di* 3 *anni collo sconto del* 5 *per cento ossia del* 0,05 *per* 1. *Quanto debbe sborsargli?* Risultato: scudi 313,043 prossimamente. Infatti la formola (B) diventa nel nostro caso

$$C = \frac{360}{1+0,05.3} \cdot = \frac{360}{1,15} = 313,043\ {}^{11}/_{23}$$

Quesito III. Dati *C*, *c*, *n*, si trovi *i*.

885 *Un usurajo cita Giulio appena morto il di lui Padre a sborsargli la somma di scudi* 577,625 *per prestito fattogli a interesse semplice* 10 *anni mesi* 2 *giorni* 12 *indietro di scudi* 125. *A che interesse è stato prestato il denaro?* Risultato: Al 0,355 per 1, ossia al 35 e mezzo per cento.

Infatti la formola (D) diventa $i = \frac{577,625-125}{125 \times {}^{51}/_5}$

$$= \frac{452,625}{1275} = 0,355.$$

886 *Tizio nell' urgenza in cui trovasi accetta scudi* 140 *in saldo degli scudi* 252 *che esiger dovea dopo* 4 *anni*. *A che interesse è stato lo sconto?* Risultato: al 20 per cento, ossia al 0,2 per 1.

Infatti la (D) diventa $i = \frac{252-140}{140 \times 4} = 0,2.$

Quesito IV. Dati *C*, *c*, *i*, si trovi *n*.

887 *Livio si trova nell' impossibilità di soddisfare il suo Creditore sì della sorte di Zecchini* 450 *che ritiene al* 6 *per cen-*

to, che dei frutti: pattuisce perciò di cedergli la sua Casa del valore di Zecchini 531, *quando tra sorte e frutti il suo debito sarà giunto a tal somma. Dopo quanti anni accadrà tal cessione?* Risultato: dopo 3 anni, poichè.

La formola (E) diventa $n = \frac{531-450}{450 \times 0{,}06} = 3$.

888, Fin quì si è parlato dell' interesse di un' unica somma: ma più somme, più capitali possono esser presi di mira nel calcolo, e questi o tutti *eguali*, *e pagabili ad eguali* intervalli p. e. d' anno in anno, e in tal caso chiamansi *annualità*; *o diseguali*, *e pagabili ad intervalli diversi*. In questo 2.° caso convien servirsi delle regole già stabilite per ciascuna somma separatamente considerata: ma nel 1.° quando cioè trattasi di annualità, nei problemi in cui si ha in vista il frutto, la teorìa delle progressioni per differenza ci suggerisce un metodo più breve.

889 *Tizio dee sborsare ogni anno o a titolo di pensione o di affitto; ec.* 1000 *lire: chiede di ritenerle per anni* 8 *pagandone alla fine il frutto del* 5 *per cento. Quanto dovrà sborsare al fine dell' ottavo anno?* Risultato: Lire 9400.

Chiamata c l' annualità di 1000 lire, ed n gli anni 8 a decorrere prima che sien pagati gli arretrati, e i frutti, è chiaro che le 8 annualità c *arretrate* saranno espresse da cn.

Per rapporto poi ai frutti, poichè l' annualità pagasi in fin d' ogni anno, al fin del 1.° anno non v' è frutto a pagarsi, cioè il frutto è zero. Alla fin del 2° anno, v' è il frutto dell' annualità c, cioè ci (§. 878): al fin del 3.° v' è il frutto di due annualità, cioè $2ci$, ec., cresce cioè di ci il frutto successivo di ogni anno, siccome ogni anno cresce di c il capitale: questi frutti

forman perciò una progressione per differenza, di cui il 1.° termine è zero, e la differenza è ci, sicchè l' ultimo termine della progressione è (§. 785) $u=(n-1)ci$; e perciò la somma della progressione, che è $s= {}^{n}/_{2}(a+u)$ (§.786), e che nel nostro caso in cui il 1.° termine a è uguale a zero, esprime la somma de' frutti, diventa $s={}^{n}/_{2}\,ci\,(n-1)$, e quindi chiamando S la somma dei frutti unita a quella degli arretrati, si ha $S= {}^{n}/_{2}ci\,(n-1)+cn = {}^{cn}/_{2}\,(i\,(n-1)+2)$, e sostituendo i valori, avremo $S = {}^{800}/_{2}\,(0{,}05(8-1)+2) = 9400$.

890. Frattanto dalla stessa formola ora ottenuta

(F) $S = {}^{cn}/_{2}\,(i\,(n-1)+2)$, ricavasi

$$(G)\ c = \frac{2\,S}{n\ (\,i\,(n-1)+2\,)};$$

$$(H)\ i = \frac{2\ (S-cn)}{cn(n-1)};$$

$$(M)\ n = \frac{i-2}{2\,i} \pm \sqrt{\left[\frac{2s}{ci} + \left(\frac{i-2}{2\,i}\right)^2\right]},$$

formole le quali ci offrono la soluzione di tanti distinti quesiti generali diversi, in cui viene presa per incognita o la somma totale degli arretrati, e frutti, o l' annualità c, o l' interesse i, o il tempo n, ciascuna delle quali è ben facile ad applicarsi a dei particolari problemi.

Ma sieno, o no eguali le somme a pagarsi a diversi intervalli, ecco un altro interessante problema.

891 *Ennio pagar dee scudi* 100 *dopo due*, 350 *dopo quattro*, *e* 450 *dopo sei anni. Avendo queste somme in commercio e riescendogli più comodo fare tutti e* 3 *i pagamenti in una sola volta, dopo quanto tempo dovrà far lo sborso per non discapitare nel suo?* Risultato: Dopo anni 4 e 7 noni, cioè dopo anni 4, mesi 9, e giorni 10.

Per impiantar l'equazione necessaria alla soluzione del problema si rifletta che ricercasi un tal tempo x, alla cui scadenza il frutto che fin allora ha reso il totale delle 3 indicate somme in mani di Ennio sia eguale alla somma de' frutti, che dato avrebbe ciascuna di esse sino alla pattuita scadenza, finchè cioè sarebbe rimasta di sua proprietà.

Or chiamata c, c', c'' la somma a pagarsi dopo i 2, i 4, i 6 anni, ossia dopo i tempi n, n', n'', è chiaro che il totale de' frutti ritraibili da queste somme finchè restano presso il debitore è $cin + c'in' + c''in''$ (§. 879).

Essendo $c + c' + c''$, la somma a sborsarsi in una sola volta dopo il tempo x, il suo frutto per tutto il tempo x è $(c + c' + c'')ix$ (§. 879).

Dunque $cin + c'in + c''in'' = (c + c' + c'')ix$: e quindi

$$x = \frac{cn + c'n' + c''n''}{c + c' + c''} = \frac{100 \cdot 2 + 350 \cdot 4 + 450 \cdot 6}{100 + 350 + 450} = 4 + {}^{7}/_{9}$$

Calcolo dell' interesse e sconto composto.

Anche nell' interesse, e sconto composto può aversi in mira I. *una sola*, II. *o più somme fruttifere*, e l' un caso tratteremo dopo l' altro.

892 Si è già veduto che alla fine di un' anno il capitale c diventa $c\ (1+i)$ (§ 878). Or se i frutti passano in aumento di capitale, e se il capitale coi frutti rimane presso il debitore, $c\ (1+i)$ è il capitale che trovasi al fin del 1° anno, e che vien posto a interesse pel 2°; e perciò fatto $c\ (1+i) = c'$, al fine di questo 2° anno il capitale c' sarà divenuto $c'\ (1+i)$, come c

divenne $c(1+i)$ alla fin del primo; e risostituendo a c' il suo valore, il capitale alla fin del 2° anno sarà $c'(1+i) = c(1+i)(1+i) = c(1+i)^2$; e fatto $c(1+i)^2 = c''$, questo capitale c'' alla fin del terzo anno diverrà $c''(1+i) = c(1+i)^2 \times (1+i) = c(1+i)^3$, e così alla fin del 4° anno il capitale diverrà $c(1+i)^4$, e al fin dell' *ennesimo* anno sarà $c(1+i)^n$, sicchè la somma posta ad interesse, e ciò che essa diventa in fin del 1°, del 2°, del 3°, dell' ennesimo anno formano la seguente progressione

$$\div c : c(1+i) : c(1+i)^2 : c(1+i)^3 : \ldots . c(1+i)^n,$$

il cui quoto è $1+i$; e perciò se chiamiamo C ciò che è divenuto il capitale c coll' aumento de' frutti passati in capitale successivamente anch' essi, dopo n anni, avremo l' interessante formola

$$\text{(N)}\ C = c(1+i)^n, \text{ donde (O) } c = \frac{C}{(1+i)^n}$$

$$\text{(P)}\ i = \sqrt[n]{\frac{C}{c}} - 1\,/, \text{ ed (R) } n = \frac{LC - Lc}{L(1+i)},$$

la qual' ultima formola si è ottenuta col calcolo de' logaritmi perchè l' incognita di cui ci addita il valore è l' esponente n della formola fondamentale (N), che solo può coi logaritmi ottenersi (756). Da (N) infatti passiamo a $LC = L\,c(1+i)^n$: ma $Lc(1+i)^n$ $= Lc + L(1+i)^n$ (§. 757) $= Lc + nL(1+i)$ (§. 764).

Dunque $LC = Lc + nL(1+i)$; ed $n = \dfrac{LC - Lc}{L(1+i)}$

893 E ognuna di queste 4 formole ci determina il valore di una delle solite 4 quantità c, C, i, n, date che sien le altre, 3, e son perciò utilissime per la

soluzione de' problemi riguardanti sì il *frutto*, che lo *sconto composto*, quando ben si rimarchi che come c rappresenta il capital fruttifero al principio della prestazione, e C ciò che esso è divenuto in grazia dell' interesse composto insieme coi frutti, così nell' esatto modo di concepire lo sconto c esprime la somma che si paga *ora*, e C quella che dovrebbe pagarsi *poi*, appunto perchè questa è formata da c più il frutto che a tenor dell' interesse composto renderebbe pel tempo n per cui è stata anticipata; ed eccone delle applicazioni (c).

I. Quesito. Dati c, i, n, si trovi C.

894 *Mevio possessore di mala fede come il furono i suoi antenati di un censo di scudi* 1000 *all' interesse del* 5 *per cento o di* 0,05 *per* 1, *spettante ad un beneficio ecclesiastico fin da cento anni indietro, allo spirare del centesimo anno è citato a cedere e il censo, e il frutto composto che ne ha percepito*. Che somma dovrà sborsare? Risultato: scudi 131500 prossimamente.

Infatti la formola (N) diventa $C = 1000\ (1+{}^1/_{20})^{100} = 1000({}^{21}/_{20})^{100}$. Ora il valore di $({}^{21}/_{20})^{100}$ trovasi tosto per mezzo de' logaritmi; poichè $L({}^{21}/_{20})^{100} = 100\ L{}^{21}/_{20} = 100\,(L21-L20) = 100\times0{,}0211893$ (come risulta dalle tavole) $= 2{,}11893$, e il numero corrispondente a questo logaritmo è nelle tavole 131,5. Dunque $({}^{21}/_{20})^{100}=131{,}5$. Dunque $C=1000\ ({}^{21}/_{20})^{100}=131500$.

(c) Non dissimuliamo che a rigore i risultati ottenuti con queste formole che basano sull' ipotesi dell' *interesse continuo*, non corrispondono esattamente a quelli cui recaci l' ipotesi dell' *interesse interpolato* quando il tempo è frazionario; ma per esser questa differenza ben tenue, ci dispensiamo dall' esporre le formole relative all' interesse interpolato, poichè alcune di esse sono equazioni complete di gradi superiori al secondo; e perciò non pertinenti all' Algebra elementare.

Ecco un problema di sconto relativo allo stesso quesito.

895 *Tullio ha riceuto da Livio scudi* 100 *in saldo di una somma che gli era douta dopo anni* 18, *accordando lo sconto del* 10 *per* 100, *ossia del* 0,1 *per* 1. *Egual somma dopo anni* 18 *aver pur debbe da Publio*. Quanto è questa somma? Risultato scudi 556 circa.

Infatti la formola (N) diventa $C = 100(1+0,1)^{18} = 100\ (1,1)^{18}$; e poichè $L(1,1)^{18} = 18\ L(1,1) = 18(0,0413927) = 0,7450686$, e il numero corrispondente a tal logaritmo è 5,56, ne segue, che $(1,1)^{18} = 5,56$, e perciò $C = 100(1,1)^{18} = 100 \times 5,56 = 556$.

II. Quesito: Dati C, i, n, si trovi c.

896 *Tito nelle urgenze in cui trovasi accorda a Cajo lo sconto del* 20 *per cento, ossia del* 0, 2 *per* 1, *sulla somma di* 300 *scudi, che dovea esigere due anni dopo. Che somma gli sborsa Cajo all'istante*? Risultato: scudi 208, *e un terzo*.

La formola (O) diventa $c = \frac{300}{(1+0,2)^2} = \frac{300}{(1,2)^2} = {}^{300}/_{1,44} = 208 + {}^{1}/_{3}$.

III. Quesito. Dati C, c, n, si trovi i.

897 *E' legalmente provato che una Cambiale di scudi* 686 *contro Tizio non si è dà lui firmata che per la somma di scudi* 250 *riceuti* 3 *anni indietro. Perchè costi se vi è o no lesione nel contratto, cercasi a che interesse si è prestato il danaro.* Risultato: al 0, 4 per 1, ossia al 40 per cento.

La formola (P) infatti diventa $i = \sqrt[3]{{}^{686}/_{250}} - 1 = {}^{2}/_{5} = 0,4$

898. *Persio ha un ordine di scudi* 213 *esigibile dopo* 5 *anni dall'Usurajo Albino. Egli glielo paga subito, purchè gli ceda in compenso un brillante del valore di scudi* 211. *Quan-*

to è lo sconto? Risultato: è di mezzo per 1, ossia di 50 per cento.

Infatti tolti da 243 gli scudi 211 valor del brillante acquistato, restano soli scudi 32, che Albino sborsa per la somma di 243, che dovea 5 anni dopo. Dunque la formola (O) diventa

$$i = \sqrt[5]{{}^{243}/_{32}} - 1 = {}^{3}/_{2} - 1 = {}^{1}/_{2}$$

IV. Quesito. Dati c, C, i, si trovi n.

899 *In una cassa di risparmio che rende il 5 per cento Lucio al nascere della prima sua figlia Clelia depone scudi mille, destinando il solo capitale per la di lei dote. Le nasce una seconda figlia; e non potendo a favor di questa mettere altra somma a profitto, le assegna in dote tutti i frutti che saranno provenuti dal capitale dei scudi mille, allorchè questo verrà ritirato per dotare la primogenita. Quando questa si sposa eguale dote risulta per la seconda? Di che età Clelia prese marito?* Risultato: di anni 14, mesi 2, giorni 14 e mezzo circa.

Ed in vero se il capitale 1000, ossia c nel tempo n cercato ha dato di frutto una somma a se eguale, è chiaro che il capitale più i frutti, ossia $C = 2c$. Essendo poi 5 per 100, ossia ${}^{1}/_{20}$ l' interesse, ne viene che $1+i = {}^{21}/_{20}$; e perciò la formola (R) diventa

$$n = \frac{L2c - Lc}{L\,{}^{21}/_{20}} = \frac{L2 + Lc - Lc}{L\,{}^{21}/_{20}} \text{ (§. 757), ossia}$$

$$n = \frac{L2}{L21 - L20} \text{ (§. 761)} = \frac{0{,}3010300}{0{,}0211893} = 14 \text{ anni,}$$

2 mesi, giorni $14^{1}/_{2}$ circa (§. 460).

900 *Fin qui del frutto, o sconto composto relativo ad un' unica somma.* Ma come nel calcolo dell' interesse semplice, così pure in quello del composto, più capitali possono esser presi di mira. Or se questi son

diseguali e pagabili ad *intervalli tra loro diversi*, niuna regola generale abbreviativa può darsi pel loro calcolo: Se poi le somme fruttifere sono *eguali* e pagabili ad *eguali intervalli*, e per lo più d' anno in anno, sono cioè *annualità*, allora viene il loro calcolo abbreviato di molto dalla applicazione delle progressioni per quoto, come i due seguenti esempii dimostrano.

901 Se si pone a frutto una somma c, e poi quí ad un' anno se ne aggiunge altra eguale, un' altra eguale al fin dell' anno avvenire, e così di seguito per n anni, qual' è alla fine dell'*ennesimo* anno l' ammontar delle somme accumulate con tutti gli interessi composti?

Al termina di n anni la somma c posta *ora* a frutto diverrá $c(1+i)^n$: la somma c che sará posta a frutto qui ad un' anno, sará stata fruttifera per un' anno di meno, e diverrà perciò $c(1+i)^{n-1}$: la somma c che sarà posta a ftutto quì a due anni fruttificherà per anni due di meno, e diverrà perciò $c(1+i)^{n-2}$, e così di seguito, finchè c posta a frutto al principio dell' ennesimo anno diverrà alla fine di esso $c(1+i)$. Quindi se chiamiamo S il cumulo totale delle somme prese tutte per quel valore che in forza dell' interesse composto hanno acquistato alla fine dell'*ennesimo* anno, avremo l' equazione

$S = c(1+i)^n + c(1+i)^{n-1} \ldots . + c(1+i)$, il cui secondo membro è una vera progressione per quoto decrescente, che resa crescente coll' inverterne l' ordine (§ 821), ci presenta per primo termine $c(1+i)$, per ultimo $c(1+i)^n$, e per quoto $(1+i)$; onde applicando al caso nostro la formola che esprime la somma delle progressioni per quoto, avremo

$$(T)\ S = \frac{c\ (1+i)}{i}\left((1+i)^n - 1\right),$$

formola da cui se ne ricavano 3 altre; sicchè se ne hanno 4, ciascuna delle quali ci determina il valore incognito di una di queste 4 quantità S', c, i, n, date che sieno le altre; ma la deduzione di queste formole dalla data (T), e le loro applicazioni ai problemi serviranno di esercizio agli Allievi dopo i lumi acquistati, limitandoci noi ad un solo esempio per la formola (T).

902 *Un Artista caduto in malatia può ritrarre tutto il suo da una Cassa di risparmio ove posto avea all' interesse del due e mezzo per cento, ossia di 0,025 per 1, scudi 20 ogni anno per anni 3: che somma gli si deve?* Risultato: scudi 63,0503125; poichè la formola (T) diventa

$$S = \frac{20 \times 1{,}025}{0{,}025} \left(1{,}025^3 - 1\right) = 63{,}0503125 .$$

903 Nell' ora esposto quesito è il Creditore che sborsa ogni anno egual somma per aumentare il suo credito. Può però darsi anche il caso contrario, che cioè il Debitore di una somma riceuta all' istante tutta in una volta, sborsi ogni anno altra somma minor della sorte, e maggiore de' frutti, finchè a poco a poco tutto rimanga estinto il suo debito; ed equità matematica vi sarà in tal sorta di contratti, quando la somma di tutti gli annui pagamenti, che per un dato numero d' anni fa il Debitore(valutati ciascuno a tenore delle regole dello sconto per ciò che vale all'istante del contratto) sia una somma eguale a quella, che ha nell' istante del contratto riceuta appunto in compenso, o prezzo delle cedute annualità.

904 E per trovar questa somma qui gioverà il rammentare che nei calcoli d'interesse come c somma che si possiede oggi, non ha più domani lo stesso valore, ma ne ha un maggiore perchè aumentata in grazia del frutto, che

continuamente produce, e pel quale al fin di un tempo n diventa $c\ (1+i)^n$; in egual modo la somma C dell' indimani ha oggi un valore minore, perchè è formata da c capitale di oggi più il suo frutto; giova cioè rammentare che in genere la somma nota C quì ad un tempo n, non è ora che quell' *ignoto capitale* c che col suo frutto composto vale a produrlo, e che perciò si ottiene tosto a tenor della formola (B), dividendo per $(1+i)^n$ la data somma C; e quindi conchiudiamo, che il valor continuamente variabile delle somme a interesse può riportarsi a qualunque epoca ci piaccia, moltiplicando cioè o dividendo per $(1+i)^n$ la data somma, secondo che si vuò valutarla o dal presente al futuro n, o dal futuro n al presente.

905 Poste le quali cose chiaro risulta che la somma di tutte le annualità pagate dal debitore, cioè della 1ª qui ad un anno, della 2ª qui a due, della 3ª qui a 3, ec. sino al numero n di anni determinate tutte per quel che valgono attualmente, somma che debbe esser eguale a quella che il debitore riceve tutta all' istante, è espressa dalla somma di questa progressione decrescente

$$S = \frac{C}{(1+i)} + \frac{C}{(1+i)^2} + \frac{C}{(1+i)^3} \dots + \frac{C}{(1+i)^n},$$

che resa crescente coll' inverterne l' ordine, ci presenta per primo termine $\frac{C}{(1+i)^n}$, per ultimo $\frac{C}{(1+i)}$, e per quoto $1+i$, sicchè in virtù della formola (B) (§. 822) la somma della progressione resa crescente è

$$(U)\ S = \frac{C}{i}\left(1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right),$$

equazione da cui se ne ricavan 3 altre, sicchè se ne hanno 4 ciascuna per la determinazione del valore incognito di una di queste 4 quantità, cioè di S che può chiamarsi prezzo delle annualitá, di C che esprime il valore delle annualità, di i che ne è l' interesse, di n che ne è la durata.

Eccone intanto per norma un' applicazione.

Dati. S, C, i, si trovi n:

906 *Tullio per render libero un suo predio, su cui è ipotecato un credito di 1000 scudi, prende questa somma dal suo Inquilino come in anticipato pagamento per più anni della pigione annua di scudi* 112,82. *Essendosi accordato lo sconto composto del 5 per cento, quante pigioni dovranno cedersi per i mille scudi ricevuti all' istante del contratto?* Risultato 12.

Qui prima d' ogni altro dalla formola (U) convien passare a quella in cui sia isolato l' esponente incognito n, e ciò coll' ajuto de' logaritmi, mentre quando da (U) col moltiplicare ambi i suoi membri per $i\ (1+i)^n$, e quindi coll' isolare la C, si è ottenuto $C = (C - Si) \times (1+i)^n$, prendendo i logaritmi di questi due membri eguali, si ha

$$LC = L\,(C - Si)(1+i)^n = L\,(C - Si)$$
$$+ L\,(1+i)^n\ (\S.\ 757) = L\,(C - Si) + nL(1+i)\ (\S.764)$$

donde $n = \dfrac{LC - L(C - Si)}{L(1+i)}$, ossia nel nostro esempio, in cui C $=112,82$, $i = 0,05 = {}^1/_{20}$, e perciò $1+i = {}^{21}/_{20}$, ed $S = 1000$, avremo

$$n = \frac{L112,82 - L(112,82 - 1000 \times 0,05)}{L^{21}/_{20}} =$$

$$\frac{2{,}0523861 - L62{,}82}{L21 - L20} = \frac{2{,}0523861 - 1{,}7980979}{0{,}0211893} = 12.$$

907. Il metodo di ridurre le somme quali sono dopo un tempo determinato a quello, che sarebbero nel momento del contratto, e viceversa riesce utilissimo, poichè fatta questa riduzione, molti problemi relativi all' interesse che sembrerebbero complicatissimi non esigono che delle semplici addizioni, e sottrazioni. Se p. e. un Banchiere che debbe una somma C pagabile dopo n anni, dà in vece un effetto il cui valore è rappresentato da C' dopo n' anni, esprimendo ciascuna di queste somme pel loro valore attuale (§ 893,904) la lor differenza $\frac{C}{(1+i)^n} - \frac{C'}{(1+i)^{n'}}$, secondo che sarà positiva o negativa, esprimerà ciò che dee nel momento del contratto dare o ricevere il Banchiere per pareggiar le partite; e se il valore che nel momento del contratto ha questa differenza che chiamar possiamo c'', non potesse pagarsi che dopo n'' anni, al fin di questo tempo essa diventa $c''(1+i)^{n''}$, ovvero (ponendo in vece di c' il suo valore) diventa

$$\left(\frac{C}{(1+i)^n} - \frac{C'}{(1+i)^{n'}}\right)(1+i)^{n''}, \text{ ovvero } C\,(1+i)^{n''-n} - C'\,(1+i)^{n''-n'}$$

(§. 613); ed eccone un' applicazione.

908. *Per una Cambiale di scudi 1000 esigibile qui a 3 anni Tizio da una Cambiale di scudi 600 esigibile qui a due anni, e pareggiamento di partite pel resto forma una cambiale da esigersi qui ad un' anno. A quanto dee montare il valore di questa, calcolati gli sconti al 5 per cento?* Risultato: A scudi 335,60.

L' ultima formola applicata al nostro caso per la cambiale da pagarsi qui ad un anno diventa infatti

$$1000\ ({}^{21}/_{20})^{1-3} - 600\ ({}^{21}/_{20})^{1-2} = \frac{1000}{({}^{21}/_{20})^2} - \frac{600}{{}^{21}/_{20}}$$

$$(\S\,613) = 907{,}029 - 571{,}429 = 335{,}60\,.$$

Regola di falsa posizione.

909. E perchè applicazione alcuna non venga omessa della teoria delle proporzioni notiamo finalmente, che per mezzo di una semplice regola del tre possono sciogliersi tutti que' Problemi di 1° grado di tal' indole, che ci offrono un rapporto di continenza fra un tutto, e qualcuna delle sue parti, il quale rimanga costante per qualunque valore venisse accordato all' incognita.

Prendiamo per es. il Problema della *Scolaresca* (§ 506). Abbiamo da esso che il numero x di tutti gli studenti meno quelli di Legge che sono $^x/_2$, meno quelli di Medicina che sono $^x/_3$, è di 126, che cioè

$$x - {}^x/_2 - {}^x/_3 = 126$$

Or supponiamo x eguale ad un numero qualunque, che ci venga in mente a capriccio, p. e. a 900. Se questo fosse il vero numero, sostituito ad x dovrebbe convertire l'equazione fondamentale in identità, e se ciò accadesse, casuale sarebbe il ritrovamento dell' incognita: ma $900 - {}^{900}/_2 - {}^{900}/_3$ fa 150, e non 126; dunque la *supposizione* che il numero della scolaresca sia 900 è *falsa*. Per altro siccome 2 quantità stanno tra loro come le lor metà, i loro terzi, le lor parti simili (805), così ne segue che 900, ed x stanno tra loro come $^{900}/_2$ e $^x/_2$; come $^{900}/_3$ e $^x/_3$; ec. sicchè sono antecedenti gli uni, e conseguenti gli altri di ragioni eguali; *ma qualunque somma o differenza d'antecedenti sta alla*

somma o differenza de' rispettivi conseguenti, come un antecedente al suo conseguente (§ 909,813): dunque sta

$900 - {}^{900}/_2 - {}^{900}/_3$ ad $x - {}^{x}/_2 - {}^{x}/_3$, ossia sta $150 : 126 = 900 : x$, donde $x = 756$.

Questo metodo che ci porta al valore della incognita per mezzo d'una proporzione, che noi formiamo in seguito d'una *falsa supposizione* è perciò chiamato *Regola di falsa posizione*.

910. Problemi di diversa indole per essere sciolti esigono due false supposizioni, ed allora la regola chiamasi di *doppia falsa posizione*; ma poichè questo metodo parte da un tentativo, e non suole impiegarsi che nei problemi di 1° grado pei quali abbiamo le dirette formole di risoluzione, noi stimiamo inutile di aggravar di esso la memoria degli Allievi, ai quali nel dar termine alle nostre Lezioni di Algebra raccomandiam caldamente e lo studio delle teorie, e l'indefesso esercizio nelle loro applicazioni, sicchè ubertoso ne risulti il profitto, unico scopo che si è auto in mira nella compilazione di questo tenue sì, ma faticoso lavoró.

FINE DEL TOMO PRIMO



IMPRIMATUR

Fr. Angelus V. De Maurizj O. P. Inq. Gen. Perusiae.

IMPRIMATUR

Constantius Can. Gigliucci Vic. Gen. Perusiae

VISTO

Per la Delegazione Apostolica — N. Prof. Calderini

INDICE

CAPO IV.

CAPO V.

CAPO VI.

CAPO VII.

CAPO VIII.

CAPO IX.

CAPO X.

CAPO XI.

CAPO XII.

Pag.	lin.	*ERRORI*	*CORREZIONI*
50	31,32,33	342	346
51	2	le 2 unità	le 6 unità
58	26	92600	921600
86	1	1758 | 39 198 | —— —— | 45 00 |	1758 | 39 198 | —— 3 | 45
109	10	$\frac{s}{2}-\frac{d}{2}+\frac{d}{2}-\frac{d}{2}$	$\frac{s}{2}-\frac{d}{2}+\frac{d}{2}+\frac{d}{2}$
111	9	inven-	invenzio-
135	21	1000	10000
149	17	$+a^3-2x$	$+a^2-3x$
178	12	$ap+ap$	$ap+cp$
188	18	$2a^2-ac+2ag-cg^2$	$2a^2-ac+2ag-cg$
315	20	Poll, 109 lin 1 p. 8	Poll. 109 lin. 3 pun. 8
316	23	(138), se ne valuti (336)	(338), se ne valuti (436)
359	25	popolazione	popolazione, e 770884 sono i superstiti,
364	11	miglia 17 e un quarto	miglia 23
365	10	$100x$	$1000x$
392	5	Fantesche?	fantesche, posto che il n.° degli adulti e fanciulli meno quello delle donne sia 36?
406	6,7	a^4	c^4
413	14	$-729f^6g^9$	$-729c^3f^6g^9$
416	22	$\sqrt[n]{c^r}\times\sqrt[n]{h}\times\sqrt[n]{h^m}$	$\sqrt[n]{c^r}\times\sqrt[n]{h}\times\sqrt[n]{p^m}$,
424	23	un binomio qualunque	il quadrato d' un binomio qualuuque
448	8	$-2cg^2+g^2$	$-2cg^2+g^4$
449	24	$\sqrt{1000}$	$\sqrt{10000}$
465	15,16	radice	quadrato
474	14	160103007	160,103007
507	31	(724)	(725)
510	2,3	$A+{}^1/_4c^2$	$-A+{}^1/_4c^2$
510	29	$\sqrt{(-500+1600)}$	$\sqrt{(-1500+1600)}$
573	29	$V:V=T:T'$	$V':V=T:T'$





